La Hipérbola

César Román Martínez García
cesaroma@esfm.ipn.mx, macrosss666@hotmail.com
Conalep Aztahuacan

20 de noviembre de 2005

Resumen

Estudiaremos la ecuación de la hipérbola

1. Hipérbola

Definición 0.1 *Una hipébola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es siempre igual a una cantidad constante, positiva y menor que la distancia entre los focos.*

2. Ecuación ordinaria de la hipérbola

Consideremos ls hipérbola de centro en el origen y cuyo eje focal coincide con el eje X como lo muestra la figura 1.Los focos F y F' están entonces sobre el eje X. Como el centro O es el punto medio del segmento FF', las coordenadas de F y F' serán $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, respectivamente, siendo c una constante positiva. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la hipérbola. Entonces, por la definición de hipérbola, el punto P debe satisfacer la condición geométrica siguiente, que expresa que el valor absoluto de la diferencia de las distancias del punto a los focos es una cantidad constante,

$$\left|\left|\overline{FP}\right| - \left|\overline{F'P}\right|\right| = 2a \tag{1}$$

en donde a es una constante positiva y $2a < 2c$. La condición geométrica (1) es equivalente a las dos relaciones,

$$\left|\overline{FP}\right| - \left|\overline{F'P}\right| = 2a, \tag{2}$$

$$\left|\overline{FP}\right| - \left|\overline{F'P}\right| = -2a. \tag{3}$$

La relación (2) es verdadera cuando P está sobre la rama izquierda de la hipérbola; la relación (3) se verifica cuando P está sobre la rama derecha. Utilizando

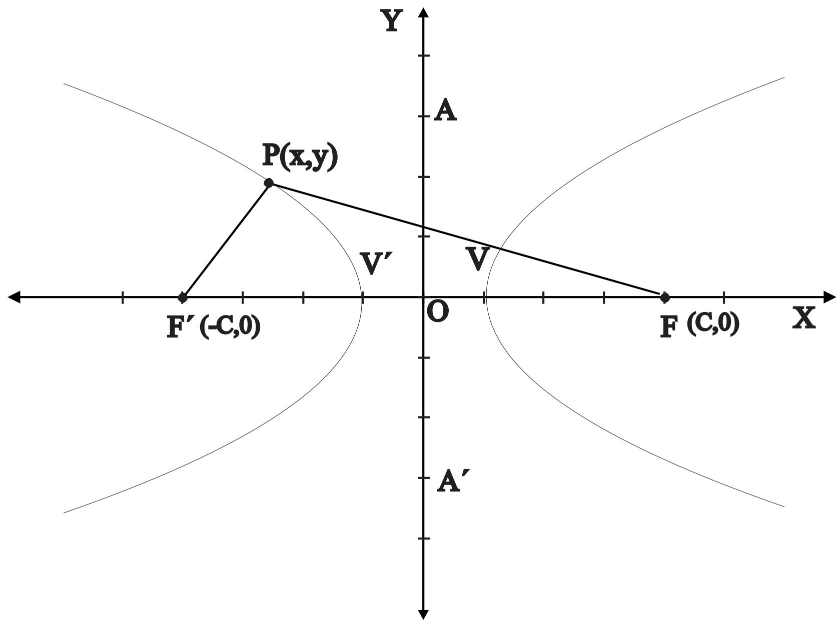

Figura 1:

la fórmula para la distancia

$$\left|\overline{FP}\right| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \qquad \left|\overline{F'P}\right| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

de manera que la condición geométrica (1) está expresada analíticamente por

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a, \tag{4}$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = -2a, \tag{5}$$

correspondiendo las ecuaciones (4) y (5) a las relaciones (2) y (3), respectivamente. Por el mismo procedimiento al transfomar y simplificar la ecuación de la elipse tenemos

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 2a$$

elevando al cuadrado

$$(x-c)^2 + y^2 = (x+c)^2 + y^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 4a^2$$

simplificando

$$x^2 - 2cx + c^2 = x^2 + 2cx + c^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 4a^2$$

$$-4xc - 4a^2 = 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

elevando al cuadrado

$$\left(xc + a^2\right)^2 = \left(a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$c^2x^2 + 2a^2xc + a^4 = a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

simplificando

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \tag{6}$$

Por ser $c > a$, $c^2 > a^2$ es un número positivo que podemos designar por b^2. Por tanto, sustituyendo en la ecuación (6) la relación

$$b^2 = c^2 - a^2, \tag{7}$$

obtenemos

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

que podemos escribir en la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{8}$$

Podemos demostrar recíprocamente, que si $P_1\,(x_1, y_1)$ es un punto cualquiera cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (8), entonces P_1 satisface la condición geométrica (1) y, por tanto, está sobre la hipérbola. Luego la ecuación (8) es la ecuación de la hipérbola. Ahora las intersecciones con el eje X son a y $-a$. Por tanto, las coordanadas de los vértices V y V' son $(a, 0)$ y $(-a, 0)$, respectivamente, y la longitud del eje tranverso es igual a $2a$, que es la constante que interviene en la definición. Aunque no hay intersección con el eje Y, dos puntos, $A\,(0, b)$ y $A'\,(0, -b)$, se toman como extremos del eje conjugado. Por tanto, la longitud del eje conjugado es igual a $2b$. La ecuación (8) muestra que la hipérbola es simétrica con respecto a ambos ejes coordenados y al origen. Despejando y de la ecuación (8), resulta:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \tag{9}$$

Por tanto, para que los valores de y sean reales, x está restringido a variar dentro de los intervalos $x \geq a$ y $x \leq -a$. De aquí que ninguna posición del lugar geométrico aparece en la región comprendida entre las rectas $x = a$ y $x = -a$.

Despejando x de la ecuación (8) se obtiene

$$x = \pm\frac{b}{a}\sqrt{y^2 + a^2}, \tag{10}$$

de cual vemos que x es real para todos los valores reales de y. Según esto, las ecuaciones (9) y (10), juntas, con la simétria del lugar geométrico, muestran que la hipérbola no es una curva cerrada sino que consta de dos ramas diferentes, una de las cuales se extiende indefinidamente hacia la derecha, arriba y abajo del eje X, y la otra se extiende indefinidamente hacia la izquierda y por arriba y abajo del eje X. La hipérbola (8) no tiene asíntotas verticales no horizontales. En el siguiente cálculo demostraremos, que la curva tiene dos asíntotas oblicuas. De la ecuación (9) y la relación (7), hallamos que la longitud de cada lado recto es $\frac{2b^2}{a}$. Como la elipse, la excentricidad e de una hipérbola está definida por la razón $\frac{c}{a}$. Por tanto, de (7), tenemos

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} \tag{11}$$

Como $c > a$, la excentricidad de una hipérbola es mayor que la unidad. Si el centro de una hipérbola está en el origen pero su eje focal coincide con el eje Y, hallamos, análogamente, que la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1 \tag{12}$$

Las ecuaciones (8) y (12) son las llamadas primeras ecuaciones ordinarias de la hipérbolas. Esto lo podemos resumir en el siguiente teorema.

Teorema 2.1 *La ecuación de centro en el origen, eje focal coincide con el eje X, y focos los puntos $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, es*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Si el eje focal coincide con el eje Y, de manera que las coordenas de los focos sean $(0, c)$ y $(0, -c)$, entonces la ecuación es

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1$$

Para cada hipérbola, a es la longitud del semieje transverso, b la del semieje conjugado, c la distancia del centro a cada foco, y a, b, c están relacionadas por

$$c^2 = a^2 + b^2$$

También, para cada hipérbola, la longitud de cada uno de sus lados rectos es $\frac{2b^2}{a}$, y la excentricidad e está dada por la relación

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$

como $c > a$, La excentricidad de una hipérbola es mayor que la unidad.

3. Asíntotas de la hipérbola

Si la ecuación de la hipérbola la escribimos de la forma

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \tag{13}$$

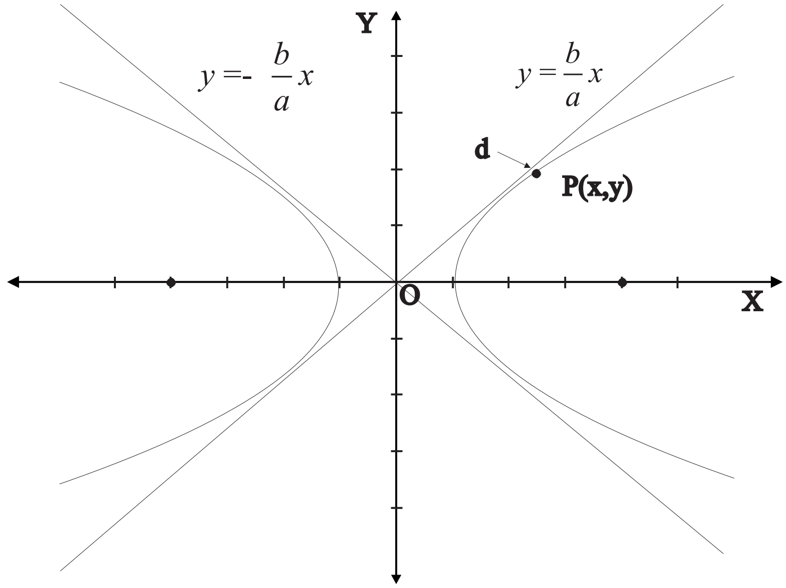

Figura 2:

despejando y, obtenemos

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

que puede escribirse en la forma

$$y = \pm \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}, \tag{14}$$

Frecuentemente se desea investigar lo que ocurre en una ecuación cuando una de las variables aumenta numéricamente sin límite. Si un punto de la hipérbola (13) se mueve a lo largo de la curva, de manera que su abscisa x aumenta numéricamente sin límite, el radical del segundo miembre de (14) se aproxima más y más a la unidad, y la ecuación toma la forma

$$y = \pm \frac{b}{a} x. \tag{15}$$

Como la ecuación (15) representa una recta $y = \frac{b}{a}x$ y $y = -\frac{b}{a}x$, esto nos conduce a inferir, de la definición de asíntota, que la hipérbola es asíntota a estas dos rectas. Ahora demostraremos que esta deducción es correcta.

Demostración 3.1 *Sea $P_1\,(x_1, y_1)$ un punto cualquiera de la parte superior de la rama derecha de la hipérbola (113), como se indica en la figura 2.La ecuación de la recta $y = \frac{b}{a}x$ puede escribirse de la forma*

$$bx - ay = 0 \tag{16}$$

Por tanto, la distancia d *de la recta (16) al punto* $P_1\,(x_1, y_1)$ *está dada por*

$$d = \frac{|bx_1 - ay_1|}{\sqrt{b^2 + a^2}} \tag{17}$$

Si multiplicamos numerador y denominador del segundo miembro de (17) por $|bx_1 + ay_1|$*, obtenemos*

$$d = \frac{|bx_1 - ay_1|}{\sqrt{b^2 + a^2}} \frac{|bx_1 + ay_1|}{|bx_1 + ay_1|} = \frac{\left|b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2\right|}{\sqrt{b^2 + a^2}\,|bx_1 + ay_1|} \tag{18}$$

Pero como P_1 *está sobre la hipérbola (16),* $b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2 = a^2 b^2$*, de manera que la ecuación (18) puede escribirse como*

$$d = \frac{a^2 b^2}{\sqrt{b^2 + a^2}\,|bx_1 + ay_1|} \tag{19}$$

Sí P_1 *se mueve hacia la derecha a lo largo de la curva y se aleja indefinidamente del origen, sus coordenadas,* x_1 *y* y_1*, aumentan ambas de valor sin límite, de manera que, por la ecuación (19),* d *decrece continuamente y se aproxima a cero. Se sigue, de acuerdo con esto, por la definición de asíntota, que la recta (16) es una asíntota de la rama derecha de la hipérbola (13). Si* P_1 *está sobre la parte inferior de la rama izquierda de la hipérbola (13) y se mueve hacia la izquierda a lo largo de la curva alejandose indefinidamente del origen, entonces sus coordenadas* x_1 *y* y_1 *aumentan de valor ambas sin límite en la dirección negativa. La ecuación (19) muestra entonces que* d *decrece continuamente y tiende a cero, de donde se sigue que la recta (16) es también una asíntota de la rama izquierda de la hipérbola (13). Quedan dos casos por considerar que son cuando* P_1 *está sobre la parte inferior de la rama derecha y cuando está sobre la parte superior de la rama izquierda. Empleando el mismo razonamiento que en los párrafos anteriores, podemos demostrar que la recta* $bx + ay = 0$*, es una asíntota de ambas ramas de la hipérbola (13). Esto lo enunciamos en el siguiente teorema.*

Teorema 3.1 *La hipérbola* $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$*, tiene por asíntotas las rectas* $bx - ay = 0$ *y* $bx + ay = 0$*.*