La Recta

César Román Martínez García
cesaroma@esfm.ipn.mx, macrosss666@hotmail.com
Conalep Aztahuacan

16 de noviembre de 2005

Resumen

Estudiaremos la ecuación de la recta, veremos la forma de calcular la ecuación de la recta a partir de la ordenada b al origen y la pendienten m, veremos como obtener la ecuación de la recta a partir de un punto y cierta inclinación, veremos lo que es la forma canónica de la recta y la forma nomar de la recta.

1. Recta

Nuestro primer objetivo en esté trabajo es establecer la idea de línea recta, así como establecer la ecuación algebraica de la línea recta.

Definición 0.1 *Se llama pendiente ó coeficiente angular de una recta a la tangente de su ángulo de inclinación. La pendiente de una recta se designa comúnmente por la letra m. Por tanto la podemos escribir como*

$$m = \tan \alpha$$

el intervalo de variación del angulo α, está dado por $0^o \leq \alpha \leq 180^o$. Se dirá que una recta tiene pendiente positva si su ángulo se encuentra en el intervalo de $0 \leq \alpha < 90^o$, y se dirá que una recta tiene pendiete negativa sí su angulo de inclinación α se encuentra en el siguiente intervalo, $90 < \alpha \leq 180^o$.

Definición 0.2 *Se llama línea recta al lugar geométrico de todos los puntos contenidos en el plano tales que, tomando dos puntos diferentes cualesquiera $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ den lugar, el valor de la pendiente m que resulta siempre constante.*

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \neq x_2$$

1.1. Ángulo entre dos rectas

Sean las rectas L_1 y L_2 cuyas pendientes son m_1 y m_2 respectivamente. Sea el ángulo α medido en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, desde la recta L_1 hasta la recta L_2 (figura 2). El ángulo α está dado por

$$\alpha = ang\tan\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}, \text{ ó bien } \quad \tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \tag{1}$$

Donde $m_1 = \tan\alpha_1$ y $m_2 = \tan\alpha_2$.

De esté ángulo α podemos sacar las condiciones de paralelismo y perpendicularidad, de la siguiente forma. Dos rectas son paralelas, sí el ángulo que forman ellas es 0^o ó 180^o. En cualquiera de los dos casos la fórmula anterior se reduce a

$$0 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

de donde, $m_1 = m_2$; es decir, las pendientes son iguales. Reciprocamente, sí $m_1 = m_2$, (1) se reduce a

$$\tan\alpha = 0,$$

de donde se deduce que α es igual a 0^o ó 180^o, y en cosecuencia las rectas son paralelas. Esto lo podemos enunciar en el siguiente corolario.

Corolario 0.1 *La condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean paralelas es que sus pendientes sean iguales.*

Sí dos rectas son perpendiculares, el ángulo comprendido entre ellas es de 90^o. Es decir $\alpha = 90^o$ la ecuación (1) toma la forma

$$\tan 90^o = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \longrightarrow \infty \Longrightarrow 1 + m_1 m_2 = 0$$

de donde $m_1 m_2 = -1$. reciprocamente sí $m_1 m_2 = -1$, la fórmula (1) tiene a ∞, es decir las rectas son perpendiculares. Esté resultado lo enunciamos en el siguiente corolario.

Corolario 0.2 *La condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean perpendiculares entre sí, es que el producto de sus pendientes sea igual a* -1.

1.2. Ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene pendiente dada

Geométricamente, una recta queda perfectamente determinada por uno de sus puntos y su dirección. Analíticamente, la ecuación de una recta puede ser perfectamente determinada apartir de las coordenadas de uno de sus puntos y su ángulo de inclinación (y por tanto, su pendiente).

Teorema 1.1 *La recta que pasa por el punto dado $P_1(x_1, y_1)$ y tiene la pendiente dada m, tiene por ecuación*

$$y - y_1 = m\,(x - x_1) \tag{2}$$

Demostración 1.1 *Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la recta, diferente del punto dado $P_1(x_1, y_1)$, entonces de acuerdo con la definición de recta, las coordenadas del punto $P(x, y)$ satisfacen la ecuación*

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1},$$

del cual obtenemos, inmediatamente, quitando denominador, la ecuación (2). Reciprocamente, sí las coordenadas de cualquier otro punto $P_2(x_2, y_2)$ satisfacen (2), tenemos

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

que es la expresión analítica de la definición de recta, aplicada a los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$. Por lo tanto, P_2 está sobre la recta. Esto completa la demostración.

Teorema 1.2 *La recta cuya pendiente es m y cuya ordenada en el origen es b tiene por ecuación*

$$y = mx + b.$$

Demostración 1.2 *La ordenada al origen tiene por coordenada a $(0, b)$ y la pendiente es m, entonces por el teorema 1.1 la ecuación es*

$$\begin{aligned} y - b &= m(x - 0) \\ y &= mx + b \end{aligned}$$

Esto completa la demostración.

Teorema 1.3 *La recta que pasa por dos puntos dados $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ tiene por ecuación*

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1), \quad x_1 \neq x_2 \tag{3}$$

Demostración 1.3 *Sea la recta P_1P_2 de la figura 2. Como se conocen dos de sus puntos, su pendiente está dada por (definición de recta)*

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \neq x_2$$

Por tanto, con está pendiente m y el punto $P_1(x_1, y_1)$, y utilizando el teorema 1.1 se tiene

$$y - y_1 = m\,(x - x_1) \Longrightarrow y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1)\,, \quad x_1 \neq x_2$$

Esto completa la demostración.

Teorema 1.4 *La recta cuya intercepción con los ejes X y Y son $a \neq 0$ y $b \neq 0$, reciprocamente, tiene por ecuación*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Demostración 1.4 *Sean $a \neq 0$ y $b \neq 0$, los segmentos que determinan sobre el eje X y Y figura 3, es decir sus intercepciones. Entonces $(a, 0)$ y $(0, b)$ son dos puntos de la recta, por tanto aplicando el teorema 3.3, tenemos que*

$$y - 0 = \frac{0 - b}{a - 0}(x - a),$$

de donde

$$ay = -bx + ab$$

pasando el término $-bx$ a la izquierda y dividiendo todo en entérminos de ab, obtenemos

$$ay + bx = ab$$
$$\frac{ay}{ab} + \frac{bx}{ab} = \frac{ab}{ab}$$
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Esto completa la demostración.

2. Forma general de la ecuación de una recta

La ecuación de una recta cualquiera, en el plano coordenado, es de la forma lineal

$$Ax + By + C = 0, \tag{4}$$

en donde A ó B deben ser diferentes de cero, y C puede o no ser igual a cero. La ecuación (4) se llama *forma general* de la ecuación de una recta. Ahora consideremos el problemas inverso, a saber, la ecuación lineal (4), ¿representa siempre una línea recta? Para contestar está pregunta consideremos las formas posibles de la ecuación (4), con respecto al coeficiente de y, es decir, las formas para $B = 0$ y $B \neq 0$.

Caso 0.1 *$B = 0$. Sí $B = 0$, entonces $A \neq 0$, y la ecuación (4), se reduce a la forma*

$$x = -\frac{C}{A}. \tag{5}$$

pero (4) es de la forma $x = k$, de la que corresponde a la ecuación de una recta paralela al eje Y.

Caso 0.2 *$B \neq 0$. Sí $B \neq 0$, podemos dividir la ecuación (4) por B, entonces por trasposición de términos se reduce a la forma*

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}. \tag{6}$$

pero (4) está en la forma $y = mx + b$ (teorema 1.2) y, por tanto, es la ecuación de una recta cuya pendiente es $-\frac{A}{B}x$ y cuya ordenada en el origen es $-\frac{C}{A}$. Es decir

$$m = -\tfrac{A}{B}$$
$$b = -\tfrac{C}{A}$$

Teorema 2.1 *Sí las ecuaciones de dos rectas son*

$$Ax + By + C = 0 \tag{7}$$

y

$$A'x + B'y + C' = 0 \tag{8}$$

las relaciones siguientes son condiciones necesarias y suficientes para

- *Paralelismo, $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$, o sea, $AB' - A'B = 0$;*
- *Perpendicularidad, $AA' + BB' = 0$;*
- *Coincidencia, $A = kA'$, $B = kB'$, $C = kC'$ con $k \neq 0$;*
- *Intercepción en uno y solamente un punto, $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$, o sea, $AB' - A'B \neq 0$.*

Demostración 2.1 *La pendiente de(5) es $-\frac{A}{B}$ sí $B \neq 0$, y la pendiente de (5) es $-\frac{A'}{B'}$ sí $B' \neq 0$. Por el corolario 0.1 aplicado al teorema 2.1, la condición necesaria y suficiente para que las rectas (7) y (8) sean paralelas es que*

$$-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'},$$

o sea,

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'},$$

es decir los coeficientes de x y y deben ser proporcionales. Sí $B = 0$, la recta (7) es paralela al eje Y. Sí la recta (8) es paralela a la (7), tambien es paralela al eje Y, luego también $B' = 0$. En esté caso, la última proporción establecida no tiene sentido; Lo mismo sucede si A y A' son cero, es decir, si ambas rectas son paralelas al eje X. Está ultima relación se puede escribir como

$$AB' - A'B = 0,$$

Ahora por el corolario 0.2 aplicado al teorema 2.1, la condición necesaria y suficiente para que las rectas (7) y (8) sean perpendiculares es que

$$\left(-\frac{A}{B}\right)\left(-\frac{A'}{B'}\right) = -1,$$

o sea,

$$AA' + BB' = 0.$$

Ahora dos rectas coinciden si tienen un punto común y la misma pendiente. La intersección de la recta (7) con el eje X *es el punto de abscisa* $-\frac{C}{A}$*, y la de la recta (8) es el punto de abscisa* $-\frac{C'}{A'}$*. Por tanto, debemos tener*

$$-\frac{C}{A} = -\frac{C'}{A'},$$

o sea,

$$\frac{A}{A'} = \frac{C}{C'}. \tag{9}$$

También, por ser las pendientes iguales,

$$-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'},$$

o sea,

$$\frac{A}{A'} = \frac{C}{C'}. \tag{10}$$

De (9) y (10) tenemos

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'};$$

es decir, dos rectas coinciden si y solo si sus coeficientes correspondientes son proporcionales, es decir

$$A = kA', \quad B = kB', \quad C = kC',$$

de donde k *es una constante diferente de cero. Por ultimo, se sabe que dos rectas se cortan en uno y solamente en un punto en caso de que no sean paralelas. Analíticamente, si las rectas (7) y (8) no son paralelas, de la primera parte tenemos que*

$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}, \text{ o sea, que } AB' - A'B \neq 0.$$

Esto completa la demostración.

3. Ecuación normal de la recta

Una recta queda determinada sí se conoce la recta perpendicular trazada a ella desde el origen $(0,0)$ y el ángulo que dicha perpendicular forma con el eje x. Consideremos un segmento $\overline{OP_1}$ de longitud r y con uno de sus extremos O siempre en el origen, tal como se muestra en la figura siguiente. La posición exacta de este segmento de recta en el plano coordenado está determinada por el ángulo θ, que como en trigonometría, es el ángulo positivo engendrado por el radio vector $\overline{OP_1}$ al girar alrededor del origen, de acuerdo con esto, la longitud

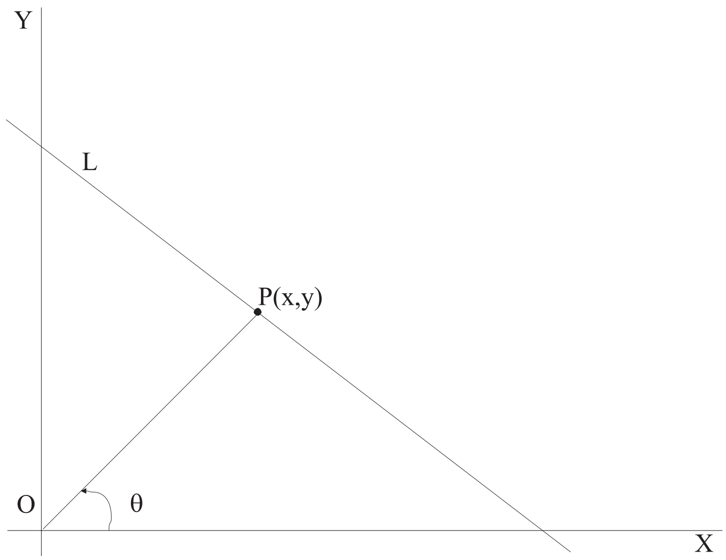

Figura 1: Representación grafica de la ecuación de la recta en su forma normal, obseve que solo requiere saber el valor de θ y r, para poder graficarla.

r se considera siempre *positiva*, y la variación de los valores del ángulo θ viene dada por

$$0 \leq \theta \leq 360^o$$

Ahora obtendremos la ecuación de recta L por medio de la fórmula de la recta que pasa por un punto y tiene una pendiente dada.

Utilizando la identidad $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ obtenemos

La pendiente m de la recta $\overline{AC}$ es

$$m = -\frac{1}{\tan\theta} = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$ de la figura tenemos que

$$x_1 = r\cos\theta \qquad y_1 = r\sin\theta$$

$\Longrightarrow$

$$m = -\frac{\frac{x_1}{r}}{\frac{y_1}{r}} = -\frac{x_1}{y_1}$$

Ahora utilicemos la ecuación de la recta en su forma punto pendiente $y - y_1 = m\,(x - x_1)$.

$$y - r\sin\theta = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}(x - r\cos\theta)$$

$\Longrightarrow$

$$y\sin\theta - r\sin^2\theta = -x\cos\theta + r\cos^2\theta)$$

$\Longrightarrow$

$$y\sin\theta + x\cos\theta = r\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)$$

$\Longrightarrow$

$$y\sin\theta + x\cos\theta = r$$

Esta es la ecuación de la recta en su forma normal

Otra forma de obtener la ecuación es la siguiente, apartir de la ecuación de la recta en su forma coordenadas al origen

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

como

$$\cos\theta = \frac{x_1}{r} \text{ y } \sin\theta = \frac{y_1}{r}$$

además se tiene que

$$\cos\theta = \frac{x_1}{a} \text{ y } \sin\theta = \frac{y_1}{b} \Longrightarrow a = \frac{r}{\cos\theta} \text{ y } b = \frac{r}{\sin\theta}$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Longrightarrow \frac{x}{\frac{r}{\cos\theta}} + \frac{y}{\frac{r}{\sin\theta}} = 1$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{x\cos\theta}{r} + \frac{y\sin\theta}{r} = 1 \Longrightarrow x\cos\theta + y\sin\theta = r$$

Por ultimo pasemos de la forma general de la recta a la forma normal para ello recordemos que tanto la ecuación general de la recta como la ecuación normal de la recta representan una misma recta escrita en forma distinta por lo tanto sus coeficientes de ambas ecuaciones deben de ser los mismos osea iguales.

$$Ax + By + C = 0 \text{ y } x\cos\theta + y\sin\theta = r$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{\cos\theta}{A} = \frac{\sin\theta}{B} = -\frac{r}{C} = k, \text{ con } k = cte$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{gathered}\cos\theta = kA\\ \sin\theta = kB\\ -r = kC\end{gathered}$$

Elevando $\cos\theta = kA$ y $\sin\theta = kB$ al cuadrado y sumando se obtiene

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = (kA)^2 + (kB)^2 = k^2(A^2 + B^2) = 1$$

$\Longrightarrow$

$$k = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$\therefore$

$$\cos\theta = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \sin\theta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \quad -r = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

en la que se sebe considerar el signo del radical opuesto al de C. Sí $C = 0$, el signo de radical se considera igual a de B. Así la recta definida por la ecuación general (4) tiene por ecuación en la forma normal

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0.$$

Los resultados alteriores quedan resumidos en el siguiente teorema.

Teorema 3.1 *La forma general de la ecuación de una recta,*

$$Ax + By + C = 0, \tag{11}$$

puede reducirse a la forma normal,

$$x\cos\theta + y\sin\theta = r,$$

dividiendo cada término de (11) por $r = \pm\sqrt{A^2+B^2}$, en donde el signo que precede al radical r se escoge como sigue:

1. *Sí $C \neq 0$, r es de signo contrario a C.*
2. *Sí $C = 0$ y $B \neq 0$, r y B tienen el mismo signo.*
3. *Sí $C = B = 0$, r y A tiene el mismo signo.*

4. Distancia de un punto a una recta

La distancia d del punto $P_1(x_1, y_1)$ a la recta $Ax + By + C = 0$. se obtine como:

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

En donde el signo del radical debe ser opuesto al signo de C. Sí $C = 0$, entonces se toma arbitrariamente el signo positivo ó negativo en el radical y no considerar interpretación geométrica al signo de la distancia.

Sí se trata de hallar la distancia d entre dos rectas paralelas

$$Ax + By + C_1 = 0$$

$$Ax + By + C_2 = 0$$

la fórmula para obtenerla es:

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

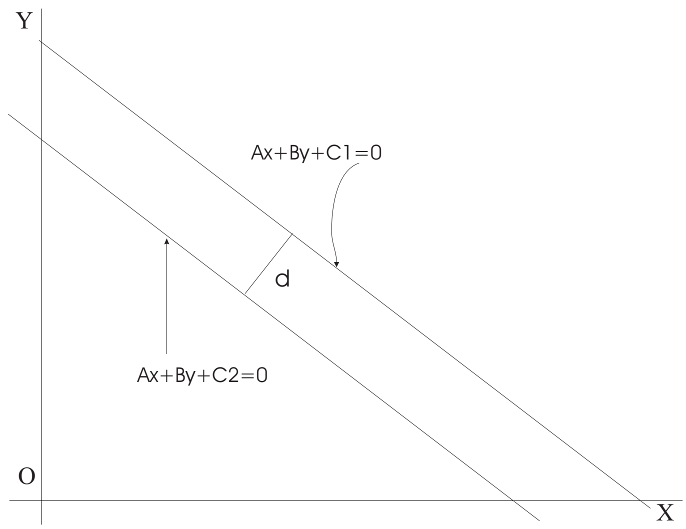

Figura 2: Grafica de dos rectas paralelas, se observa que la distancia de separación es d.