

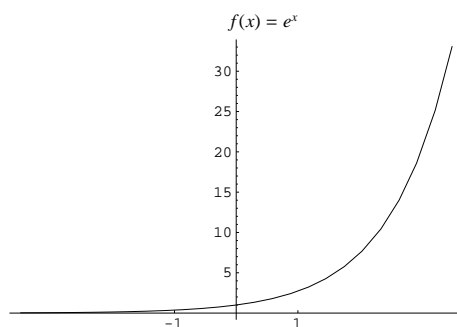
FUNCIONES ELEMENTALES

1. Función exponencial

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$$

Propiedades de la función exponencial:

- a) f es continua en \mathbb{R} .
- b) f es derivable en \mathbb{R} y $f'(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$.
- c) f es biyectiva de \mathbb{R} en \mathbb{R}^+ y estrictamente creciente.
- d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.
- e) $f(0) = e^0 = 1$.
- f) $f(x + y) = f(x)f(y)$ ($e^{x+y} = e^x e^y$)



2. Función logarítmica

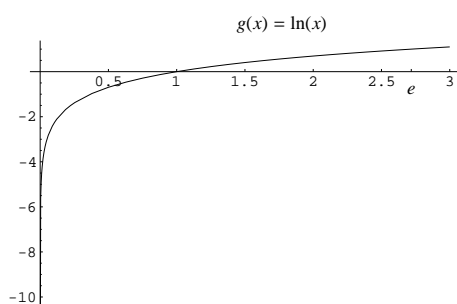
La función logarítmica es la inversa de la función exponencial.

$$g = f^{-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

g verifica que $e^{g(y)} = y, \forall y \in \mathbb{R}^+$ y $g(e^x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Se suele utilizar la notación $g(y) = \ln y, \forall y \in \mathbb{R}^+$ (logaritmo neperiano de y).

Tiene las siguientes propiedades:

- a) g es continua en \mathbb{R}^+ .
- b) g es derivable en \mathbb{R}^+ y $g'(x) = \frac{1}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$.
- c) g es biyectiva de \mathbb{R}^+ en \mathbb{R} y estrictamente creciente.
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.
- e) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$.
- f) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$.
- g) $\ln(x^y) = y \ln(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $y \in \mathbb{R}$.
- h) $\ln 1 = 0$, $\ln(e) = 1$.



Haciendo uso de la siguiente fórmula se deducen las demás funciones elementales, excepto las trigonométricas

$$a^b = e^{\ln(a^b)} = e^{b \ln a}, \quad \forall a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}$$

3. Función exponencial de base a ($a \in \mathbb{R}^+$)

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = a^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

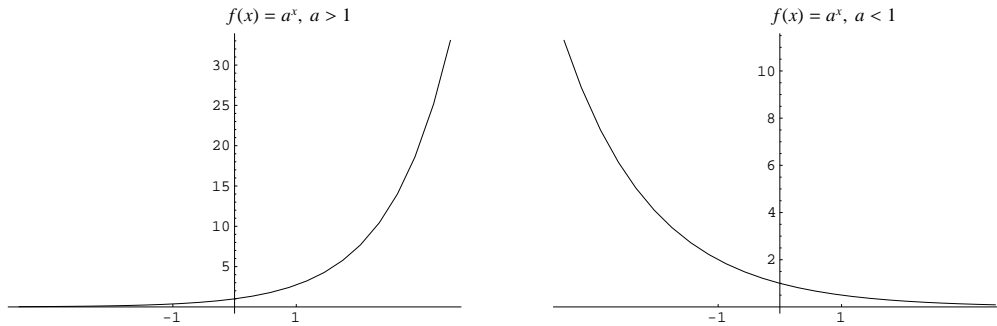
A continuación supongamos que $a \neq 1$.

- a) f es biyectiva de \mathbb{R} en \mathbb{R}^+ , continua y verifica $a^{x+y} = a^x a^y$.
- b) f es derivable en \mathbb{R} y $f'(x) = a^x \ln a$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- c) Si $a > 1$, f es estrictamente creciente y verifica

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty.$$

d) Si $a < 1$, f es estrictamente decreciente y verifica

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0.$$



4. Función potencial de exponente b ($b \neq 0$)

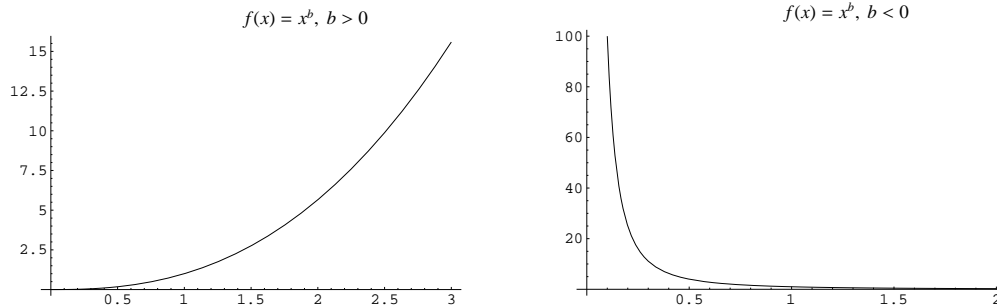
$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ definida por } f(x) = x^b = e^{b \ln x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

- a) f es biyectiva de \mathbb{R}^+ en \mathbb{R}^+ , continua y verifica $(xy)^b = x^b y^b$.
- b) f es derivable y $f'(x) = b x^{b-1}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$.
- c) Si $b > 0$, f es estrictamente creciente y verifica

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^b = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^b = +\infty.$$

d) Si $b < 0$, f es estrictamente decreciente y verifica

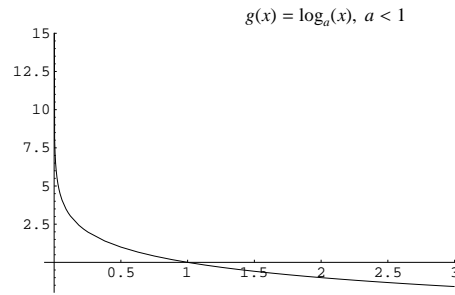
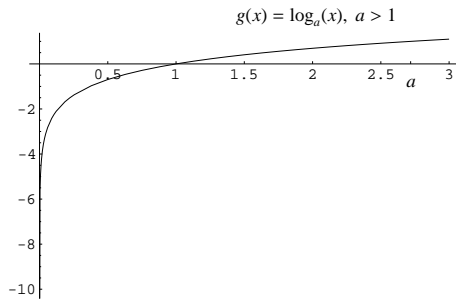
$$\lim_{x \rightarrow 0} x^b = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^b = 0.$$



5. **Función logarítmica de base a** ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$$g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Tiene las siguientes propiedades:



- a) g es biyectiva de \mathbb{R}^+ en \mathbb{R} y continua. Además g es la inversa de la función exponencial de base a . Verifica también que

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

$$\log_a(x^y) = y \log_a(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}.$$

- b) g es derivable en \mathbb{R}^+ con $g'(x) = \frac{1}{x \ln a}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$.
 c) Si $a > 1$, g es estrictamente creciente y

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = -\infty, \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty.$$

- d) Si $a < 1$, g es estrictamente decreciente y

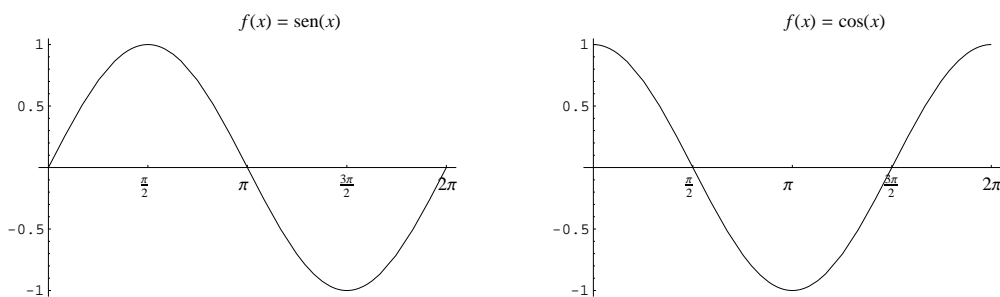
$$\lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = +\infty, \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty.$$

6. **Funciones seno y coseno**

$$\text{sen} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{cos} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

verifican:

- a) Ambas funciones son continuas en todo \mathbb{R} .



- b) $\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen } x$, $\text{cos}(x + 2\pi) = \text{cos } x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (son periódicas de periodo 2π).
- c) $\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (fórmula fundamental de trigonometría)
- d) $\text{cos} : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ es una biyección estrictamente decreciente con $\text{cos } 0 = 1$, $\text{cos } \frac{\pi}{2} = 0$, $\text{cos } \pi = -1$.
- e) $\text{sen} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ es una biyección estrictamente creciente con $\text{sen}(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\text{sen} 0 = 0$, $\text{sen}(\frac{\pi}{2}) = 1$.
- f) La imagen, tanto de la función seno como de la función coseno, es el intervalo $[-1, 1]$.
- g) $\text{cos}(-x) = \text{cos } x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (coseno es una función par).
 $\text{sen}(-x) = -\text{sen } x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (seno es una función impar).
- h) $\text{cos}(x + \pi) = -\text{cos } x$, $\forall x \in \mathbb{R}$
 $\text{sen}(x + \pi) = -\text{sen } x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- i) Las funciones seno y coseno no tienen límite en $+\infty$ ni en $-\infty$.
- j) $\text{cos}(x + y) = \text{cos } x \text{cos } y - \text{sen } x \text{sen } y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$
 $\text{sen}(x + y) = \text{sen } x \text{cos } y + \text{cos } x \text{sen } y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$
 (Fórmulas de adición).
- k) Ambas funciones son derivables en todo \mathbb{R} con derivadas:

$$(\text{sen})'(x) = \text{cos } x \text{ , } (\text{cos})'(x) = -\text{sen}(x) \text{ , } \forall x \in \mathbb{R} .$$

7. Función tangente

Como se verifica que $\text{cos } x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, consideramos entonces el conjunto $A = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Se define así la función tangente

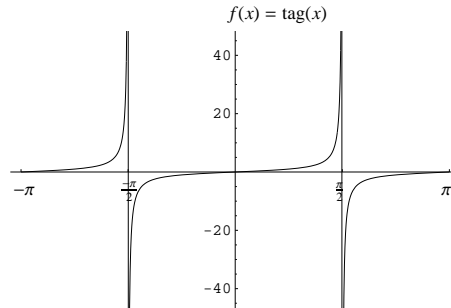
$$\text{tg} : A \rightarrow \mathbb{R} \text{ , } \text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x} \text{ , } \forall x \in A .$$

a) $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x, \forall x \in A.$

b) $\operatorname{tg} :] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, derivable y estrictamente creciente. Además verifica que

$$(\operatorname{tg})'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x) = 1 + \operatorname{tg}^2(x), \forall x \in A$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = -\infty, \operatorname{tg}(0) = 0, \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = +\infty$$



8. Funciones secante, cosecante y cotangente

Como se verifica que $\operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, se considera el conjunto $B = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Se definen entonces las funciones

$$\begin{aligned} \sec : A \rightarrow \mathbb{R}, \sec x &= \frac{1}{\cos x}, \forall x \in A \\ \operatorname{cosec} : B \rightarrow \mathbb{R}, \operatorname{cosec} x &= \frac{1}{\operatorname{sen} x}, \forall x \in B \\ \operatorname{cotg} : B \rightarrow \mathbb{R}, \operatorname{cotg} x &= \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \forall x \in B \end{aligned}$$

Todas las funciones definidas anteriormente son continuas y derivables en su dominio y sus derivadas son

$$\begin{aligned} (\sec)'(x) &= \operatorname{tg} x \sec x, \forall x \in A \\ (\operatorname{cosec})'(x) &= -\operatorname{cotg} x \operatorname{cosec} x, \forall x \in B \\ (\operatorname{cotg})'(x) &= \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x), \forall x \in B \end{aligned}$$

9. Función arcoseno

Esta función es la inversa de la restricción de la función seno al intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, y por tanto

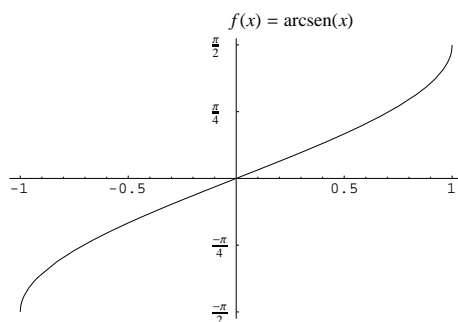
$$\arcsen : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

verificando que $\sen(\arcsen(x)) = x$, $\forall x \in [-1, 1]$. Es biyectiva, continua, y estrictamente creciente con

$$\arcsen(-1) = -\frac{\pi}{2}, \quad \arcsen(0) = 0, \quad \arcsen(1) = \frac{\pi}{2}$$

Es derivable en el intervalo abierto $] - 1, 1[$ con derivada

$$(\arcsen)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in] - 1, 1[$$



10. Función arcocoseno

Es la función inversa de la restricción de la función coseno al intervalo $[0, \pi]$, y por tanto

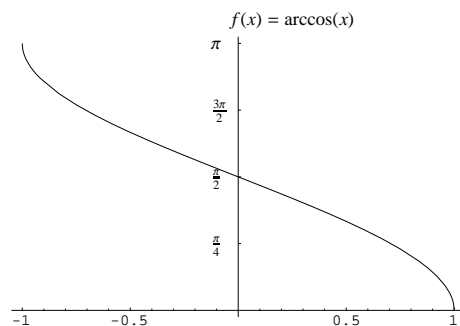
$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

verificando que $\cos(\arccos(x)) = x$, $\forall x \in [-1, 1]$. Esta función es biyectiva, continua y estrictamente decreciente con

$$\arccos(-1) = \pi, \quad \arccos(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \arccos(1) = 0$$

Es derivable en el intervalo abierto $] - 1, 1[$ con derivada

$$(\arccos)'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in] - 1, 1[$$



11. Función arcotangente

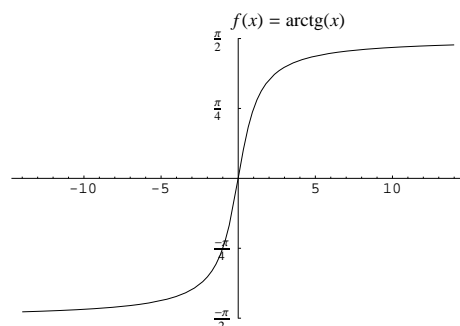
Es la inversa de la restricción de la función tangente al intervalo $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$; y por tanto

$$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

verificando que $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x)) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Esta función es biyectiva, continua, derivable y estrictamente creciente con

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{arctg} 0 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$$

$$(\operatorname{arctg})'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



Identidades trigonométricas

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2(x) + \operatorname{cos}^2(x) = 1$$

$$\operatorname{tg}^2(x) + 1 = \operatorname{sec}^2(x)$$

$$\operatorname{cotg}^2(x) + 1 = \operatorname{cosec}^2(x)$$

Suma y diferencia de ángulos

$$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \operatorname{cos} y \pm \operatorname{cos} x \operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{cos}(x \pm y) = \operatorname{cos} x \operatorname{cos} y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

Angulo doble

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x$$

$$\operatorname{cos} 2x = 2 \operatorname{cos}^2 x - 1 = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x$$

Angulo mitad

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \operatorname{cos} 2x)$$

$$\operatorname{cos}^2 x = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{cos} 2x)$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1 - \operatorname{cos} x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{cos} x}$$

Producto

$$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}[\operatorname{cos}(x - y) - \operatorname{cos}(x + y)]$$

$$\operatorname{cos} x \operatorname{cos} y = \frac{1}{2}[\operatorname{cos}(x - y) + \operatorname{cos}(x + y)]$$

$$\operatorname{sen} x \operatorname{cos} y = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y)]$$

12. Funciones hiperbólicas

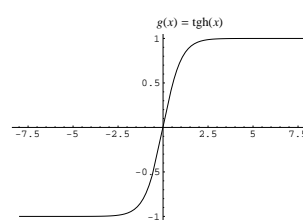
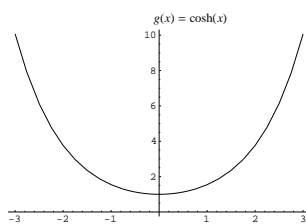
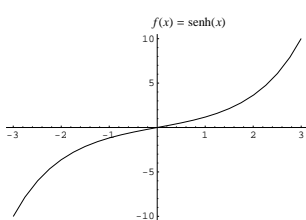
Se definen $\sinh, \cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Es claro de la definición que ambas funciones son continuas y derivables con

$$\sinh'(x) = \cosh(x) \quad \text{y} \quad \cosh'(x) = \sinh(x)$$

Por analogía con las funciones trigonométricas hablaremos de tangente hiperbólica, secante y cosecante hiperbólica.



Identidades hiperbólicas

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$\operatorname{tgh}^2(x) + \operatorname{sech}^2(x) = 1$$

$$\operatorname{cotgh}^2(x) - \operatorname{cosech}^2(x) = 1$$

$$\sinh(x + y) = \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y)$$

$$\sinh(x - y) = \sinh(x) \cosh(y) - \cosh(x) \sinh(y)$$

$$\cosh(x + y) = \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y)$$

$$\cosh(x - y) = \cosh(x) \cosh(y) - \sinh(x) \sinh(y)$$

$$\sinh^2(x) = \frac{-1 + \cosh(2x)}{2}$$

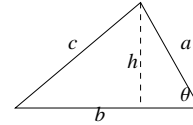
$$\cosh^2(x) = \frac{1 + \cosh(2x)}{2}$$

Fórmulas de geometría

Triángulo $h = a \operatorname{sen} \theta$

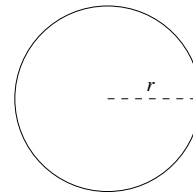
$$\text{Area} = \frac{1}{2}bh$$

$$\text{(Teorema del coseno)} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$



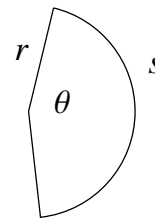
Círculo $\text{Area} = \pi r^2$

$$\text{Longitud de la circunferencia} = 2\pi r$$



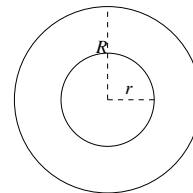
Sector circular (θ en radianes) $\text{Area} = \frac{\theta r^2}{2}$

$$s = r\theta$$



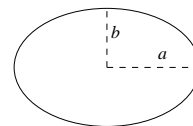
Anillo circular $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$

$$\text{Area} = \pi(R^2 - r^2)$$



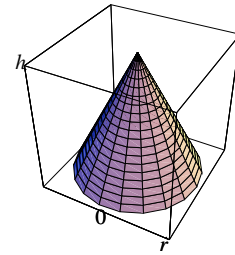
Elipse $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$

$$\text{Area} = \pi ab$$



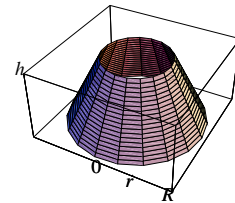
Cono circular recto Volumen = $\frac{\pi r^2 h}{3}$

Area de la superficie lateral = $\pi r \sqrt{r^2 + h^2}$



Tronco de cono circular recto Volumen = $\frac{\pi(r^2 + rR + R^2)h}{3}$

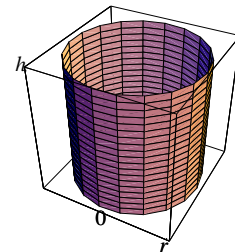
Area de la superficie lateral = $\pi s(R + r)$



Cilindro circular recto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = r^2, 0 \leq z \leq h\}$

Volumen = $\pi r^2 h$

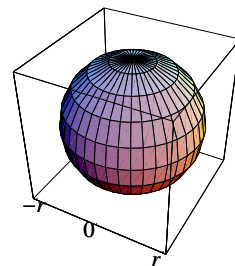
Area de la superficie lateral = $2\pi r h$



Esfera $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$

Volumen = $\frac{4}{3}\pi r^3$

Area = $4\pi r^2$



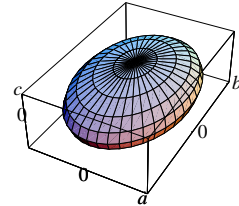
Superficies cuadráticas

Elipsoide $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$

Secciones paralelas al plano xy : Elipses.

Secciones paralelas al plano xz : Elipses.

Secciones paralelas al plano yz : Elipses.

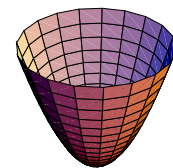


Paraboloide elíptico $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}\}$

Secciones paralelas al plano xy : Elipses.

Secciones paralelas al plano xz : Parábolas.

Secciones paralelas al plano yz : Parábolas.

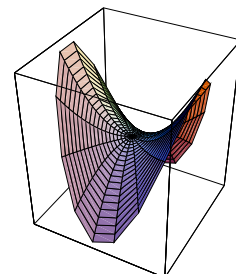


Paraboloide hiperbólico $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}\}$

Secciones paralelas al plano xy : Hipérbolas.

Secciones paralelas al plano xz : Parábolas.

Secciones paralelas al plano yz : Parábolas.

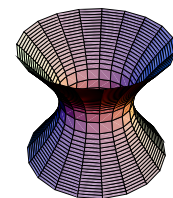


Hiperboloide de una hoja $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\}$

Secciones paralelas al plano xy : Elipses.

Secciones paralelas al plano xz : Hipérbolas.

Secciones paralelas al plano yz : Hipérbolas.

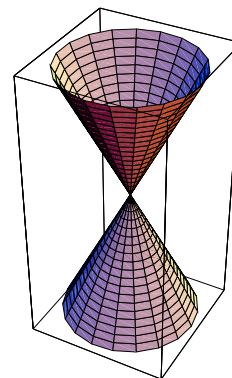


Cono elíptico $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0\}$

Secciones paralelas al plano xy : Elipses.

Secciones paralelas al plano xz : Hipérbolas.

Secciones paralelas al plano yz : Hipérbolas.



Hiperboloide de dos hojas $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1\}$

Secciones paralelas al plano xy : Elipses.

Secciones paralelas al plano xz : Hipérbolas.

Secciones paralelas al plano yz : Hipérbolas.

