UNIVERSIDAD DEL VALLE DE MEXICO

Suma de Progresiones Aritméticas

Pablo García Caravantes
Cta. 6401605-1
Maestría en Finanzas

En el salón de clases

Era una mañana común y corriente en una escuela como cualquier otra. El profesor, ante un grupo de niños de alrededor de 10 años de edad, estaba molesto por algún mal comportamiento del grupo y decidió poner a trabajar a sus alumnos en un problema de matemáticas que según él les llevaría un buen rato terminar; así, de paso, podría descansar un poco. En esa época se acostumbraba que los niños llevaran una pequeña pizarra en la cual hacían sus ejercicios. El maestro dijo a sus alumnos que según fueran terminando el problema dejaran las pizarras boca abajo sobre su escritorio, para que al terminar todos él revisara los resultados. El problema consistía en sumar los primeros cien números enteros, es decir encontrar la suma de todos los números del 1 al 100.

A los pocos segundos de haber planteado el problema, se levantó un niño y depositó su pizarra sobre el escritorio del maestro. Éste, convencido de que aquél niño no quería trabajar, ni se molestó en ver el resultado; prefirió esperar a que todos terminaran. Un poco más de media hora después comenzaron a levantarse los demás niños para dejar su pizarra, hasta que finalmente todo el grupo terminó.

Para sorpresa del profesor, de todos los resultados el único correcto era el del muchacho que había entregado primero. Mandó llamar al chico y le preguntó si estaba seguro de su resultado y cómo lo había encontrado tan rápido. El niño respondió: “Mire, maestro, antes de empezar a sumar mecánicamente los cien primeros números me di cuenta de que si sumaba el primero y el último obtenía 101; al sumar el segundo y el penúltimo también se obtiene 101, al igual que al sumar el tercero y el antepenúltimo, y así sucesivamente hasta llegar a los dos números centrales que son 50 y 51, que también suman 101. Entonces lo que hice fue multiplicar 101 por 50 para obtener mi resultado de 5,050.”

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100 = ?$$

$$\begin{array}{rcl} 1 + 100 & = & 101 \\ 2 + 99 & = & 101 \\ 3 + 98 & = & 101 \\ 4 + 97 & = & 101 \\ \ldots & & \\ 48 + 53 & = & 101 \\ 49 + 52 & = & 101 \\ 50 + 51 & = & 101 \end{array}$$

50 veces

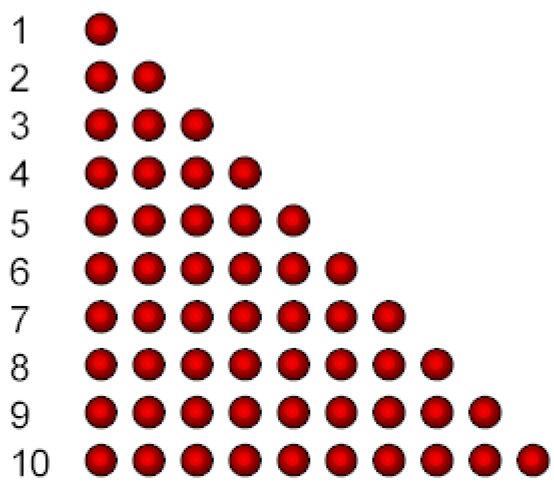
Por lo tanto

1 + 2 + 3 + … + 98 + 99 + 100 = 50 x 101
= 5,050

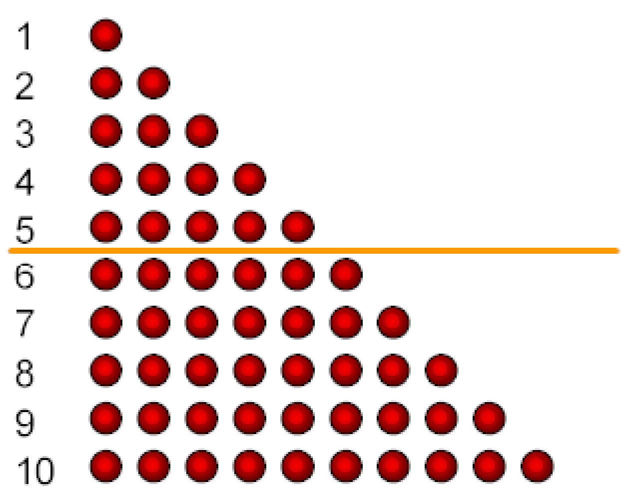
Lo anterior ocurrió en Alemania en 1787 y por supuesto aquél niño genio era Gauss, quien durante toda su vida continuó mostrando su impresionante capacidad para las matemáticas.

Esquema de la solución

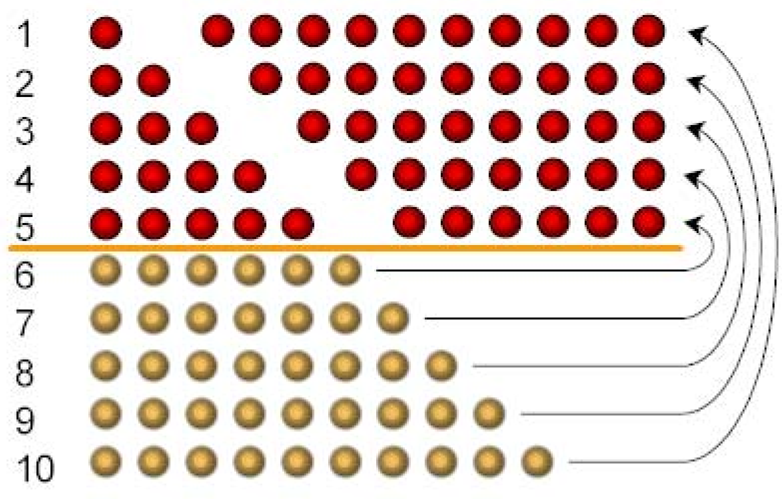
Para ver gráficamente la solución encontrada por Gauss utilicemos una serie más pequeña, la del 1 al 10 y representemos cada número con una cantidad de círculos equivalente.



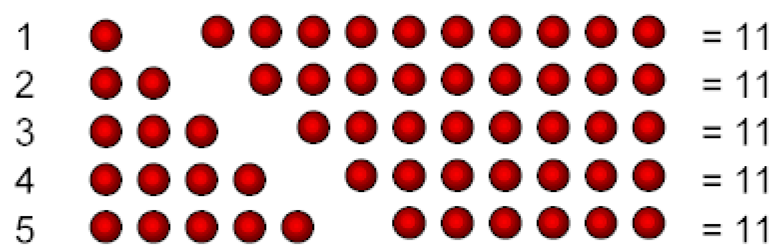
Si dividimos la serie por la mitad…



Y sumamos el primer número con el último, el segundo con el penúltimo.



Habremos formado un rectángulo.



En el que el lado menor es de 5 círculos y el lado mayor es de 11. Por lo que podemos encontrar el área multiplicando 5 x 11 (lado menor por lado mayor).

El 5 resultó de dividir el número total de la serie entre 2 y el 11 se obtiene de sumar el primer número más el último.

$$\frac{10}{2}(1+10)$$

Si lo anterior lo expresamos en una forma general tenemos

$$\frac{n}{2}(t_1+\mu)$$

En donde $\boldsymbol{n}$ es el número total de términos de la serie, $\boldsymbol{t}_1$ es el primer término y μ es el último.

Bibliografía

El develador de las incógnitas Carl F. Gauss. Francisco Noreña. Colección Viajeros del conocimiento. Pangea Editores. 1992.