La Elipse

César Román Martínez García
Conalep Aztahuacan

11 de noviembre de 2005

Resumen

Estudiaremos la ecuación de la cónica que lleva por nombre Elipse, veremos los dos tipos de elipses mas faciles de graficar que son la elipse horizontal y la elipse vertical, resolveros problemas tipicos de física donde esten involucradas las elipses.

1. Elipse

Se an obtenido ecuaciones de segundo grado para la circunferencia y la parábola. Ahora se verá otro tipo de curvas que, como la circunferencia pero a diferencia de la parábola, es una curva cerrada. La nueva curva es una *cónica* por que, como se demostrará, su ecuación, es de segundo grado en x y y.

Definición 1 *Una elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos.*

Los dos puntos fijos se llaman *focos de la elipse*. Note que la definición de la elipse excluye el caso en que el puno móvil esté sobre el segmento que une los focos. Designaremos por F y F' (fig. 1) los focos de una elipse, la recta l que pasa por los focos tiene varios nombres; veremos que es conveniente introducir los términos de eje focal para designar esta recta. El eje focal como podemosr ver corta a le elipse en dos puntos, V y V', llamados *vértices*. La porción del eje focal comprendida entre los vértices, el segmento $\overline{VV'}$, se llama *eje mayor*. El punto C del eje focal, punto medio de segmento que une los focos, se llama centro, la recta l' que pasa por C y es perpendicular al eje focal l se llama *eje normal*, el eje normal corta a la elipse en dos puntos, A y A', y el segmento $\overline{AA'}$ se llama *eje menor*. La recta LL', perpendicular al eje focal l se llama *lado recto*, evidentemente como la elipse tiene dos focos, tiene también dos lados rectos. Sí P es un punto cualquiera de la elipse, los segmentos $\overline{FP}$ y $\overline{F'P}$ que unen los focos con el punto P se llaman radios vectores de P.

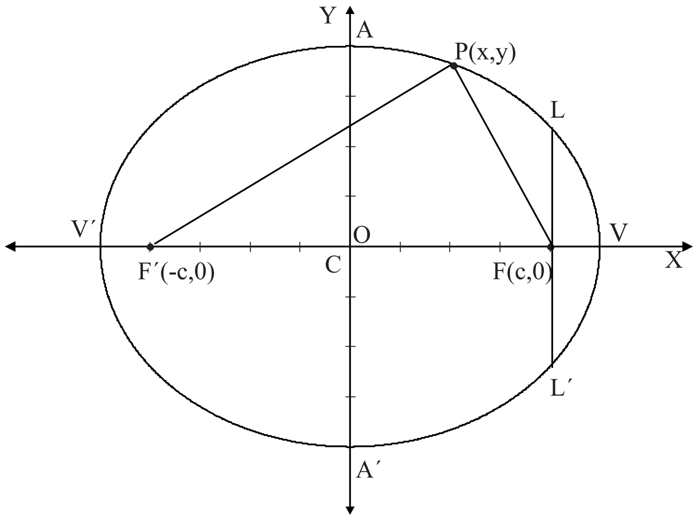

Figura 1: Grafíca de la elipse con centro en el origen, focos en $F'(-c, 0)$ y $F(c, 0)$

2. Ecuación de la elipse de centro en el origen y ejes de coordenadas los ejes de la elipse

Consideremos la elipse de centro en el origen y cuyo eje focal coincide con el eje X (fig. 1). Los focos F y F' están sobre el eje X. Como el centro O es el punto medio del segmento $\overline{FF'}$, las coordenadas de F y F' serán, por ejemplo, $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, respectivamente, siendo c una constante positiva. Sea $P\,(x, y)$ un punto cualquiera de la elipse. Por la definición de la curva, el punto P debe satisfacer la condición geométrica

$$\left|\overline{FP}\right| + \left|\overline{F'P}\right| = 2a \tag{1}$$

en donde a es una constante positiva mayor que c. Recordando la fórmula para la distancia entre dos puntos $P_1\,(x_1, y_1)$ y $P_2\,(x_2, y_2)$ dada por

$$\left|\overline{P_2P_1}\right| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$$

tenemos que $\left|\overline{FP}\right|$ y $\left|\overline{F'P}\right|$ están dados por

$$\left|\overline{FP}\right| = \sqrt{\left(x - c\right)^2 + y^2}, \qquad \left|\overline{F'P}\right| = \sqrt{\left(x + c\right)^2 + y^2}$$

de manera que con la condición geométrica (1) está expresada analíticamente por la ecuación

$$\sqrt{\left(x - c\right)^2 + y^2} + \sqrt{\left(x + c\right)^2 + y^2} = 2a \tag{2}$$

Para simplificar la ecuación (2), pasamos el segundo radical al segundo miembro, elevamos al cuadrado, simplificamos y agrupamos los términos semejantes. Esto nos da

$$cx + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Elevando al cuadrado nuevamente, obtenemos

$$c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 + 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2$$

de donde,

$$\left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right) \tag{3}$$

Como $2a > 2c$ es $a^2 > c^2$ y $a^2 - c^2$ es un número positivo entoces definimos como b^2 a la siguiente cantidad

$$b^2 = a^2 - c^2 \tag{4}$$

Sí remplazamos en la ecuación (3), $a^2 - c^2$ por b^2, obtenemos

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

y dividiendo por a^2b^2, se obtiene, finalmente,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{5}$$

Sí en la ecuación (5) despejamos y, obtenemos

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \tag{6}$$

Luego se tienen valores reales de y solamente para valores de x en el intervalo

$$-a < x < a \tag{7}$$

Sí en la ecuación (5) depejamos x, obtenemos

$$x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$$

de manera que obtenemos valores reales de x, solamente para valores de y dentro del intervalo

$$-b < y < b \tag{8}$$

De (7) y (8) se deduce que la elipse está limitada por el rectángulo cuyos lados son las rectas $x = \pm a$, y $y = \pm b$. Por tanto la elipse es una curva cerrada. Note que la elipse no tiene asíntotas verticales ni horizontales. La abscisa del foco F es c. Sí en (6) sustituímos x por este valor se obtiene las ordenadas correspondientes que son

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - c^2}$$

de donde, por la relación (4),

$$y = \pm\frac{b^2}{a}$$

Por tanto, la longitud del lado recto para el foco F es $\frac{2b^2}{a}$. Análogamente, la longitud del lado recto para el foco F' es $\frac{2b^2}{a}$. Un elemento importante de una elipse es su excentricidad que se define como la razón $\frac{c}{a}$ y se representa usualmente por la letra e. De la ecuación (4) tenemos

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \tag{9}$$

Como $c < a$, la excentricidad de una elipse es menor que la unidad.

Los resultados anteriores se pueden resumir en el siguiente teorema

Teorema 2.1 La ecuación de una elipse de centro en el origen, eje focal X, distancia focal igual a $2c$ y cantidad constante igaul a $2a$ es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Sí el eje focal de la elipse coincide con el eje Y, de manera que las coordenadas de los focos sean $(0, c)$ y $(0, -c)$, la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Para cada elipse, a es la longitud del semieje mayor, b la del semieje menor, y a, b y c están relacionados por la relación

$$a^2 = b^2 + c^2$$

También, para cada elipse, la longitud de cada lado recto es $\frac{2b^2}{a}$ y la excentricidad e está dada por la fórmula

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1$$

3. Ecuación de la elipse con centro en (h, k) y ejes paralelos a los ejes coordenados

Ahora consideremos la determinación de la ecuación de una elipse cuyo centro no está en el origen y cuyo ejes son paralelos a los ejes coordenados. Según esto, considere la elipse cuyo centro está en el punto (h, k) y cuyo eje focal es paralelo al eje X tal como se indica en la figura 2.

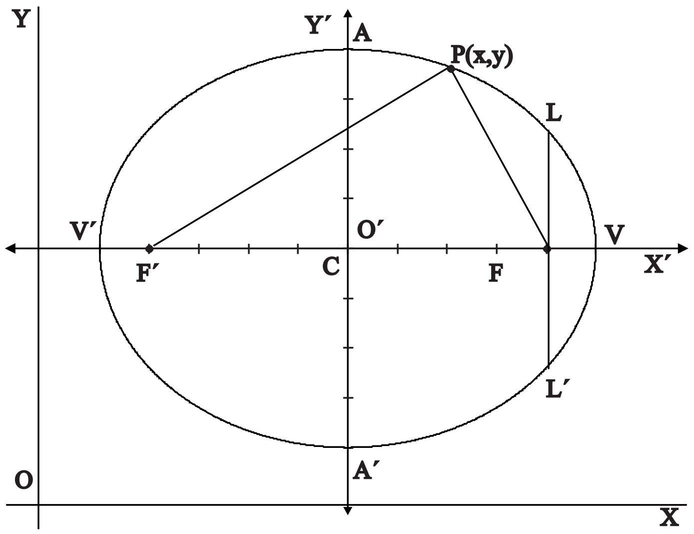

Figura 2:

Sean $2a$ y $2b$ las longitudes de los ejes mayor y menor de la elipse, respectivamente. Sí los ejes coordenados son trasladados de manera que el nuevo origen O' coincida con el centro (h, k) de la elipse, se sigue, del teorema 1, que la ecuación de la elipse con referencia a los nuevos ejes X' y Y' esta dada por

$$\frac{x'}{a^2} + \frac{y'}{b^2} = 1 \tag{10}$$

De la ecuación (10) puede dedudirse la ecuación de la elipse referida a los ejes originales X y Y usando las ecuaciónes de transformación a saber:

$$x = x' + h, \qquad y = y' + k$$

de donde:

$$x' = x - h, \qquad y' = y - k$$

Sí sustituimos estos valores de x' y y' en la ecuación (10), obtenemos

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \tag{11}$$

que es la ecuación de la elipse referida a los ejes originales X y Y. Análogamente, podemos demostrar que la elipse cuyo centro es el punto (h, k) y cuyo eje focal es paralelo al eje Y tiene por ecuación

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \tag{12}$$

La ecuación (11) y (12) se llaman, generalmente, la segunda ecuación ordinaria de la elipse, estos resultados los podemos enunciar en el siguiente teorema.

Teorema 3.1 La ecuación de la elipse con centro en el punto (h, k) y eje focal paralelo al eje X, está dada por la segunda forma ordinaria,

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Sí el eje focal es paralelo al eje Y, su ecuación está dada por la segunda forma ordinaria

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Para cada elipse, a es la longitud del semieje mayor, b es la del semieje menor, c es la distancia del centro a cada foco, y a, b y c están ligadas por la relación

$$a^2 = b^2 + c^2$$

También, para cada elipse, la longitud de cada uno de sus lados rectos es $\frac{2b^2}{a}$, y la excentricidad e está dada por la relación

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1$$

Ahora sí consideramos la ecuación de la elipse en la forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \tag{13}$$

Sí quitamos denominadores, desarrollamos, transponemos y ordenamos términos, obtenemos

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2hx - 2a^2ky + b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2 = 0 \tag{14}$$

La cual puede escribirse en la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{15}$$

en donde, $A = b^2$, $C = a^2$, $D = -2b^2h$, $E = -2a^2k$ y $F = b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2$. Evidentemente, los coeficientes A y C deben ser del mismo signo. Reciprocamente, consideremos una ecuación de la forma (15) y reduzcámosla a la forma ordinaria (13) completando cuadrados. Obtenemos

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{C} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} = \frac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4A^2C^2} \tag{16}$$

Sea $M = \frac{CD^2+AE^2-4ACF}{4A^2C^2}$. Sí $M \neq 0$, la ecuación (16) puede escribirse de la forma

$$\frac{\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2}{MC}+\frac{\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2}{MA}=1 \tag{17}$$

que es la ecuación ordinaria de una elipse. Como A y C deben concordar en signo, podemos suponer sin perdida de generalidad, que son ambos positivos. Por lo tanto, si (15) debe representar una elipse, la ecuación (17) demuestra que M debe ser de signo positivo. El denominador $4A^2C^2$ de M es positivo; por tanto, el signo de M depende del numerador $CD^2 + AE^2 - 4ACF$, al que designaremos por N. De acuerdo con esto, comparando las ecuaciones (16) y (17), vemos que, sí $N > 0$, (15) representa una elipse; de (16), sí $N = 0$, (15) representa un punto único

$$\left(-\frac{D}{2A},-\frac{E}{2C}\right)$$

Llamado usualmente una elipse punto, y sí $N < 0$, la ecuación (16) muetra que (15) no representa ningún lugar geométrico real. Eston resultados los podemos enunciar en el siguiente teorema.

Teorema 3.2 *Sí los coeficientes A y C son del mismo signo, la ecuación*

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representa una elipse de ejes paralelos a los coordenados, o bien un punto, o no representa ningún lugar geométrico real.

Acontinuación se enunciaran algunos teoremas importantes de la elipse su demostración se encuantra en el apéndice.

Teorema 3.3 *La tangente a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ en cualquier punto $P_1(x_1, y_1)$ de la curva tiene por ecuación*

$$b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2$$

Teorema 3.4 *Las ecuaciones de las tangentes de pendiente m a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ son*

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

En resumen la elipse tiene las siguientes caracteristicas:

- Centro en el origen
  - Eje focal en el eje X $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;\ a > b$
  - Eje focal en el eje Y $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1;\ a > b$
- Centro en (h, k)
  - Eje focal paralelo al eje X $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1;\ a > b$
  - Eje focal paralelo al eje Y $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1;\ a > b$
- Longitud del lado recto $\frac{2b^2}{a}$

- Longitud del eje mayor $2a$
- Longitud del eje menor $2b$
- distancia entre focos $2c$; $c^2 = a^2 - b^2$
- Ecuación general $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$