

Cálculo diferencial

Introducción

Cuando surgen cuestiones concernientes a la razón entre dos cantidades variables, entramos en los dominios del Cálculo Diferencial. Son por tanto objeto de estudio del cálculo diferencial temas como la velocidad (razón entre la distancia recorrida y el tiempo empleado en recorrerla) de una partícula en un momento determinado, la pendiente (razón entre la diferencia de las ordenadas y las abscisas de dos puntos en el plano cartesiano) de la recta tangente a una gráfica en un punto dado de ésta, etc.

Incrementos: cuando una cantidad variable pasa de un valor inicial a otro valor, se dice que ha tenido un incremento. Para calcular este incremento basta con hallar la diferencia entre el valor final y el inicial. Para denotar esta diferencia se utiliza el símbolo Δx , que se lee "delta x". El incremento puede ser positivo o negativo, dependiendo de si la variable aumenta o disminuye al pasar de un valor a otro. Por ejemplo, si el valor inicial de una variable x , x_1 , es igual a 3, y el valor final x_2 es igual a 7, el incremento $\Delta x = x_2 - x_1 = 7 - 3 = 4$: la variable se ha incrementado positivamente en 4 unidades. En cambio, si el valor inicial es 7 y el valor final 3, $\Delta x = x_2 - x_1 = 3 - 7 = -4$: la variable ha tenido un incremento negativo (*decremento*) de 4 unidades.

Derivada de una función: Sea f una función definida en todo número de algún intervalo I , la derivada de f es aquella función, denotada por f' , tal que su valor en cualquier número x de I , está dado por:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{si el límite existe.}$$

Se dice que una función es diferenciable o derivable cuando es posible hallar su derivada.

♣ Los símbolos utilizados para denotar la derivada de una función $y = f(x)$ son:

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d}{dx} f(x), D_x y, D_x f(x), f'(x)$$

Ejercicios resueltos		
En los ejercicios 1 a 12 halle la derivada de la función dada aplicando la definición de derivada		
1. $f(x) = -4$	2. $f(x) = 3x$	3. $f(x) = 7x + 3$
4. $f(x) = 4 - 2x^2$	5. $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$	6. $f(x) = x^3$
7. $f(x) = \sqrt{x}$	8. $f(x) = \frac{1}{x+1}$	9. $f(x) = \frac{2x+3}{3x-2}$
10. $f(x) = \sqrt{3x+5}$	11. $f(x) = \frac{1}{x^2} - x$	12. $f(x) = \frac{3}{1+x^2}$

Soluciones

1. $f(x) = -4$

Solución:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$
$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-4 - (-4)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-4 + 4}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0;$$

$\therefore f'(x) = 0.$

2. $f(x) = 3x$

Solución:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$
$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3(x + \Delta x) - 3x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x + 3\Delta x - 3x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 3;$$

$\therefore f'(x) = 3.$

3. $f(x) = 7x + 3$

Solución:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$
$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{7(x + \Delta x) + 3 - (7x + 3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{7x + 7\Delta x + 3 - 7x - 3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{7\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 7;$$

$\therefore f'(x) = 7.$

4. $f(x) = 4 - 2x^2$

Solución:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$
$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4 - 2(x + \Delta x)^2 - (4 - 2x^2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4 - 2x^2 - 4x(\Delta x) - 2(\Delta x)^2 - 4 + 2x^2}{\Delta x},$$
$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-4x(\Delta x) - 2(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(-4x - 2\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-4x - 2\Delta x) = -4x - 2(0);$$

$\therefore f'(x) = -4x.$

5. $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

Solución:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \\ \Rightarrow f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3(x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x) + 1 - (3x^2 - 2x + 1)}{\Delta x}, \\ \Rightarrow f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6x(\Delta x) + 3(\Delta x)^2 - 2x - 2\Delta x + 1 - 3x^2 + 2x - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{6x(\Delta x) + 3(\Delta x)^2 - 2\Delta x}{\Delta x}, \\ \Rightarrow f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(6x + 3\Delta x - 2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (6x + 3\Delta x - 2) = 6x + 3(0) - 2, \\ \therefore f'(x) &= 6x - 2. \end{aligned}$$

6. $f(x) = x^3$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \\ \Rightarrow f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}, \\ \Rightarrow f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2(\Delta x) + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x^2(\Delta x) + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x}, \\ \Rightarrow f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2) = 3x^2 + 3x(0) + (0)^2; \\ \therefore f'(x) &= 3x^2. \end{aligned}$$

7. $f(x) = \sqrt{x}$

Solución:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \\ \Rightarrow f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}, \\ \Rightarrow f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x + 0} + \sqrt{x}}; \\ \therefore f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

8. $f(x) = \frac{1}{x+1}$

Solución:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \\ \Rightarrow f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x + \Delta x + 1} - \frac{1}{x + 1}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + 1 - x - \Delta x - 1}{\Delta x(x + \Delta x + 1)(x + 1)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x(x + \Delta x + 1)(x + 1)}, \\ \Rightarrow f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{(x + \Delta x + 1)(x + 1)} = \frac{-1}{(x + 0 + 1)(x + 1)} = \frac{-1}{(x + 1)(x + 1)}; \\ \therefore f'(x) &= \frac{-1}{(x + 1)^2}.\end{aligned}$$

9. $f(x) = \frac{2x + 3}{3x - 2}$

Solución:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \\ \Rightarrow f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{2(x + \Delta x) + 3}{3(x + \Delta x) - 2} - \frac{2x + 3}{3x - 2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x + 2\Delta x + 3}{3x + 3\Delta x - 2} - \frac{2x + 3}{3x - 2}}{\Delta x}, \\ \Rightarrow f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(3x - 2)(2x + 2\Delta x + 3) - (2x + 3)(3x + 3\Delta x - 2)}{\Delta x(3x - 2)(3x + 3\Delta x - 2)}, \\ \Rightarrow f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{6x^2 + 6x(\Delta x) + 9x - 4x - 4\Delta x - 6 - 6x^2 - 6x(\Delta x) + 4x - 9x - 9\Delta x + 6}{\Delta x(3x - 2)(3x + 3\Delta x - 2)}, \\ \Rightarrow f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-13\Delta x}{\Delta x(3x - 2)(3x + 3\Delta x - 2)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-13}{(3x - 2)(3x + 3\Delta x - 2)}, \\ \Rightarrow f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-13}{(3x - 2)(3x + 3(0) - 2)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-13}{(3x - 2)(3x - 2)}; \\ \therefore f'(x) &= -\frac{13}{(3x - 2)^2}.\end{aligned}$$

10. $f(x) = \sqrt{3x + 5}$

Solución:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \\ \Rightarrow f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3(x + \Delta x) + 5} - \sqrt{3x + 5}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x + 3\Delta x + 5} - \sqrt{3x + 5}}{\Delta x}, \\ \Rightarrow f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{3x + 3\Delta x + 5} - \sqrt{3x + 5})(\sqrt{3x + 3\Delta x + 5} + \sqrt{3x + 5})}{\Delta x(\sqrt{3x + 3\Delta x + 5} + \sqrt{3x + 5})}, \\ \Rightarrow f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x + 3\Delta x + 5 - (3x + 5)}{\Delta x(\sqrt{3x + 3\Delta x + 5} + \sqrt{3x + 5})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x + 3\Delta x + 5 - 3x - 5}{\Delta x(\sqrt{3x + 3\Delta x + 5} + \sqrt{3x + 5})}, \\ \Rightarrow f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3\Delta x}{\Delta x(\sqrt{3x + 3\Delta x + 5} + \sqrt{3x + 5})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3}{\sqrt{3x + 3\Delta x + 5} + \sqrt{3x + 5}}, \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{3}{\sqrt{3x + 3(0) + 5} + \sqrt{3x + 5}} = \frac{3}{\sqrt{3x + 5} + \sqrt{3x + 5}}; \\ \therefore f'(x) &= \frac{3}{2\sqrt{3x + 5}}.\end{aligned}$$

11. $f(x) = \frac{1}{x^2} - x$

Solución:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \\ \Rightarrow f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(x + \Delta x)^2} - (x + \Delta x) - \left(\frac{1}{x^2} - x\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(x + \Delta x)^2} - x - \Delta x - \frac{1}{x^2} + x}{\Delta x}, \\ \Rightarrow f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(x + \Delta x)^2} - \Delta x - \frac{1}{x^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \Delta x(x^2)(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x)^2}{\Delta x(x + \Delta x)^2 x^2}, \\ \Rightarrow f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \Delta x(x^2)(x + \Delta x)^2 - x^2 - 2x(\Delta x) - (\Delta x)^2}{\Delta x(x + \Delta x)^2 x^2}, \\ \Rightarrow f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x(x^2)(x + \Delta x)^2 - 2x(\Delta x) - (\Delta x)^2}{\Delta x(x + \Delta x)^2 x^2}, \\ \Rightarrow f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(-x^2(x + \Delta x)^2 - 2x - \Delta x)}{\Delta x(x + \Delta x)^2 x^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-x^2(x + \Delta x)^2 - 2x - \Delta x}{(x + \Delta x)^2 x^2}, \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{-x^2(x + 0)^2 - 2x - 0}{(x + 0)^2 x^2} = \frac{-x^2(x)^2 - 2x}{(x)^2 x^2} = \frac{-x^4 - 2x}{x^4}; \\ \therefore f'(x) &= -\frac{x^3 + 2}{x^3}.\end{aligned}$$

$$12. f(x) = \frac{3}{1+x^2}$$

Solución:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \\ \Rightarrow f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{1+(x+\Delta x)^2} - \frac{3}{1+x^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3(1+x^2) - 3(1+(x+\Delta x)^2)}{\Delta x(1+(x+\Delta x)^2)(1+x^2)}, \\ \Rightarrow f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3+3x^2-3-3x^2-6x\Delta x-3(\Delta x)^2}{\Delta x(1+(x+\Delta x)^2)(1+x^2)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-6x\Delta x-3(\Delta x)^2}{\Delta x(1+(x+\Delta x)^2)(1+x^2)}, \\ \Rightarrow f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(-6x-3\Delta x)}{\Delta x(1+(x+\Delta x)^2)(1+x^2)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-6x-3\Delta x}{(1+(x+\Delta x)^2)(1+x^2)}, \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{-6x-3(0)}{(1+(x+0)^2)(1+x^2)} = \frac{-6x-0}{(1+x^2)(1+x^2)}, \\ \therefore f'(x) &= -\frac{6x}{(1+x^2)^2}. \end{aligned}$$

Interpretación geométrica

- Geométricamente la derivada de una función f en un punto se interpreta como el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en dicho punto.

Ejercicios resueltos

En los ejercicios 1 a 3, encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto (x_1, y_1) . Elabore una tabla de valores de x , y , m en el intervalo $[a, b]$, e incluya en ella todos los puntos donde la gráfica tiene una pendiente horizontal. Trace la gráfica y muestre un segmento de la tangente en cada uno de los puntos localizados.

En los ejercicios 4 a 6, determine la pendiente de la tangente a la gráfica de la función f en el punto $(x_1, f(x_1))$. Elabore una tabla de valores de x , $f(x)$, m en diversos puntos de la gráfica e incluya en dicha tabla todos los puntos donde la gráfica tiene un tangente horizontal. Trace la gráfica de la función.

En los ejercicios 7 a 11, obtenga las ecuaciones de las rectas tangente y normal de la curva en el punto indicado. Trace una gráfica de la curva junto con la tangente y la normal.

1. $y = 9 - x^2$; $[a, b] = [-3, 3]$	2. $y = x^2 - 6x + 9$; $[a, b] = [1, 5]$	3. $y = x^3 + 1$; $[a, b] = [-2, 2]$
4. $y = \sqrt{4-x}$	5. $f(x) = 3x^2 - 12x + 8$.	6. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$.
7. $y = x^2 - 4x - 5$; $(-2, 7)$.	8. $y = \frac{1}{8}x^3$; $(4, 8)$.	9. $y = \frac{6}{x}$; $(3, 2)$.

10. $y = x^4 - 4x$; $(0, 0)$.

11. $y = -\frac{8}{\sqrt{x}}$; $(4, -4)$.

12. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x^2 + 3$ que sea paralela a la recta $8x - y + 3 = 0$.

13. Obtenga una ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2 - \frac{1}{3}x^2$ que sea perpendicular a la recta $x - y = 0$.

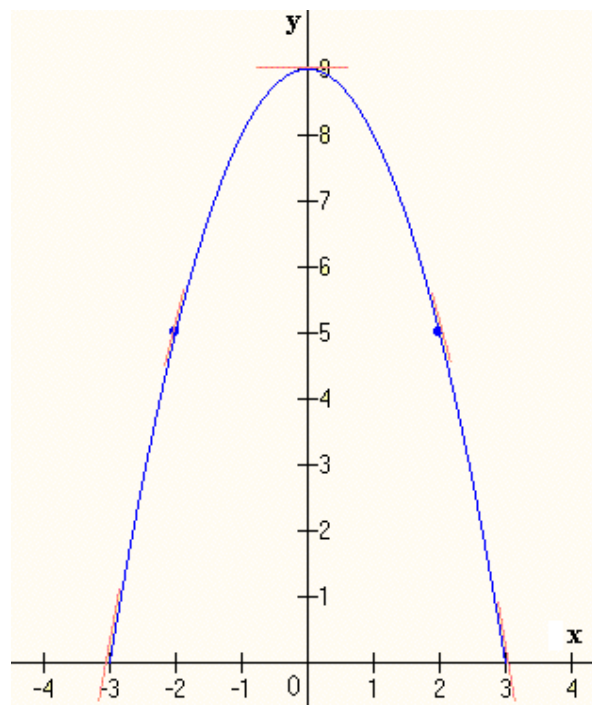
Soluciones

1. $y = 9 - x^2$; $[a, b] = [-3, 3]$

Solución:

$$\begin{aligned}
 m(x_1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}, \\
 \Rightarrow m(x_1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{9 - (x_1 + \Delta x)^2 - (9 - x_1^2)}{\Delta x}, \\
 \Rightarrow m(x_1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{9 - x_1^2 - 2x_1\Delta x - (\Delta x)^2 - 9 + x_1^2}{\Delta x}, \\
 \Rightarrow m(x_1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2x_1\Delta x - (\Delta x)^2}{\Delta x}, \\
 \Rightarrow m(x_1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(-2x_1 - \Delta x)}{\Delta x}, \\
 \Rightarrow m(x_1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-2x_1 - \Delta x) = -2x_1 - 0; \\
 \therefore m(x_1) &= -2x_1.
 \end{aligned}$$

x	y	m
-3	0	6
-2	5	4
-1	8	2
0	9	0
1	8	-2
2	5	-4
3	0	-6



2. $y = x^2 - 6x + 9$; $[a, b] = [1, 5]$

Solución:

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x},$$

$$\Rightarrow m(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_1 + \Delta x)^2 - 6(x_1 + \Delta x) + 9 - (x_1^2 - 6x_1 + 9)}{\Delta x},$$

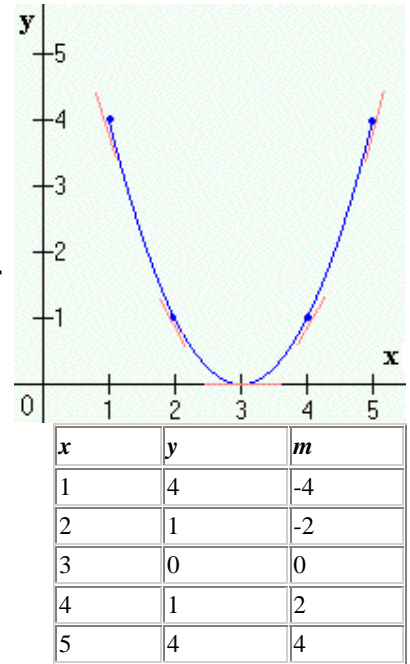
$$\Rightarrow m(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_1^2 + 2x_1(\Delta x) + (\Delta x)^2 - 6x_1 - 6\Delta x + 9 - x_1^2 + 6x_1 - 9}{\Delta x},$$

$$\Rightarrow m(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x_1(\Delta x) + (\Delta x)^2 - 6\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x_1 + \Delta x - 6)}{\Delta x},$$

$$\Rightarrow m(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_1 + \Delta x - 6) = 2x_1 + 0 - 6;$$

$$\therefore m(x_1) = 2x_1 - 6.$$

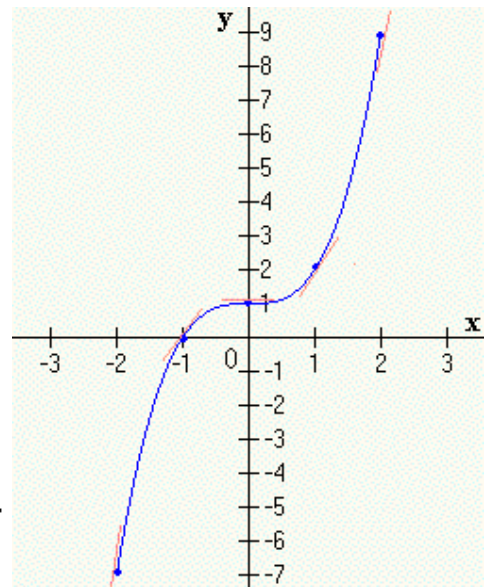
$$2x_1 - 6 = 0, \rightarrow x_1 = 3$$



3. $y = x^3 + 1$; $[a, b] = [-2, 2]$

Solución:

$$\begin{aligned}m(x_1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}, \\ \Rightarrow m(x_1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_1 + \Delta x)^3 + 1 - (x_1^3 + 1)}{\Delta x}, \\ \Rightarrow m(x_1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_1^3 + 3x_1^2(\Delta x) + 3x_1(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 1 - x_1^3 - 1}{\Delta x}, \\ \Rightarrow m(x_1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x_1^2(\Delta x) + 3x_1(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x}, \\ \Rightarrow m(x_1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(3x_1^2 + 3x_1(\Delta x) + (\Delta x)^2)}{\Delta x}, \\ \Rightarrow m(x_1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x_1^2 + 3x_1(\Delta x) + (\Delta x)^2) = 3x_1^2 + 3x_1(0) + (0)^2, \\ \therefore m(x_1) &= 3x_1^2. \\ 3x_1^2 &= 0, \rightarrow x_1 = 0\end{aligned}$$



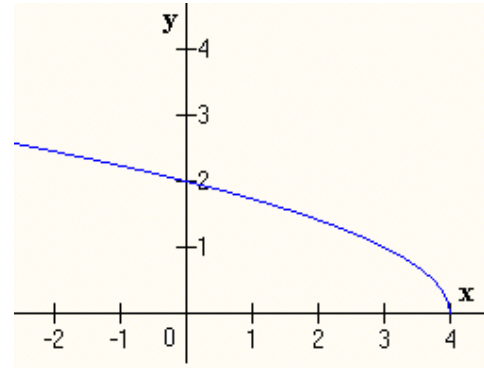
x	y	m
-2	-7	12
-1	0	3
0	1	0
1	2	3
2	9	12

4. $y = \sqrt{4 - x}$

Solución:

$$\begin{aligned}m(x_1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 - (x_1 + \Delta x)} - \sqrt{4 - x_1}}{\Delta x}, \\ \Rightarrow m(x_1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4 - (x_1 + \Delta x)} - \sqrt{4 - x_1})(\sqrt{4 - (x_1 + \Delta x)} + \sqrt{4 - x_1})}{\Delta x(\sqrt{4 - (x_1 + \Delta x)} + \sqrt{4 - x_1})}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow m(x_1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4 - (x_1 + \Delta x) - (4 - x_1)}{\Delta x (\sqrt{4 - (x_1 + \Delta x)} + \sqrt{4 - x_1})}, \\ \Rightarrow m(x_1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4 - x_1 - \Delta x - 4 + x_1}{\Delta x (\sqrt{4 - (x_1 + \Delta x)} + \sqrt{4 - x_1})}, \\ \Rightarrow m(x_1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x (\sqrt{4 - (x_1 + \Delta x)} + \sqrt{4 - x_1})}, \\ \Rightarrow m(x_1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{4 - (x_1 + \Delta x)} + \sqrt{4 - x_1}}, \\ \Rightarrow m(x_1) &= \frac{-1}{\sqrt{4 - (x_1 + 0)} + \sqrt{4 - x_1}}; \\ \therefore m(x_1) &= \frac{-1}{2\sqrt{4 - x_1}}. \\ m(x_1) &\neq 0. \end{aligned}$$



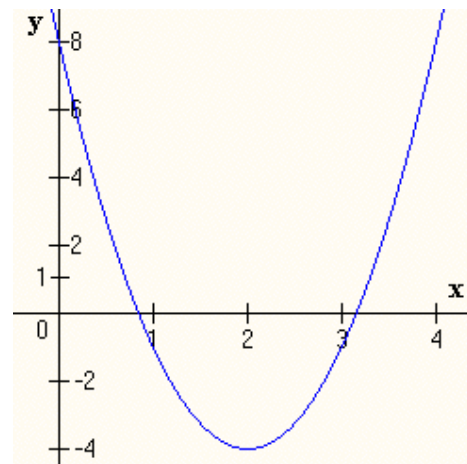
x	y	m
-5	3	-0.167
0	2	-0.25
3	1	-0.5
4	0	No existe

5. $f(x) = 3x^2 - 12x + 8$

Solución:

$$\begin{aligned} m(x_1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[3(x_1 + \Delta x)^2 - 12(x_1 + \Delta x) + 8] - (3x_1^2 - 12x_1 + 8)}{\Delta x}, \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x_1^2 + 6x_1\Delta x + 3\Delta x^2 - 12x_1 - 12\Delta x + 8 - 3x_1^2 + 12x_1 - 8}{\Delta x}, \\ \Rightarrow m(x_1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(6x_1 + 3\Delta x - 12)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (6x_1 + 3\Delta x - 12); \\ \therefore m(x_1) &= 6x_1 - 12. \quad m(x_1) = 0, \text{ cuando } x_1 = 2. \end{aligned}$$

x	y	m
0	8	-12
1	-1	-6
2	-4	0
3	-1	6
4	9	12



6. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

Solución:

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_1 + \Delta x)^3 - 6(x_1 + \Delta x)^2 + 9(x_1 + \Delta x) - 2 - (x_1^3 - 6x_1^2 + 9x_1 - 2)}{\Delta x},$$

$$\Rightarrow m(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_1^3 + 3x_1^2\Delta x + 3x_1\Delta x^2 + \Delta x^3 - 6x_1^2 - 12x_1\Delta x - 6\Delta x^2 + 9x_1 + 9\Delta x - 2 - x_1^3 - 6x_1^2 + 9x_1 - 2}{\Delta x},$$

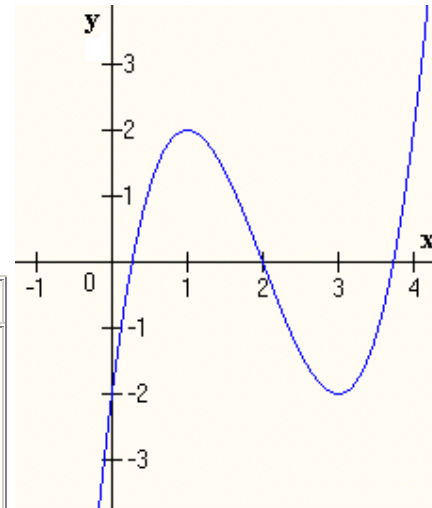
$$\Rightarrow m(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(3x_1^2 + 3x_1\Delta x + \Delta x^2 - 12x_1 - 6\Delta x + 9)}{\Delta x},$$

$$\Rightarrow m(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x_1^2 + 3x_1\Delta x + \Delta x^2 - 12x_1 - 6\Delta x + 9);$$

$$\therefore m(x_1) = 3x_1^2 - 12x_1 + 9.$$

$m(x_1) = 0$, cuando $x_1 = 1$ ó $x_1 = 3$.

x	y	m
0	-2	9
1	2	0
2	0	-3
3	-2	0
4	2	9



7. $f(x) = x^2 - 4x - 5$

Solución:

Sea

m_{tan} : pendiente de la tangente

m_n : pendiente de la normal

De tal manera que

$$m_n = -\frac{1}{m_{\text{tan}}} \quad (1)$$

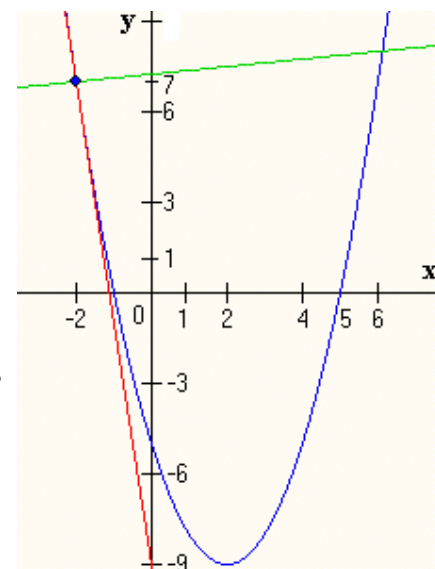
Ahora

$$m_{\text{tan}}(-2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(-2 + \Delta x)^2 - 4(-2 + \Delta x) - 5 - [(-2)^2 - 4(-2) - 5]}{\Delta x},$$

$$\Rightarrow m_{\text{tan}}(-2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4 - 4\Delta x + \Delta x^2 + 8 - 4\Delta x - 5 - 4 - 8 + 5}{\Delta x},$$

$$\Rightarrow m_{\text{tan}}(-2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(-8 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-8 + \Delta x) = -8 + 0;$$

$$\therefore m_{\text{tan}}(-2) = -8 \quad (2)$$



$$\therefore m_n = \frac{1}{8} \quad \text{\color{red}((2) en (1))} \quad (3)$$

La pendiente m de una recta está dada por $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$. Y las rectas pasan por el punto $(-2, 7)$;

de tal modo que:

$$m_{\text{tan}}(-2) = -8 = \frac{y-7}{x+2} \Leftrightarrow -8(x+2) = y-7;$$

$\therefore 8x + y + 9 = 0$: ecuación de la recta tangente

$$m_n = \frac{1}{8} = \frac{y-7}{x+2} \Leftrightarrow x+2 = 8(y-7);$$

$\therefore x - 8y + 58 = 0$: ecuación de la recta normal.

8. Solución:

Sea

m_{tan} : pendiente de la tangente

m_n : pendiente de la normal

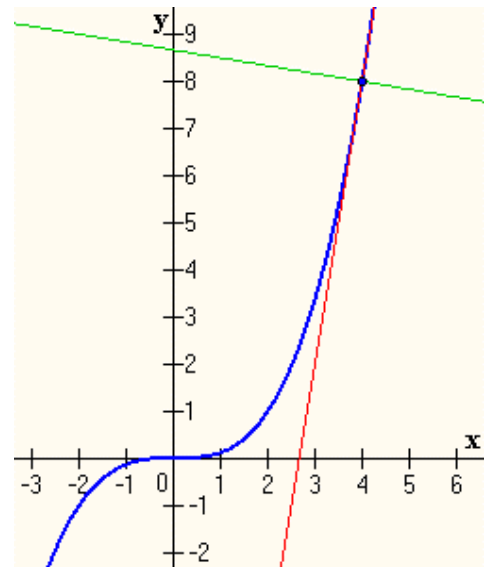
De tal manera que

$$m_n = -\frac{1}{m_{\text{tan}}} \quad (1)$$

Ahora

$$m_{\text{tan}}(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{8}(x_1 + \Delta x)^3 - \frac{1}{8}x_1^3}{\Delta x},$$

$$\Rightarrow m_{\text{tan}}(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{8}x_1^3 + \frac{3}{8}x_1^2\Delta x + \frac{3}{8}x_1\Delta x^2 + \frac{1}{8}\Delta x^3 - \frac{1}{8}x_1^3}{\Delta x},$$



$$\Rightarrow m_{\tan}(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \left(\frac{3}{8}x_1^2 + \frac{3}{8}x_1\Delta x + \frac{1}{8}\Delta x^2 \right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{8}x_1^2 + \frac{3}{8}x_1\Delta x + \frac{1}{8}\Delta x^2 \right),$$

$$\Rightarrow m_{\tan}(x_1) = \frac{3}{8}x_1^2;$$

$$\therefore m_{\tan}(4) = \frac{3}{8}(4)^2 = 6 \quad (2);$$

$$\therefore m_n = -\frac{1}{6} \quad \{(2) \text{ en } (1)\} \quad (3)$$

La pendiente m de una recta está dada por $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$. Y las rectas pasan por el punto $(4, 8)$;

de tal modo que:

$$m_{\tan}(4) = 6 = \frac{y - 8}{x - 4} \Leftrightarrow 6(x - 4) = y - 8$$

$\therefore 6x - y - 16 = 0$: ecuación de la recta tangente

$$m_n = -\frac{1}{6} = \frac{y - 8}{x - 4} \Leftrightarrow x - 4 = -6(y - 8);$$

$\therefore x + 6y - 52 = 0$: ecuación de la recta normal.

12. Solución:

$$8x - y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = 8x + 3: \text{ la pendiente de esta recta es } m = 8.$$

Como la recta que buscamos es paralela a la recta anterior, sus pendientes son iguales. Ahora:

$$m_{\tan}(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x_1 + \Delta x)^2 + 3 - (2x_1^2 + 3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x_1^2 + 4x_1\Delta x + 2\Delta x^2 + 3 - 2x_1^2 - 3}{\Delta x},$$

$$\Rightarrow m_{\tan}(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4x_1\Delta x + 2\Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(4x_1 + 2\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4x_1 + 2\Delta x) = 4x_1,$$

$$\Rightarrow m = 4x_1 = 8;$$

$$\therefore x_1 = 2 \quad (1)$$

$$y_1 = 2x_1^2 + 3 = 2(2)^2 + 3 = 11 \quad (2)$$

Hay que hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es igual a 8 y que pasa por el punto $(2, 11)$:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Leftrightarrow 8 = \frac{y - 11}{x - 2} \Leftrightarrow 8(x - 2) = y - 11 \Leftrightarrow 8x - 16 = y - 11;$$

$\therefore 8x - y - 5 = 0$: ecuación de la recta tangente buscada.

13. Solución:

$x - y = 0 \Leftrightarrow y = x$: la pendiente de esta recta es $m = 1$.

Como la recta cuya ecuación buscamos es perpendicular a esta recta, su pendiente es igual -1 . Ahora:

$$m_{\tan}(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 - \frac{1}{3}(x_1 + \Delta x)^2 - \left(2 - \frac{1}{3}x_1^2\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 - \frac{1}{3}x_1^2 - \frac{2}{3}x_1\Delta x - \frac{1}{3}\Delta x^2 - 2 + \frac{1}{3}x_1^2}{\Delta x},$$
$$\Rightarrow m_{\tan}(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\frac{2}{3}x_1\Delta x - \frac{1}{3}\Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \left(-\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}\Delta x\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}\Delta x = -\frac{2}{3}x_1,$$

$$\Rightarrow m = -\frac{2}{3}x_1 = -1;$$

$$\therefore x_1 = \frac{3}{2} \quad (1)$$

$$y_1 = 2 - \frac{1}{3}x_1^2 = 2 - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \quad (2)$$

Hay que hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es igual a -1 y que pasa por el punto $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right)$:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Leftrightarrow -1 = \frac{y - \frac{5}{4}}{x - \frac{3}{2}} \Leftrightarrow x - \frac{3}{2} = -y + \frac{5}{4} \Leftrightarrow 4x - 6 = -4y + 5;$$

$\therefore 4x + 4y - 11 = 0$: ecuación de la recta tangente buscada.

Diferenciabilidad y continuidad

Teorema a: si una función f es diferenciable en x_1 , entonces f es continua en x_1

Así como existen límites unilaterales también podemos hablar de derivadas unilaterales. A continuación se dan las definiciones de derivadas por la derecha y por la izquierda de una función en un punto determinado.

Derivada por la derecha: si f está definida en x_1 , la derivada por la derecha de x_1 se define como:

$$f'_{+}(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^{+}} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}, \text{ si el límite existe.}$$

Derivada por la izquierda: si f está definida en x_1 , la derivada por la izquierda de x_1 se define como:

$$f'_-(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}, \text{ si el límite existe.}$$

Una función definida en un intervalo abierto que contiene a x_1 es diferenciable en x_1 si y sólo si $f'_+(x_1)$ y $f'_-(x_1)$ existen y son iguales.

La continuidad de una función en un número no implica que la función sea derivable en dicho número; por ejemplo, la función valor absoluto es continua en 0 pero no es diferenciable en cero. Veamos:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Al aplicar los criterios de continuidad

para $x_1 = 0$, se tiene:

(i) $f(0) = |0| = 0$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x) = 0;$

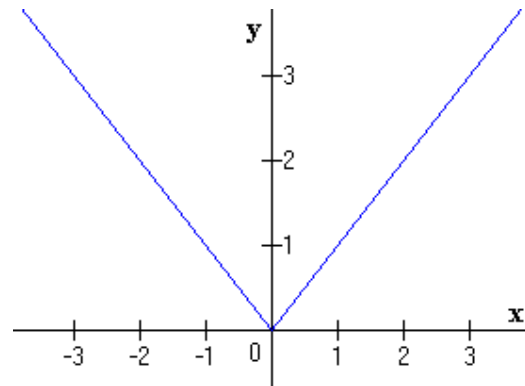
$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existe y es igual a 0

(iii) $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Por lo que f es continua en 0.

Sin embargo

$$\left. \begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1 \\ f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1) = 1 \end{aligned} \right\} f'(0) \text{ no existe}$$



En uno de los ejercicios (el número 6) resueltos que van a continuación se mostrará otro tipo de funciones que son continuas en algún número pero que no son diferenciables en el punto. Lo particular de dichas funciones es que tienen una recta vertical en dicho punto.

Resumidamente, podemos decir que una función no es diferenciable en un punto determinado por alguna de las tres razones siguientes:

1. La función es discontinua en el punto
2. La función es continua en el punto, pero por la gráfica de f no se puede trazar una recta tangente que pase por el punto (como en la gráfica de la función valor absoluto en 0)
3. La función es continua en el punto, y la gráfica tiene una recta tangente vertical que pasa por el punto.

Ejercicios resueltos

En los ejercicios 1 a 7, haga lo siguiente: (a) trace la gráfica de la función; (b) determine si f es continua en el punto dado; (c) calcule las derivadas por la derecha y por la izquierda, si existen; (d) determine si f es diferenciable en el punto dado

$$1. f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \leq -4 \\ -x-6 & \text{si } -4 < x \end{cases}; \quad x_1 = -4$$

$$2. f(x) = |x-3|; \quad x_1 = 3$$

$$3. f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}; \quad x_1 = 0$$

$$4. f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & \text{si } x < 1 \\ (1-x)^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}; \quad x_1 = 1$$

$$5. f(x) = \begin{cases} 2x^2-3 & \text{si } x \leq 2 \\ 8x-11 & \text{si } x > 2 \end{cases}; \quad x_1 = 2$$

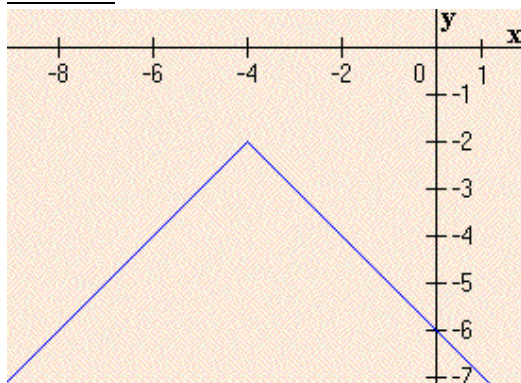
$$6. f(x) = \sqrt[3]{x+1}; \quad x_1 = -1$$

$$7. f(x) = \begin{cases} 3x^2-3 & \text{si } x \leq 2 \\ x^3 & \text{si } x > 2 \end{cases}; \quad x_1 = 2$$

Soluciones

$$1. f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \leq -4 \\ -x-6 & \text{si } -4 < x \end{cases}; \quad x_1 = -4$$

Solución:



(b) Criterios de continuidad

$$i) f(-4) = -4 + 2 = -2$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4^+} (-x - 6) = -(-4) - 6 = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4^-} (x + 2) = -4 + 2 = -2;$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -4} f(x) = -2$$

$$iii) f(-4) = \lim_{x \rightarrow -4} f(x) = -2;$$

por lo tanto, f es continua en -4 .

(c) Derivadas unilaterales

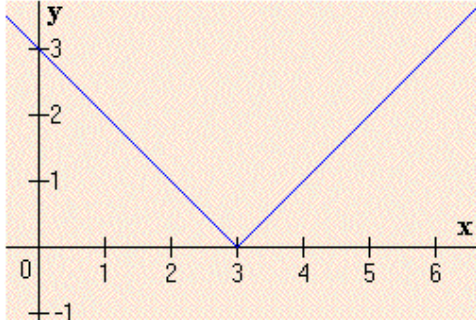
$$f'_-(-4) = \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{f(x) - f(-4)}{x - (-4)} = \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{x+2 - (-2)}{x+4} = \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{x+4}{x+4} = \lim_{x \rightarrow -4^-} 1 = 1$$

$$f'_+(-4) = \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{f(x) - f(-4)}{x - (-4)} = \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{-x-6 - (-2)}{x+4} = \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{-(x+4)}{x+4} = \lim_{x \rightarrow -4^+} -1 = -1$$

(d) $f'_-(-4) \neq f'_+(-4)$; por lo que se concluye que f no es diferenciable en -4 .

2. $f(x) = |x - 3|$; $x_1 = 3$

Solución:



$$f(x) = |x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x \geq 3 \\ 3 - x & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

(b) Criterios de continuidad

i) $f(3) = 3 - 3 = 0$

ii) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (3 - x) = 3 - 3 = 0$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x - 3) = 3 - 3 = 0;$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$

iii) $f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$; por lo tanto, f es continua en -4 .

(c) Derivadas unilaterales

$$f'_-(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3 - x - 0}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} -\frac{x - 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} -1 = -1$$

$$f'_+(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - (-4)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - 3 - 0}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} 1 = 1$$

(d) $f'_-(3) \neq f'_+(3)$; por lo que se concluye que f no es diferenciable en 3.

3. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$; $x_1 = 0$

Solución:

(b) Criterios de continuidad

i) $f(0) = 0^2 = 0$

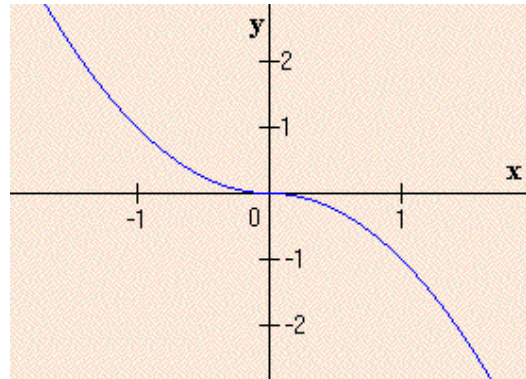
ii) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x^2 = 0;$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

iii) $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$;

por lo tanto, f es continua en 0.



(c) Derivadas unilaterales

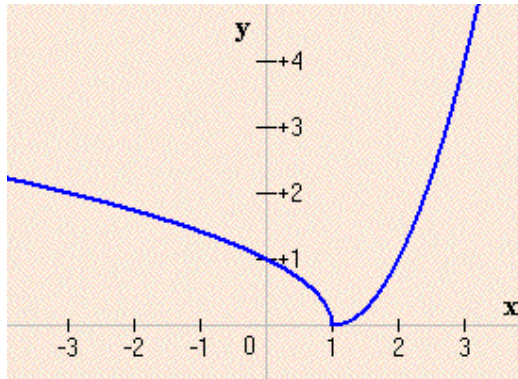
$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$$

(d) $f'_-(0) = f'_+(0)$; por lo que se concluye que f es diferenciable en 0.

$$4. f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & \text{si } x < 1 \\ (1-x)^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}; x_1 = 1$$

Solución:



(b) Criterios de continuidad

$$i) f(1) = (1-1)^2 = 0$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x} = \sqrt{1-1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^2 = (1-1)^2 = 0;$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

$$iii) f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0;$$

por lo tanto, f es continua en 1.

(c) Derivadas unilaterales

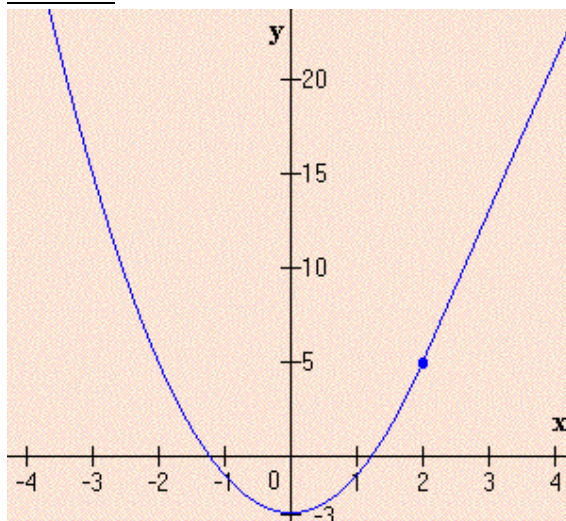
$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x} - 0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{x-1} = -\infty$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1-x)^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)^2}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 1-1 = 0$$

(d) $f'_-(1) \neq f'_+(1)$; por lo que se concluye que f no es diferenciable en 1.

$$5. f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3 & \text{si } x \leq 2 \\ 8x - 11 & \text{si } x > 2 \end{cases}; x_1 = 2$$

Solución:



(b) Criterios de continuidad

$$i) f(2) = 2(2)^2 - 3 = 5$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 2x^2 - 3 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 8x - 11 = 5;$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$$

$$iii) f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5;$$

por lo tanto, f es continua en 2.

(c) Derivadas unilaterales

$$\begin{aligned} f'_-(2) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(2x^2 - 3) - 5}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2(x^2 - 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} 2(x + 2) = 2(2 + 2) = 2(4) = 8 \end{aligned}$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(8x - 11) - 5}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{8(x - 2)}{(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} 8 = 8$$

(d) $f'_-(2) = f'_+(2)$; por lo que se concluye que f es diferenciable en 2.

6. $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$; $x_1 = -1$

Solución:

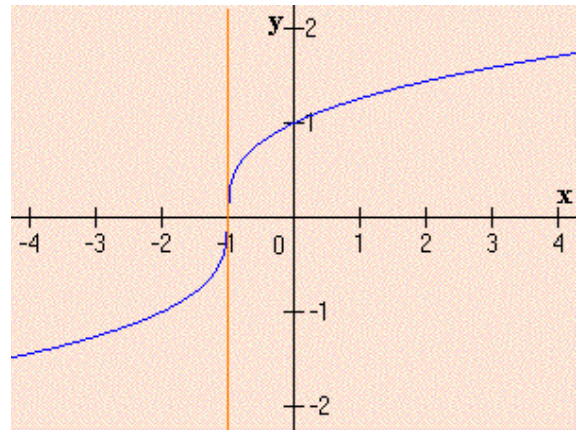
(b) Criterios de continuidad

i) $f(-1) = \sqrt[3]{-1+1} = 0$

ii) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[3]{x+1} = 0$

iii) $f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$;

por lo tanto, f es continua en -1 .



(c) Derivadas unilaterales

$$f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 0}{x + 1}$$

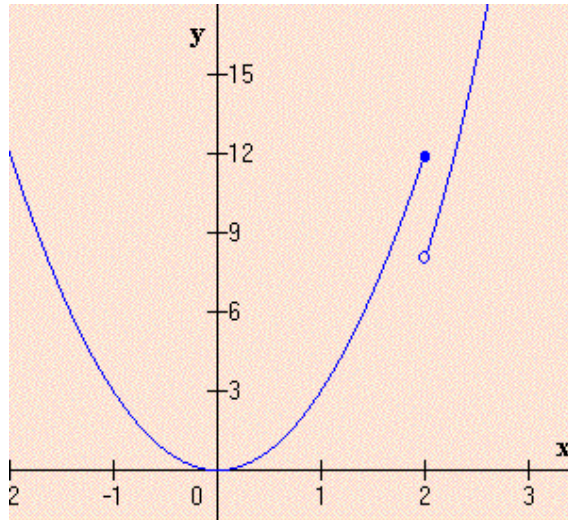
$$= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{(x+1)^{2/3}} = +\infty$$

$$f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 0}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{(x+1)^{2/3}} = +\infty$$

(d) f no es diferenciable en -1 . La gráfica de f tiene una recta tangente vertical en $x = -1$.

7. $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & \text{si } x \leq 2 \\ x^3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$; $x_1 = 2$

Solución:



(b) Criterios de continuidad

i) $f(2) = 3(2)^2 = 12$

ii) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 3x^2 = 12$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^3 = 8,$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$: no existe

Por lo tanto f es discontinua en 2.

(c) Derivadas unilaterales

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x^2 - 12}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} 3(x+2) = 3(2+2) = 12$$

$$\begin{aligned} f'_+(2) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{(x_1 + \Delta x)^3 - x_1^3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{x_1^3 + 3x_1^2 \Delta x + 3x_1(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_1^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{3x_1^2 \Delta x + 3x_1(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} 3x_1^2 + 3x_1 \Delta x + (\Delta x)^2 = 3x_1^2 = 3(2)^2 = 12 \end{aligned}$$

(d) $f'_-(2) = f'_+(2) = 12$; pero f no es continua en 2, por lo tanto f no es diferenciable en 2.

Propiedades de la diferenciación de funciones

Hallar la derivada de una función aplicando la *definición de derivada* es un proceso largo y la mayor de las veces bastante tediosa. Afortunadamente existen varias propiedades en la derivación de funciones que los matemáticos han descubierto y establecido como teoremas. Algunos de estos teoremas son generales, aplicables a cualquier función, y otros sólo se aplican a funciones particulares. A continuación se enuncian algunos de los teoremas más importantes (se nombran enumerándolos consecutivamente para facilitar una futura referencia a ellos):

Nota: se supone, obviamente, que las funciones a las que hacen referencia los teoremas son diferenciables, esto es, que tienen derivada.

Teorema D1:

Si $y = c \cdot f(x)$, c es una constante,

$$\Rightarrow D_x y = c \cdot D_x [f(x)]$$

En palabras: "la derivada de una constante por una función es igual a la constante multiplicada por la derivada de la función".

Teorema D2:

$$\text{Si } y = f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x),$$

$$\Rightarrow D_x y = D_x f_1(x) \pm D_x f_2(x) \pm \dots \pm D_x f_n(x)$$

En palabras: "la derivada de la suma de un número finito, n , de funciones (términos), positivas o negativas, es igual a la suma de las derivadas de cada función y con su respectivo signo".

Teorema D3:

$$\text{Si } y = f(x) \cdot g(x)$$

$$\Rightarrow D_x y = f(x) \cdot D_x g(x) + g(x) \cdot D_x f(x)$$

En palabras: "la derivada del producto de dos funciones es igual a la primera función por la derivada de la segunda más la segunda función por la derivada de la primera".

Teorema D4:

$$\text{Si } y = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$$

$$\Rightarrow D_x y = \frac{g(x) \cdot D_x f(x) - f(x) \cdot D_x g(x)}{[g(x)]^2}$$

En palabras: "la derivada del cociente de dos funciones es igual a una fracción cuyo denominador es el cuadrado de la función del dividendo y cuyo numerador es la diferencia entre la función del dividendo por la derivada de la función del divisor y la función del divisor por la derivada de la función del dividendo".

Teorema D5:

$$\text{Si } y = x^n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow D_x y = nx^{n-1}$$

En palabras: "para hallar la derivada de la función potencia se multiplica la función por un coeficiente igual al exponente y el exponente se disminuye en la unidad".

Teorema D6:

$$\text{Si } y = c, c \text{ es una constante}$$

$$\Rightarrow D_x y = 0$$

En palabras: "la derivada de la función constante es cero".

Teorema D7:

$$\text{Si } y = x,$$

$$\Rightarrow D_x y = 1$$

En palabras: "la derivada de la función identidad es uno".

Derivadas de las funciones trigonométricas**Teorema D8:**

$$\text{Si } y = \text{sen } x,$$

$$\Rightarrow D_x y = \text{cos } x$$

Teorema D9:

$$\text{Si } y = \text{cos } x,$$

$$\Rightarrow D_x y = -\text{sen } x$$

Teorema D10:

$$\text{Si } y = \text{tan } x,$$

$$\Rightarrow D_x y = \text{sec}^2 x$$

Teorema D11:Si $y = \cot x$,

$$\Rightarrow D_x y = -\csc^2 x$$

Teorema D12:Si $y = \sec x$,

$$\Rightarrow D_x y = \sec x \tan x$$

Teorema D13:Si $y = \csc x$,

$$\Rightarrow D_x y = -\csc x \cot x$$

Teorema D14:Si $y = x^r$, r es cualquier número racional,

$$\Rightarrow D_x y = r x^{r-1}.$$

Corolario: Como $\sqrt[n]{x^m} \Leftrightarrow x^{m/n}$, entoncesSi $y = \sqrt[n]{x^m}$,

$$\Rightarrow D_x y = \frac{m}{n} x^{m/n-1}.$$

Ejercicios resueltosEn los ejercicios 1 a 12 halle la derivada de la función dada aplicando los teoremas **TD1** a **TD14**:

1. $f(x) = 7x - 5$	2. $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 1$	3. $f(x) = x^2 + 3x + \frac{1}{x^2}$
4. $f(x) = (2x^2 + 5)(4x - 1)$	5. $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2}$	6. $f(x) = \frac{x}{x-1}$
7. $f(x) = \frac{2x+1}{x+5}(3x-1)$	8. $f(x) = 3\operatorname{sen} x$	9. $f(x) = 4\operatorname{sec} x - 2\operatorname{csc} x$
10. $f(x) = 3\operatorname{sec} x \tan x$	11. $f(x) = \frac{\cot x}{\cos x - 4}$	12. $f(x) = \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1}$

Soluciones

1. $f(x) = 7x - 5$

Solución:

$$D_x f(x) = D_x(7x) - D_x(5) \quad \{\text{TD2}\},$$

$$\Rightarrow D_x f(x) = 7D_x(x) - 0 \quad \{\text{TD1 y TD6}\},$$

$$\Rightarrow D_x f(x) = 7(1) \quad \{\text{TD7}\};$$

$$\therefore D_x f(x) = 7.$$

2. $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 1$

Solución:

$$\begin{aligned} D_x f(x) &= D_x(3x^4) - D_x(5x^2) + D_x(1) \quad \text{(TD2)}, \\ \Rightarrow D_x f(x) &= 4 \times 3x^{4-1} - 2 \times 5x^{2-1} + 0 \quad \text{(TD5 y TD6)}; \\ \therefore D_x f(x) &= 12x^3 - 10x. \\ \therefore D_x f(x) &= 7. \end{aligned}$$

3. $f(x) = x^2 + 3x + \frac{1}{x^2}$

Solución:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 3x + \frac{1}{x^2} = x^2 + 3x + x^{-2} \\ D_x [x^2 + 3x + x^{-2}] &= D_x(x^2) + D_x(3x) + D_x(x^{-2}) \quad \text{(TD2)}, \\ \Rightarrow D_x [x^2 + 3x + x^{-2}] &= 2x^{2-1} + 3x^{1-1} + (-2x^{-2-1}) = 2x^1 + 3x^0 - 2x^{-3} \quad \text{(TD5)}; \\ \therefore D_x [x^2 + 3x + x^{-2}] &= 2x + 3 - 2x^{-3}. \end{aligned}$$

4. $f(x) = (2x^2 + 5)(4x - 1)$

Solución:

$$\begin{aligned} D_x [(2x^2 + 5)(4x - 1)] &= (2x^2 + 5)D_x(4x - 1) + (4x - 1)D_x(2x^2 + 5) \quad \text{(TD3)}, \\ \Rightarrow D_x [(2x^2 + 5)(4x - 1)] &= (2x^2 + 5)(4 - 0) + (4x - 1)(4x + 0) \quad \text{(TD2, TD5 y TD6)}, \\ \Rightarrow D_x [(2x^2 + 5)(4x - 1)] &= 8x^2 + 20 + 16x^2 - 4x, \\ \therefore D_x [(2x^2 + 5)(4x - 1)] &= 24x^2 - 4x + 20. \end{aligned}$$

5. $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2}$

Solución:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3\sqrt[3]{x^2} = 3x^{2/3} \\ D_x [3\sqrt[3]{x^2}] &= D_x [3x^{2/3}] = 3 \times \frac{2}{3} x^{2/3-1} \quad \text{(CTD14)}; \\ \therefore D_x [3\sqrt[3]{x^2}] &= 2x^{-1/3}. \end{aligned}$$

6. $f(x) = \frac{x}{x-1}$

Solución:

$$\begin{aligned}D_x \left(\frac{x}{x-1} \right) &= \frac{(x-1)D_x x - xD_x(x-1)}{(x-1)^2} \quad \{\text{TD4}\}, \\ \Rightarrow D_x \left(\frac{x}{x-1} \right) &= \frac{(x-1)(1) - x(1-0)}{(x-1)^2} \quad \{\text{TD7, TD1 y TD6}\}, \\ \Rightarrow D_x \left(\frac{x}{x-1} \right) &= \frac{x-1-x}{(x-1)^2} \quad \{\text{efectuando los productos indicados}\}; \\ \therefore D_x \left(\frac{x}{x-1} \right) &= -\frac{1}{(x-1)^2} \quad \{\text{reduciendo}\}.\end{aligned}$$

7. $f(x) = \frac{2x+1}{x+5}(3x-1)$

Solución:

$$\begin{aligned}D_x \left[\frac{2x+1}{x+5}(3x-1) \right] &= \frac{2x+1}{x+5} D_x(3x-1) + (3x-1) D_x \frac{2x+1}{x+5} \quad \{\text{TD3}\}, \\ \Rightarrow D_x \left[\frac{2x+1}{x+5}(3x-1) \right] &= \frac{2x+1}{x+5} (3-0) + (3x-1) \left[\frac{(x+5)D_x(2x+1) - (2x+1)D_x(x+5)}{(x+5)^2} \right] \\ &\quad \{\text{TD2, TD5, TD6 y TD4}\}, \\ \Rightarrow D_x \left[\frac{2x+1}{x+5}(3x-1) \right] &= \frac{3(2x+1)}{x+5} + (3x-1) \left[\frac{(x+5)(2+0) - (2x+1)(1+0)}{(x+5)^2} \right] \\ &\quad \{\text{TD2, TD6 y TD7}\}, \\ \Rightarrow D_x \left[\frac{2x+1}{x+5}(3x-1) \right] &= \frac{6x+3}{x+5} + \frac{(3x-1)(2x+10-2x-1)}{(x+5)^2}, \\ \Rightarrow D_x \left[\frac{2x+1}{x+5}(3x-1) \right] &= \frac{6x+3}{x+5} + \frac{(3x-1)(9)}{(x+5)^2} = \frac{(x+5)(6x+3) + 9(3x-1)}{(x+5)^2}, \\ \Rightarrow D_x \left[\frac{2x+1}{x+5}(3x-1) \right] &= \frac{6x^2 + 33x + 15 + 27x - 9}{(x+5)^2} = \frac{6x^2 + 60x + 6}{(x+5)^2}; \\ \therefore D_x \left[\frac{2x+1}{x+5}(3x-1) \right] &= \frac{6(x^2 + 10x + 1)}{(x+5)^2}.\end{aligned}$$

8. $f(x) = 3 \operatorname{sen} x$

Solución:

$$\begin{aligned}D_x(3 \operatorname{sen} x) &= 3(D_x \operatorname{sen} x) \quad \{\text{TD1}\}; \\ \therefore D_x(3 \operatorname{sen} x) &= 3 \cos x \quad \{\text{TD8}\}.\end{aligned}$$

9. $f(x) = 4 \sec x - 2 \operatorname{csc} x$

Solución:

$$\begin{aligned} D_x[4\sec x - 2\csc x] &= D_x[4\sec x] - D_x[2\csc x] \quad \{\text{TD2}\}, \\ \Rightarrow D_x[4\sec x - 2\csc x] &= 4D_x[\sec x] - 2D_x[\csc x] \quad \{\text{TD1}\}, \\ \Rightarrow D_x[4\sec x - 2\csc x] &= 4[\sec x \tan x] - 2[-\csc x \cot x] \quad \{\text{TD12 y TD13}\}; \\ \therefore D_x[4\sec x - 2\csc x] &= 4\sec x \tan x + 2\csc x \cot x. \end{aligned}$$

10. $f(x) = 3\sec x \tan x$

Solución:

$$\begin{aligned} D_x[3\sec x \tan x] &= 3D_x[\sec x \tan x] = 3[\sec x D_x[\tan x] + \tan x D_x[\sec x]] \quad \{\text{TD1 y TD3}\}, \\ \Rightarrow D_x[3\sec x \tan x] &= 3[\sec x [\sec^2 x] + \tan x [\sec x \tan x]] \quad \{\text{TD10 y TD12}\}; \\ \therefore D_x[3\sec x \tan x] &= 3\sec^3 x + 3\sec x \tan^2 x. \end{aligned}$$

11. $f(x) = \frac{\cot x}{\cos x - 4}$

Solución:

$$\begin{aligned} D_x \frac{\cot x}{\cos x - 4} &= \frac{(\cos x - 4)D_x \cot x - \cot x D_x(\cos x - 4)}{(\cos x - 4)^2} \quad \{\text{TD4}\}, \\ \Rightarrow D_x \frac{\cot x}{\cos x - 4} &= \frac{(\cos x - 4)(-\csc^2 x) - \cot x(-\sen x + 0)}{(\cos x - 4)^2} \quad \{\text{TD11, TD2, TD9 y TD6}\}; \\ \therefore D_x \frac{\cot x}{\cos x - 4} &= \frac{-\cos x \csc^2 x + 4\csc^2 x + \sen x \cot x}{(\cos x - 4)^2} = \frac{\csc^2 x(4 - \cos x) + \cos x}{(\cos x - 4)^2}. \end{aligned}$$

Derivada de una función compuesta y regla de la cadena

La gran mayoría de las funciones que se estudian en cálculo están construidas por una composición de funciones, de aquí la importancia de conocer un método sencillo para diferenciar dichas funciones; el método utilizado para hallar la derivada de una función compuesta se conoce como "*Regla de la cadena*".

Regla de la cadena:

Si $y = f(u)$, $u = g(x)$, y si $\frac{dy}{du}$ y $\frac{du}{dx}$ existen, entonces la función compuesta definida por $y = f(g(x))$ tiene una derivada dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = f'(u)g'(u) = f'(g(x))g'(x).$$

♣ Cuando se aplica la regla de la cadena es más práctico utilizar el símbolo D_x para indicar las derivadas de las funciones *interiores*.

Ejemplo ilustrativo1:

En $f(x) = \text{sen } 4x$

$u = 4x, D_x u = D_x 4x = 4$

$f(u) = \text{sen } u, D_u f(u) = \cos u = \cos 4x$

De tal manera que:

$D_x f(x) = D_x (\text{sen } 4x) = \cos 4x \cdot D_x (4x) = \cos 4x \cdot 4 = 4 \cos 4x.$

- Muchas veces sucede que hay que aplicar la regla de la cadena más de una vez para derivar una función compuesta dada.

Ejemplo ilustrativo2:

Si $f(x) = (\text{sen } 4x)^2,$

$\Rightarrow f'(x) = D_x [(\text{sen } 4x)^2] = 2 \text{sen } 4x \cdot D_x (\text{sen } 4x) = 2 \text{sen } 4x \cdot \cos 4x \cdot D_x (4x) = 2 \text{sen } 4x \cos 4x \cdot 4,$

$\therefore f'(x) = 8 \text{sen } 4x \cos 4x$

Ejercicios resueltos		
En los siguientes ejercicios obtenga la derivada de la función que se indica aplicando la regla de la cadena:		
1. $f(x) = (2x + 1)^3$	2. $f(x) = (x^2 + 4x - 5)^4$	3. $f(x) = (x^2 + 4)^{-2}$
4. $f(x) = \text{sen } x^2$	5. $f(x) = (\text{sen } x)^2$	

Soluciones

1. $f(x) = (2x + 1)^3$

Solución:

Aplicando la regla de la cadena:

$f'(x) = 3(2x + 1)^{3-1} \cdot D_x (2x + 1) = 3(2x + 1)^2 \cdot 2;$

$\therefore f'(x) = 6(2x + 1)^2.$

2. $f(x) = (x^2 + 4x - 5)^4$

Solución:

Aplicando la regla de la cadena:

$f'(x) = 4(x^2 + 4x - 5)^{4-1} \cdot D_x (x^2 + 4x - 5) = 4(x^2 + 4x - 5)^3 (2x + 4);$

$\therefore f'(x) = 8(2x + 4)(x^2 + 4x - 5)^3.$

3. $f(x) = (x^2 + 4)^{-2}$

Solución:

Aplicando la regla de la cadena:

$$f'(x) = -2(x^2 + 4)^{-2-1} \cdot D_x(x^2 + 4) = -2(x^2 + 4)^{-3} \cdot 2x,$$

$$\therefore f'(x) = -\frac{4x}{(x^2 + 4)^3}.$$

4. $f(x) = \operatorname{sen} x^2$

Solución:

Aplicando la regla de la cadena:

$$f'(x) = D_x(\operatorname{sen} x^2) = \cos x^2 \cdot D_x(x^2) = \cos x^2 \cdot 2x,$$

$$\therefore f'(x) = 2x \cos x^2.$$

5. $f(x) = (\operatorname{sen} x)^2$

Solución:

Aplicando la regla de la cadena:

$$f'(x) = 2 \operatorname{sen} x \cdot D_x(\operatorname{sen} x),$$

$$\therefore f'(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x.$$