

CAPÍTULO 4 – ANALYTIC HIERARCHY PROCESS (AHP)

O AHP (*Analytic Hierarchy Process*) é um método de análise de decisão e planejamento de múltiplos critérios desenvolvido por Thomas L. Saaty em 1977. Meados da década de 70, em resposta ao planejamento de contingência militar e empresarial, tomada de decisão, alocação de recursos escassos, resolução de conflitos e a necessária participação política nos acordos negociados. Desde então, tem mostrado ser uma metodologia variada e útil, fornecendo a cientistas de diferentes áreas um novo meio de olhar os seus velhos problemas (WASIL & GOLDEN, 2003). A teoria reflete a maneira pela qual a mente humana conceitualiza e estrutura um problema complexo. O método natural de funcionamento da mente humana, quando se defronta com um grande número de elementos, controláveis ou não, que abrangem uma situação complexa, é agregá-los a grupos, segundo propriedades comuns, isto é, quando o ser humano identifica alguma coisa, decompõe a complexidade encontrada; quando descobre relações, sintetiza; este é o processo fundamental da percepção: **decomposição e síntese**.

A metodologia baseia-se no princípio de que para a tomada de decisão, a experiência e o conhecimento das pessoas é pelo menos tão valioso, quanto os dados utilizados.

O AHP é um método que se caracteriza pela capacidade de analisar um problema de tomada de decisão, através da construção de níveis hierárquicos, ou seja, para se ter uma visão global da relação complexa inerente à situação, o problema é decomposto em fatores. Os fatores são decompostos em um novo nível de fatores, e assim por diante até determinado nível. Esses elementos, previamente selecionados, são organizados numa hierarquia descendente onde os objetivos finais devem estar no topo, seguidos de seus sub-objetivos, imediatamente abaixo, as forças limitadoras dos decisores, os objetivos dos decisores e por fim, os vários resultados possíveis, os cenários. Os cenários determinam as probabilidades de se atingir os objetivos, os objetivos influenciam os decisores, os decisores guiam as forças que, finalmente, causarão impacto nos objetivos finais. O AHP utiliza o pensamento dedutivo, partindo do geral para o mais particular e concreto.

Deste modo, a hierarquia pode ser construída em inúmeros níveis desejados, sendo fixado o objetivo principal no primeiro nível, a definição dos critérios no segundo nível e assim por diante. A ordenação serve para dois propósitos: fornecer uma visão global da relação complexa inerente à situação e, ajudar o tomador de decisão a avaliar se os critérios de cada nível são da mesma ordem de magnitude, assim ele pode comparar cada elemento homogêneo apuradamente.

O processo permite estruturar hierarquicamente qualquer problema complexo, com múltiplos critérios; com múltiplos decisores; com múltiplos períodos. É um processo flexível que apela para a lógica e, ao mesmo tempo, utiliza a intuição. O ingrediente principal que tem levado as aplicações com o AHP a terem sucesso, é o poder de incluir e medir fatores importantes, qualitativos e / ou quantitativos, sejam eles, tangíveis ou intangíveis, e a facilidade de uso. Na aplicação são considerados as diferenças e os conflitos de opiniões.

A metodologia deve ser útil para formular problemas, incorporando conhecimento e julgamentos de forma que as questões envolvidas sejam claramente articuladas, avaliadas, debatidas e priorizadas. O AHP é utilizado para obter julgamentos através do **consenso**. Seja qual for a forma que o julgamento final for lançado, sempre haverá pessoas cujos julgamentos diferem de qualquer resultado particular, mas quando um grupo esteve envolvido na formulação de julgamentos, terá sido criada uma síntese de interesse, decorrente de uma homogeneização de conhecimentos do problema que a metodologia propõe.

O problema da decisão está em escolher a alternativa que melhor satisfaça ao conjunto total de objetivos. Além disso, torna-se necessário determinar a força com a qual os vários elementos de um certo nível, influenciam os elementos do nível mais alto seguinte, para que se possam computar as forças relativas dos impactos dos elementos sobre o nível mais baixo e sobre os objetivos gerais. A Figura 33 contém o fluxograma que apresenta a aplicação da metodologia do AHP.

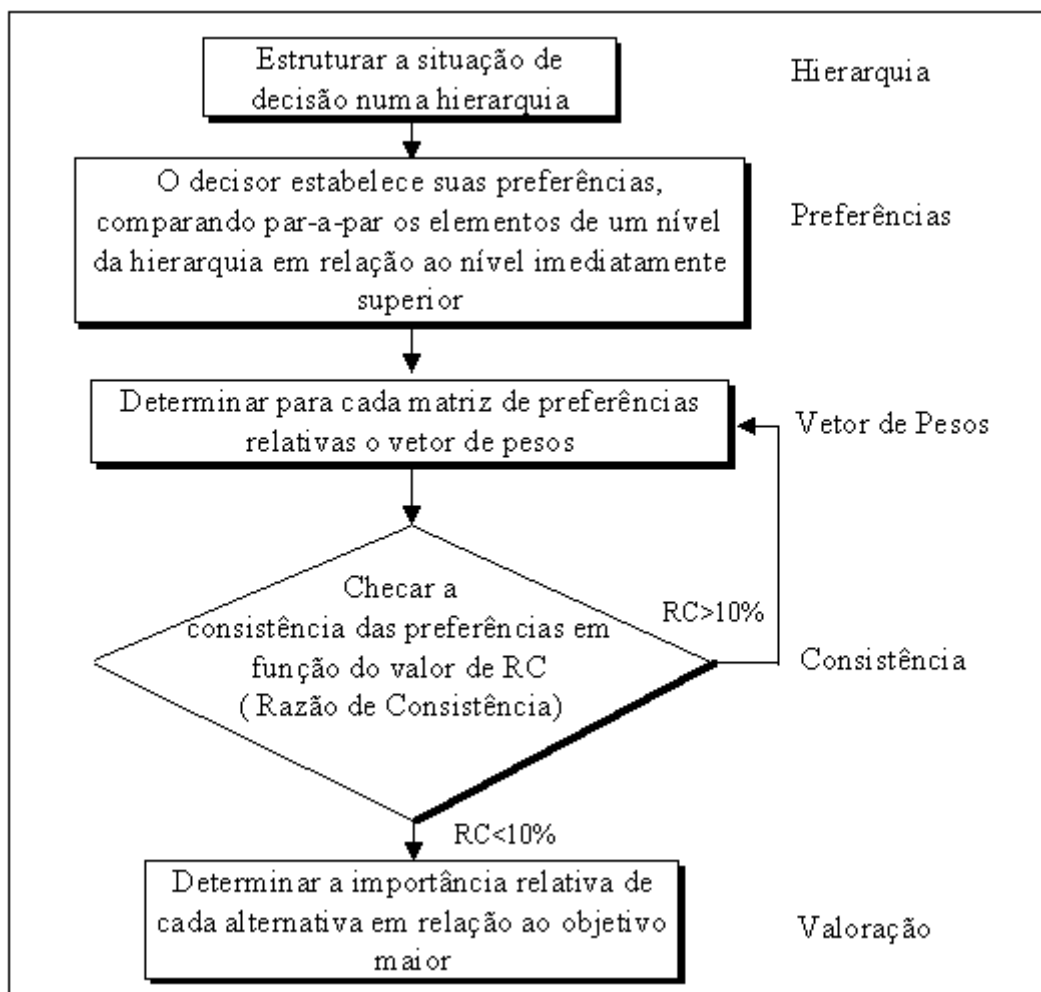


Figura 33 - Fluxograma da aplicação do AHP (SCHMIDT, 1995)

AHP consiste de duas etapas para a solução do problema:

- Estruturação (Decomposição);
- Avaliação (julgamentos comparativos e síntese das prioridades);

4.1 – Fase de Estruturação

Nesta fase os atores do processo decisório poderão utilizar os conceitos apresentados no capítulo 2, através do mapa cognitivo transformado em árvore de ponto de vista, o facilitador terá dados suficientes para estruturação da hierarquia.

Muitos pesquisadores, simpatizantes com a escola europeia, defendem a dicotomia MCDA (MACBETH - **aid**) x MCDM (AHP - **making**) e afirmam que a fase de estruturação do AHP é um ato unilateral do ator dominante, inexistindo qualquer construção ou aprendizagem pelos demais atores nesta estruturação, portanto a

estruturação seria mais um ponto de diferenciação ao invés de convergência. O autor desta dissertação defende que o estudo realizado no capítulo dois é comum a estes dois métodos (AHP e MACBETH), apesar dos pesquisadores da escola europeia terem aperfeiçoado as ferramentas de estruturação a um nível mais detalhado em relação ao AHP, em nenhum momento SAATY ou os pesquisadores defensores da escola americana estabeleceram procedimentos contrários ou contraditórios aos da escola europeia. Pelo contrário, eles afirmaram de forma genérica a estruturação, proporcionando ao facilitador maior liberdade para a arte de modelar, afinal, conforme exposto no item 2.1.3: “A estruturação está dependente da **habilidade e intuição individual** do facilitador.”. GOMES et al (2002), em sua obra, considera MCDA e MCDM como sinônimos, o que fundamenta o pensamento supramencionado.

Estabelecido a convergência de conceitos das duas metodologias no capítulo 2, a partir deste ponto, a metodologia AHP começará a divergir do MACBETH, iniciando uma diferenciação de procedimentos.

4.1.1 – Construção da Hierarquia

Uma hierarquia é uma estrutura simples, usada para representar simplesmente o tipo de dependência de um nível ou componente de um sistema com outro de maneira seqüencial. É também uma maneira conveniente de decompor um problema complexo numa pesquisa de explicações de causa-efeito, em passos os quais formam uma cadeia linear.

Talvez a tarefa mais criativa na tomada de decisão é a escolha de fatores que são importantes para a tomada de decisão. Na prática não existe um conjunto de procedimentos que geram os objetivos, critérios e alternativas a serem incluídos numa hierarquia ou mesmo num sistema mais geral.

Na construção da hierarquia devem ser incluídos detalhes relevantes para:

- Representar o problema de tal modo que inclua todos os elementos importantes para a avaliação, sem que seja perdida a sensibilidade para que, se necessário, no desenrolar do processo os elementos possam ser mudados;
- Considerar o ambiente que cerca o problema;
- Identificar as questões ou atributos que contribuam para a solução;
- Identificar os participantes associados com o problema.

A construção da hierarquia requer experiência e conhecimento da área do problema. Dois decisores podem normalmente estruturar duas diferentes hierarquias do mesmo problema. Assim uma hierarquia não é única. Por outro lado, mesmo quando duas pessoas constroem a mesma hierarquia, suas preferências podem produzir diferentes cursos de ação. Entretanto, um grupo de pessoas pode trabalhar junto para chegar a um consenso em ambas as hierarquias e nos julgamentos e suas sínteses (avaliação).

A hierarquia pode ser linear ou não-linear. Uma hierarquia não-linear apresenta arranjos circulares, isto é, um nível superior pode ser dominado por um nível inferior e estar sempre numa posição dominante.

A fase de implementação do AHP envolve quatro processos (Figura 34) inter-relacionados não seqüenciais, segundo VARGAS (1990):

- Identificação de níveis e elementos;
- Definição de conceitos;
- Formulação das perguntas
- Avaliação da hierarquia.

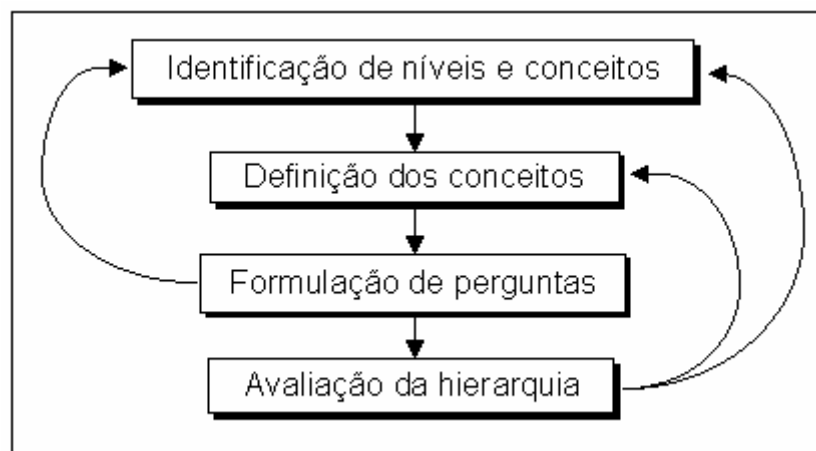


Figura 34 - Relação entre componentes na construção da hierarquia (VARGAS,1990)

Num primeiro passo, níveis e elementos (conceitos) dentro dos níveis são identificados. São, então, definidos e utilizados na fase de formulação das perguntas. Caso os decisores tenham problemas em responder essas questões, então os níveis e conceitos devem ser revisados e modificados. A construção hierárquica é um processo iterativo, estando presentes o construtivismo e aprendizagem, onde os conceitos, as perguntas a serem respondidas e as respostas associadas com as perguntas, determinam os elementos e os níveis da hierarquia. A ambigüidade no processo de

questionamento pode levar o decisor a selecionar o critério ou alternativa errada, todas as perguntas devem ser correspondentes e consistentes com a informação existente. Vale ressaltar que o mapa cognitivo congregado auxiliará ao facilitador nas etapas acima descritas.

No AHP os fatores são selecionados e arranjados, em uma estrutura hierárquica descendente do objetivo geral para o critério, subcritério e alternativas em níveis sucessivos (Figura 35).

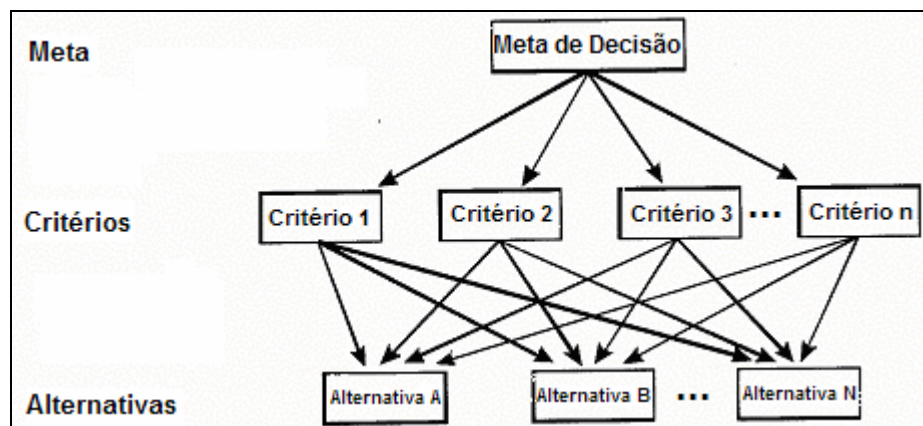


Figura 35 - Estrutura Hierárquica Básica (DE MELLO, 2001)

Uma hierarquia não precisa necessariamente ser completa, isto é, um elemento num dado nível não tem a função de um atributo (ou critério) para todos os elementos num nível abaixo. Uma hierarquia não é uma árvore de decisão tradicional. Cada nível pode representar uma diferente observação do problema. Um nível pode representar fatores sociais e outro político para serem avaliados em termos de fatores sociais e vice-versa. Além disso, o decisor pode inserir ou eliminar níveis e elementos necessários para clarear a tarefa de fixar prioridades ou para apurar a visão de uma ou mais partes do sistema.

Encerrada a estruturação do problema, em seguida, é realizada a fase de **triagem e seleção**.

A triagem (P.β) tem a função de reduzir o número de ações (alternativas), avaliando quais são viáveis. Este é um passo superficial, seu único intuito é o de analisar superficialmente as alternativas e eliminar as que são inviáveis.

A fase de seleção é o passo em que, é feita a análise das características das ações e das conseqüências das características escolhidas. É um processo iterativo que envolve uma análise mais aprofundada, é o próprio ato de escolher.

4.2 – Fase de Avaliação

Na fase de avaliação é necessária a definição do tipo de problemática técnica que será adotada, conforme apresentado no item 2.3.

O AHP tem sido usado com escalas de medidas relativas e absolutas para derivar relação de escalas de medidas. Medidas absolutas podem, em termos, ser aplicadas para ordenar alternativas, para a definição de critérios ou de outro modo, para avaliar os critérios.

Em ambos os tipos de medida, os pares de comparação são executados para determinar a prioridade dos critérios, com respeito ao objetivo principal.

Com medidas relativas, os pares de comparação são executados através da hierarquia contida nas alternativas dos níveis mais baixos com respeito ao critério do nível mais alto.

Com medidas absolutas, os pares de comparação são também executados através da hierarquia, com exceção da comparação das alternativas entre si. O nível exato acima das alternativas consiste da intensidade ou do grau com que são aperfeiçoados os critérios ou subcritérios que governam as alternativas.

A medida absoluta é aplicada para ordenar alternativas em termos de avaliação, intensidade ou grau dos critérios. A alternativa é avaliada para cada critério ou subcritério, identificando o grau que melhor a descreva. Estes graus podem ter a forma qualitativa: excelente, muito bom, bom, médio, abaixo da média, pobre ou muito pobre.

Finalmente, o peso ou as prioridades globais dos graus são adicionados, para produzir uma escala de relação para a alternativa.

4.2.1 – Medida de Julgamento e Consistência

A hierarquia representa a análise dos elementos mais importantes da situação e as suas relações. Porém, não é um auxílio muito poderoso no processo de planejamento ou de tomada de decisão. É necessário ainda, um método para determinar a força com a qual os vários elementos influenciam outros elementos, de forma que se possa calcular a força relativa dos impactos sobre o objetivo geral.

4.2.1.1 – Julgamentos

No AHP os julgamentos são dados na forma de par de comparação. O decisor transforma a informação a ser avaliada em pares de comparação respondendo a

questão: Dado um critério e duas alternativas A e B, qual a alternativa que mais satisfaz, e qual seu nível relativo em relação ao critério considerado?

O uso da hierarquia é que permite focalizar separadamente os julgamentos, em cada uma das diversas propriedades essenciais, para tomar uma decisão segura. O modo mais eficiente para concentrar julgamentos, é tomar um par de elementos e compará-los a uma única propriedade, sem referir-se a outras propriedades ou outros elementos.

Algumas vezes, as comparações são feitas com base na estabilidade padrão da memória, através da experiência ou do treinamento.

Neste estágio, os axiomas da teoria são transparentes, se o tomador de decisão não puder fornecer uma resposta, então, ou a pergunta não é significativa ou as alternativas não são comparáveis.

Os axiomas são os seguintes (VARGAS, 1990):

➤ **Axioma 1: Comparação recíproca**

O tomador de decisão deve ser capaz de fazer comparações e manifestar a força de suas preferências. A intensidade dessas preferências deve satisfazer a condição de reciprocidade: se A é α vezes mais preferível que B, logo, B é $1/\alpha$ vezes mais preferível que A.

A não ocorrência deste axioma, indica que a pergunta usada para elucidar os julgamentos ou pares de comparação, não é claro ou correto. Neste caso, devem ser reavaliados os elementos ou os níveis da hierarquia.

➤ **Axioma 2: Homogeneidade**

As preferências são representadas pelo princípio de uma escala limitada.

Caso este axioma não seja satisfeito, isto indica que os elementos que estão sendo comparados não são homogêneos e os grupos podem precisar ser formados. Este axioma restringe o limite superior da escala. Na prática este limite superior possui somente uma ordem de magnitude, isto é, 9. Se os elementos a serem comparados não pertencem a um grupo homogêneo, eles podem ser ordenados em diferentes grupos, e comparados com elementos de mesma ordem de magnitude. A comparação entre os grupos pode ser feita pela divisão de elementos que pertencem aos seus limites. Se o decisor não pode fornecer uma resposta, então ou a pergunta não é significativa ou as alternativas não são comparáveis. Comparabilidade significa homogeneidade.

➤ **Axioma 3: Independência**

Quando as preferências são declaradas, assume-se que os critérios são independentes das propriedades das alternativas.

Este axioma implica que os pesos do critério devem ser independentes das alternativas consideradas. Um modo de determinar a violação deste axioma é usar uma generalização do AHP, conhecida como a abordagem da supermatriz.

➤ **Axioma 4: Expectativa**

Para a proposta de tomar uma decisão, supõe-se que a estrutura hierárquica seja completa.

Finalmente, se este axioma não for satisfeito, então o decisor não está usando todos os critérios e / ou todas as alternativas avaliáveis ou necessárias, para encontrar suas expectativas racionais, e assim a decisão é incompleta.

Nesta fase, cada decisor irá apresentar seu julgamento, estabelecendo a relação de importância entre os elementos da hierarquia com seu interesse especial. Se os atores divergirem nos julgamentos, pode-se chegar a um consenso através da técnica Delphi.

4.2.1.2 – Método de Comparação Par-a-Par

Para problemas onde não se pode ou não se tem condições de validar os resultados, fazendo medições com instrumentos, o processo de comparação par-a-par é uma ferramenta muito útil. Embora, o número de pares de comparações necessários em problemas reais, freqüentemente, torna-se muito alto. A estruturação do problema e o debate, o qual precede cada par de comparação, são aspectos vitais do processo o qual se torna difícil de ser encurtado, devido às pressões crescentes da necessidade de completar todos os pares de comparação.

As comparações paritárias em combinação com a estrutura hierárquica são úteis para a dedução de medidas, isto é, os pares de comparação são usados para estimar a escala fundamental unidimensional, na qual os elementos de cada nível são medidos. Isto pode ser efetuado, usando o método de autovetor principal na matriz de comparação paritária.

A proposta do AHP é fornecer um vetor de pesos para expressar a importância relativa dos diversos elementos. O primeiro passo é medir o grau de importância do elemento de um determinado nível, sobre aqueles de um nível inferior, pelo processo de comparação par-a-par feito pelo decisor. A quantificação dos julgamentos é feita

uma classificação em termos relativos, utilizando-se uma escala de valores que varia de 1 a 9 (Tabela 8).

Tabela 8 - Escala Fundamental de Julgamento (PAMPLONA, 1999)

Intensidade de Importância	Definição	Explicação
1	Importância igual	Duas atividades contribuem igualmente para o objetivo.
3	Importância fraca de uma sobre a outra	A experiência e o julgamento favorecem levemente uma atividade em relação a outra.
5	Importância forte	A experiência e o julgamento favorecem fortemente uma atividade em relação a outra.
7	Importância muito forte	Uma atividade é fortemente favorecida em relação à outra e sua dominância é demonstrada na prática.
9	Importância absoluta	A evidência favorecendo uma atividade em relação à outra é do mais alto grau de certeza.
2,4,6,8	Valores intermediários entre dois julgamentos adjacentes	Quando é necessária uma condição de compromisso.
Recíprocos	Se a atividade i tem uma das intensidades de importância ou de preferência de 1 a 9 quando comparada com a atividade j, então j tem o valor recíproco quando comparado com i.	
Racionais	Razões da Escala	Se a consistência tiver de ser forçada para obter n valores numéricos para completar a matriz

SAATY (1990) fez experiências com várias escalas (3,5,7,9,20), e concluiu que a escala de nove valores fornece flexibilidade suficiente para diferenciar dois elementos. Embora, ele não impeça a utilização de outras escalas de julgamento.

4.2.1.3 – Matriz de Julgamento e Teste de Consistência

Os resultados obtidos com os julgamentos, através da comparação paritária, os números, são colocados numa matriz A quadrada $n \times n$. Este procedimento se repete para todos os elementos do nível, com respeito a todos os elementos de um nível acima. A matriz apresenta-se da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \frac{1}{a_{21}} & 1 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n1}} & \frac{1}{a_{n2}} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Os elementos a_{ij} são definidos pelas seguintes condições:

- $a_{ij} > 0 \rightarrow$ positivo
- $a_{ij} = 1/a_{ji} \rightarrow$ recíproca
- $a_{ik} = a_{ij} \times a_{jk} \rightarrow$ consistência

O número de julgamentos necessários para a construção da matriz é $\frac{n(n-1)}{2}$,

onde n é o número de elementos da matriz A .

Cada entrada da matriz de comparação a_{ij} , deve ser considerada como uma estimativa da razão entre os elementos da linha de ordem i e os elementos da coluna

de ordem j , isto é, $a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$

Supondo que (w_1, \dots, w_n) são estimativas precisas, todos os elementos da matriz são consistentes. Sendo:

$\left(\frac{w_i}{w_j}\right) \rightarrow$ importância relativa dos elementos da linha de ordem i em relação aos

elementos da coluna de ordem j .

$(w_1, \dots, w_n) \rightarrow$ pesos numéricos que refletirão os julgamentos registrados.

No caso ideal de medidas exatas, as relações entre os pesos w e os julgamentos a_{ij} são dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1/w_1 & \dots & w_1/w_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ w_n/w_1 & \dots & w_n/w_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{ij} = \frac{w_i}{w_j} \\ a_{ij} \times a_{jk} = a_{ik} \end{cases}$$

Isto é, os elementos da linha de ordem i da matriz A : $a_{i1}; a_{i2}; \dots; a_{ij}; \dots; a_{in}$, são os

mesmos da razão: $\frac{w_i}{w_1}; \frac{w_i}{w_2}; \dots; \frac{w_i}{w_j}; \dots; \frac{w_i}{w_n}$

Se o primeiro elemento for multiplicado por w_1 , o segundo por w_2 , e assim por diante, obtêm-se:

$$\frac{w_i}{w_1} \times w_1 = w_i; \frac{w_i}{w_2} \times w_2 = w_i; \dots; \frac{w_i}{w_j} \times w_j = w_i; \dots; \frac{w_i}{w_n} \times w_n = w_i$$

Sendo assim:

- w_1 é igual à média aritmética dos valores da linha de ordem i ,
- w_i = a média aritmética de $(a_{i1} \cdot w_1; a_{i2} \cdot w_2; \dots; a_{in} \cdot w_n)$

que é igual a:

$$w_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot w_j$$

Então:

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j} \quad a_{ij} \times \frac{w_j}{w_i} = 1$$

Conseqüentemente:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \times w_j = n \times w_i$$

o que é equivalente a:

$$\begin{cases} a_{ij} = \frac{w_i}{w_j} \\ a_{ij} \times a_{jk} = a_{ik} \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1/w_1 & \dots & w_1/w_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ w_n/w_1 & \dots & w_n/w_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} nw_1 \\ \vdots \\ nw_n \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

Multiplicando-se A pelo vetor de pesos $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$. O resultado dessa multiplicação é $n \cdot w$. Em teoria matricial, esta fórmula expressa o fato de que w é um autovetor de A , com autovalores de n .

No caso ideal, todos os autovalores são zero, exceto um, que é n . Cada linha de A é uma constante da primeira linha. A soma dos autovalores da matriz é igual a sua transposta. A soma dos elementos da diagonal, é neste caso, a transposta de A e é igual a n . Assim, n é o maior ou principal autovalor de A .

A solução de $Aw = nw$ é chamada de autovetor direito principal de A , consiste de entradas positivas e é única dentro de uma constante multiplicativa. Para tornar w única, normalizam-se suas entradas, dividindo pela sua soma.

Entretanto, é irreal querer que estas relações signifiquem o caso geral. A imposição destas relações restritas tornaria insolúvel, na maioria dos casos práticos, o problema de encontrar w_1 , quando a_{ij} é dado, uma vez que medidas físicas não são exatas, daí a necessidade de uma tolerância para desvios, e ainda porque em julgamentos humanos, estes desvios são consideravelmente maiores.

Como os a_{ij} , são valores baseados em julgamentos subjetivos, é diferente de $\frac{w_i}{w_j}$.

Logo: $w_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{ij} \times w_j \times \mathcal{E}_{ij}, (i = 1, \dots, n) e (j = 1, \dots, n)$ onde \mathcal{E}_{ij} é o espalhamento

estatístico em volta de w_i , isto é, é o desvio de $\frac{w_i}{w_j}$ de a_{ij} .

Portanto: $w_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \times w_j \times \frac{\mathcal{E}_{ij}}{n}, (i = 1, \dots, n) e (j = 1, \dots, n)$ onde passaremos a

representar para o caso geral: $\frac{\mathcal{E}_{ij}}{n} = \frac{1}{\lambda^{máx}} \therefore \lambda^{máx} = \frac{n}{\mathcal{E}_{ij}}$

Observa-se assim que uma pequena variação de a_{ij} , implica em pequenas variações em $\lambda^{máx}$. Então, para uma matriz qualquer de ordem n existem no máximo n autovalores distintos, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, a sua soma será $\sum_{i=1}^n \lambda_i = n$.

Obviamente, no caso de consistência total, n será o maior autovalor de A , isto significa que $\lambda^{máx} = n$, e implica em $\mathcal{E}_{ij} = 0$ e $a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$. Desde modo, o desvio de

$\lambda^{máx}$ a partir de n é uma medida de consistência.

O índice de consistência é calculado pela equação: $IC = \frac{(\lambda^{máx} - n)}{(n - 1)}$. Este índice

mede o desvio dos julgamentos da consistência, quanto mais próximo o índice estiver de zero, melhor será a consistência global da matriz de comparação de julgamentos.

Segundo SAATY (1991), consistência quer dizer que, quando uma quantidade básica de julgamentos de uma matriz foram feitos, isto é, pelo menos $(n-1)$ comparações, passa-se a deduzir os outros julgamentos até completar toda a matriz.

O grau de inconsistência ou incomparabilidade é medido por: $RC = \frac{IC}{IR}$ onde, IR

é o índice de consistência randômico, que é determinado através de experimentos e após tabelado. O IR utilizado terá a mesma dimensão n de IC .

O IR, índice de consistência randômico, é baseado na escala de 1 a 9. Para cada ordem de matriz, foi construído uma amostra de tamanho 100, as suas entradas foram preenchidas randomicamente, sendo que, as entradas da diagonal principal são unitárias, e para cada posição acima da diagonal, foram colocados randomicamente qualquer dos inteiros de 1 a 9 ou seus recíprocos. Na posição abaixo da diagonal foram colocados os seus recíprocos forçados. Por exemplo, se na posição $a_{ij} = 6$, então na posição $a_{ji} = 1/a_{ij} = 1/6$. A seguir as matrizes são calculadas e é encontrado a média de $\frac{(\lambda_{máx-n})}{(n-1)}$ para as 100 matrizes correspondentes a cada valor de n. Os cálculos foram repetidos para uma amostra de tamanho 500. A Tabela 9 mostra a ordem das matrizes com os seus IRs correspondentes.

Tabela 9. Índices Randômicos (FOGLIATTO & ALBIN, 2003)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
IR	0	0	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49	1,51	1,48

O grau de inconsistência, IR, calculado representa o quão bem os resultados obtidos dos julgamentos representam a realidade.

O teste de consistência só é possível, porque existe uma matriz de comparação paritária. De acordo com SAATY (1991), o resultado de RC deve ser menor que 10%, caso contrário a qualidade dos julgamentos deve ser melhorada através de uma revisão das estimativas.

4.2.2 – Prioridades

De acordo com o exposto, elementos que têm características globais, devem ser representados no nível mais alto da hierarquia, os outros com características que especificam o problema, podem ser desenvolvidos nos níveis mais baixos. A tarefa de determinar prioridades requer que o critério, as propriedades ou características das alternativas sejam comparados. As alternativas devem ser colocadas gradualmente na hierarquia, e confrontadas entre si, em relação aos elementos do nível mais alto.

Depois de terem sido julgados os impactos de todos os elementos, e as prioridades terem sido calculadas para a hierarquia como um todo, algumas vezes, e com cuidado, os elementos menos importantes podem ser abandonados, por causa de

seus impactos relativamente pequenos no objetivo final. Então, as prioridades podem ser recalculadas, mudando ou não os julgamentos iniciais.

Finalmente, para medir a prioridade dos diversos níveis de elementos, deve-se multiplicar os pesos dos elementos de um nível com todos os elementos no nível abaixo. Isto é feito pelo Princípio da Composição da Hierarquia.

4.2.2.1 – Princípio da Composição da Hierarquia

Os elementos de um nível hierárquico são comparados, em termos relativos, de acordo com a sua importância ou contribuição, para um dado critério, que ocupa o nível, imediatamente acima dos elementos que estão sendo comparados. Este processo de comparação fornece uma escala relativa de medidas de prioridade ou peso dos elementos. A escala mede a posição relativa dos elementos com respeito ao critério independente de qualquer outro critério ou elemento que pode ser considerado para a comparação. A soma desses pesos relativos é um. As comparações são feitas pelos elementos de um nível, com respeito a todos os elementos do nível acima. Os pesos finais ou globais dos elementos do nível inferior da hierarquia são obtidos pela soma de todas as contribuições dos elementos num nível com respeito a todos os elementos no nível acima.

Após ter sido estruturado o problema em forma de hierarquia, e os julgamentos terem sido efetuados, o passo seguinte consiste em calcular o vetor prioridade da matriz dada. A matriz será calculada através do método de autovetor e autovalor.

4.2.2.2 – Método do Autovetor e Autovalor

Devido à sua complexidade, problemas de autovetor e autovalor, só são possíveis de serem resolvidos, de forma geral, por meio de matemática computacional. Dada uma matriz quadrada A de ordem n , com $a_{ij} \in \mathfrak{R}$, um autovalor, ou valor característico de A , é qualquer constante $\lambda \in C$, que satisfaz a equação $Aw = \lambda w$, denominada de equação característica, onde w é um vetor coluna de ordem n , denominado auto-vetor (ou vetor característico) de A .

Da equação matricial $Aw = \lambda w$, resulta que: $(A - \lambda I)X = 0$, que é um sistema de equações lineares quadrada. Para que este sistema tenha solução não-trivial, terá que ocorrer: $\det(A - \lambda I) = 0$, resultando após a aplicação da determinante numa equação polinomial de grau n $p(\lambda) = 0$, denominada de equação característica (ou de

polinômio característico) da matriz A . As raízes do polinômio característico são justamente os autovalores de A .

SAATY (1991), apresenta quatro métodos simplificados para a determinação do autovetor e autovalor:

➤ Método 1

No primeiro método, isto é feito multiplicando-se os n elementos em cada linha e tomando-se a raiz n -ésima. A seguir, normaliza-se a coluna dividindo-se cada número da matriz pela soma de todos os números.

➤ Método 2

No segundo, dividem-se os elementos de cada coluna pela soma daquela coluna e, então se somam os elementos em cada linha resultante e divide-se esta soma pelo número de elementos na linha. Este é um processo para tirar a média das colunas normalizadas.

➤ Método 3

No terceiro método, toma-se a soma dos elementos em cada coluna e forma-se os recíprocos desta soma. Para normalizar-se de um modo que estes números dêem como soma a unidade, divide-se cada recíproco pela soma dos recíprocos.

➤ Método 4

O quarto método, e mais grosseiro, é feito somando-se os elementos em cada linha. Normaliza-se o resultado, dividindo-se cada soma pelo total de todas as somas, de modo que os resultados somados dêem a unidade. O primeiro valor do vetor resultante é a prioridade da primeira atividade; o segundo, a prioridade da segunda atividade; e assim por diante.

Apesar de não serem métodos exatos, pode ser obtida uma boa estimativa das prioridades. SCHMIDT (1995), através de um experimento feito com uma matriz de ordem 6, realizou 290 iterações e calculado o $\lambda_{máx}$, RC, IC, pelos quatro métodos chegou a seguinte conclusão:

- Se $RC = 0$, os quatro métodos apresentam o mesmo resultado.
- Se $0 \leq RC \leq 10\%$, os resultados demonstram que os métodos 1 e 2 são aproximadamente equivalentes, isto é, apresentam um comportamento

bastante semelhante, o que se concluiria que tanto faz utilizar o primeiro ou o segundo método. Já o terceiro e o quarto método apresentam RC variáveis, demonstram correlação significativa, isto é, sempre apresentam valores significativamente maiores.

4.3 – Vantagens e Limitações da Metodologia

As duas grandes vantagens que o AHP tem sobre outros métodos multicritérios, é a facilidade de uso e a habilidade de manusear com julgamentos inconsistentes. Os julgamentos das pessoas que atuam unilateralmente, raramente são consistentes.

As vantagens das hierarquias apresentadas por SAATY (1991), são basicamente as seguintes:

- A representação hierárquica de um sistema pode ser usada para descrever como as mudanças em prioridades nos níveis mais altos, afetam a prioridade dos níveis mais baixos;
- Ajudar a todos os envolvidos no processo decisório a entender o problema da mesma forma. Ao mesmo tempo, permitir visualizar os inter-relacionamentos dos fatores de nível mais baixo;
- O desenvolvimento dos sistemas naturais montados hierarquicamente é muito mais eficiente do que os montados de forma geral;
- As hierarquias são estáveis, pois pequenas modificações têm efeitos pequenos e flexíveis. Adições a uma hierarquia bem estruturada não perturbam o desempenho.

Porém possui as seguintes limitações:

- Uma análise cuidadosa deve ser desenvolvida para identificar e caracterizar as propriedades dos níveis da hierarquia, que afetam o desempenho do objetivo mais alto;
- A priorização dos níveis mais altos da hierarquia deve ser feita com muito cuidado, por ser justamente aí que o consenso se faz extremamente necessário, pois estas prioridades dirigirão o resto da hierarquia;
- Em cada nível, deve ser assegurado que os critérios representados são independentes ou, no mínimo, suficientemente diferentes;

- Os indivíduos envolvidos não devem levar idealismo demais e forte predisposição para liderança e ordem, ao unirem-se a qualquer processo de interação de grupo;
- Requer procedimento para estruturar o questionário de perguntas e preferências;
- Aumentando o número de alternativas, aumenta sensivelmente o trabalho computacional, segundo SOARES DE MELLO et al (2003) os algoritmos utilizados para determinar os autovalores são de complexidade não polinomial (NP);
- Grande quantidade de pares de comparação por parte dos decisores para analisar critérios e alternativas pode ser enfadonho para este ator, gerando inconsistências na matriz de julgamento e falta de comprometimento para com o modelo a ser desenvolvido;

GOMES (2003), faz um levantamento das críticas da metodologia que surgiram na literatura desde a década de 80 em seis tópicos:

- **Conversão da escala verbal para numérica** – Decisores usando o método verbal de comparação terão seus julgamentos automaticamente convertidos para uma escala numérica, mas a correspondência entre as duas escalas é baseada em pressupostos não testados. Por exemplo, se A é julgada fracamente mais importante que B, o AHP assumirá que A é considerado três vezes mais importante, mas este pode não ser o caso. Muitos autores têm argumentado que um fator de multiplicação de 5 é muito alto para expressar a noção de preferência forte.
- **Inconsistências impostas pela escala de 1 a 9** – Em alguns problemas a restrição de comparações par a par sobre uma escala de 1 a 9 força o agente de decisão a cometer inconsistências. Por exemplo, se A é considerado 5 vezes mais importante que B e B é 5 vezes mais importante que C, então para ser consistente A deveria ser 25 vezes mais importante que C, mas isto não é possível.
- **Significado das respostas às questões** – Os pesos são obtidos sem referência às escalas nas quais os atributos são medidos, podendo significar que as questões são interpretadas de modos diferentes, e possivelmente errados, pelos decisores. Lootsma (1990) observou a dificuldade que os atores do processo decisório encontram para escolher uma dentre as qualificações verbais para expressar suas preferências por

uma entre duas alternativas, principalmente quando suas performances são expressas em valores físicos ou monetários.

- **Novas alternativas ou retirada das alternativas existentes podem reverter o ranking das alternativas existentes** – é controvertido entre os pesquisadores considerar esta característica uma desvantagem ou vantagem. Belton e Gear (1982), Dyer e Ravinder (1983), Lootsma (1990) são alguns representantes que consideram este fato uma desvantagem para metodologia; em contraposição temos Saaty e Vargas (1984). SAATY (1996) comenta sobre este assunto no título “The Fallacy of Rank Preservation”, onde considera que é legítima a reversão de ranking, e, portanto uma virtude do AHP. Dyer (1990) propôs uma solução para e ele cita um exemplo onde ocorre o referido problema: deseja-se selecionar um local para instalação de um escritório de vendas, segundo os pressupostos do caso, os pesos obtidos pelo método fornecem a seguinte ordem de preferência: 1° “A”, 2° “B” e 3° “C”. Entretanto, quando há inclusão de um novo local “D”, mesmo que se mantenha a importância relativa dos atributos, a nova análise fornece a seguinte ordem: 1° “B”, 2° “A”, 3° “D” e 4° “C”, havendo, portanto, a reversão do ranking entre “A” e “B”.
- **O número de comparações requeridas pode ser grande** – Enquanto que a redundância existente dentro do AHP é uma vantagem, ela também pode requerer um grande número de julgamentos pelo agente de decisão. Por exemplo, um problema com 7 alternativas e 7 atributos vai requerer 168 comparações par a par, o que pode dificultar a aplicação do método.
- **Os axiomas do método** – Dyer (1990) argumentou que os axiomas do AHP não são fundamentados em descrições do comportamento racional passíveis de teste, o que foi alvo de resposta por parte de VARGAS (1987).