La Circunferencia

César Román Martínez García
cesaroma@esfm.ipn.mx, macrosss666@hotmail.com
Conalep Aztahuacan

18 de noviembre de 2005

Resumen

Estudiaremos la ecuación de la circunferencia

1. Circunferencia

La ecuación de la circunferencia se obtendrá a partir de lo siguiente

Definición 0.1 *Circunferencia es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que se conserva siempre a una distancia constante de un punto fijo de ese plano.*

El punto fijo se llama *centro* de la circunferencia, y la distancia constante se llama *radio*.

Teorema 1.1 *La circunferencia cuyo centro es el plano (h, k) y cuyo radio es la constante r, tiene por ecuación*

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Demostración 1.1 *Sea $P(x, y)$ (figura 1) un punto cualquiera de la circunferencia de centro $C(h, k)$ y radio r. Entonces por definición de circunferencia, el punto P debe satisfacer la condición geométrica*

$$\left|\overline{CP}\right| = r, \tag{1}$$

la cual, por la fórmula de distancia entre dos puntos, puede ser expresada, analíticamente, por la ecuación

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r,$$

de donde,

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2. \tag{2}$$

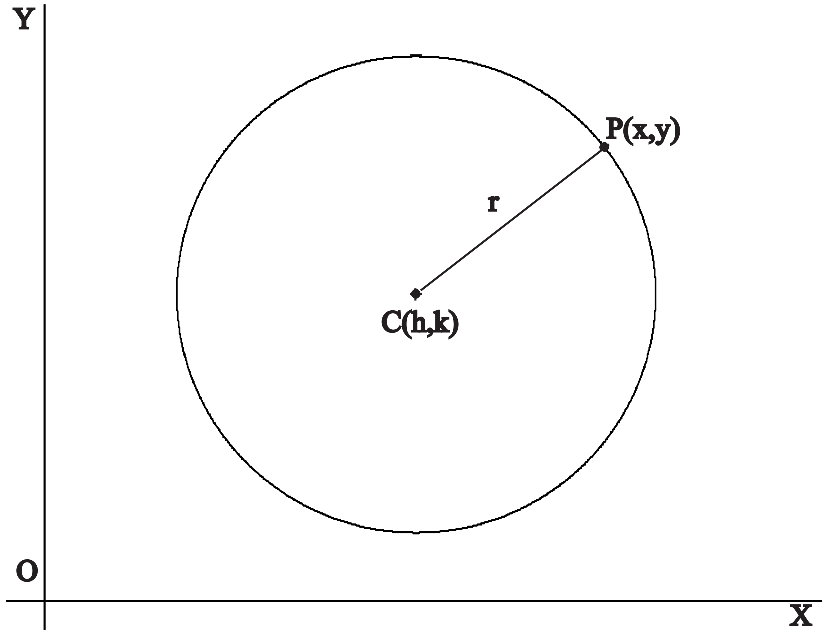

Figura 1: Esta figura muestra la circunferencia de centro (h, k), y radio r.

Reciprocamente, sea $P_1(x_1, y_1)$ un punto cualquiera cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (2), de manera que se verifica la igualdad

$$(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 = r^2.$$

De aquí se deduce, extrayendo la raíz cuadrada,

$$\sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2} = r,$$

que es la expresión analítica de la condición geométrica (1) aplicada al punto P_1. Esto demuestra el teorema.

Corolario 0.1 *La circunferencia de centro en el origen y radio r tiene por ecuación*

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Demostración 1.2 *La demostración es inmediata, para la circunferecia que tiene centro C en el origen, tiene por coordenadas a $h = k = 0$, y tenemos:*

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = r^2,$$

o sea,

$$x^2 + y^2 = r^2$$

2. Forma general de la ecuación de la circunferencia

Sí desarrollamaos la ecuación ordinaria

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \tag{3}$$

obtenemos

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0,$$

la cual puede escribirse en la forma

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{4}$$

en donde

$$D = -2h, \quad E = -2k, \quad F = h^2 + k^2 - r^2.$$

Se deduce, por lo tanto, que la ecuación de una circunferencia cualquiera puede escribirse en la forma (4), llamada *forma general* de la ecuación de la circunferencia. El problema que se presenta ahora es averiguar si, reciprocamente, toda ecuación de la forma general (4) a la forma (3) empleando el método de completar cuadrados. Primero ordenando los términos de (4), resulta

$$\left(x^2 + Dx\right) + \left(y^2 + Ey\right) = -F$$

sumando $\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4}$ a ambos miembros, obtenemos

$$\left(x^2 + Dx + \frac{D^2}{4}\right) + \left(y^2 + Ey + \frac{E^2}{4}\right) = -F + \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} = \frac{D^2 + E^2 - F}{4},$$

de donde,

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}. \tag{5}$$

Comparando la ecuación (3) y (5), vemos que depende del valor del segundo miembro de (5) el que (5) representa o no a una circunferencia. Hay tres casos posibles por conciderar:

a Sí $D^2 + E^2 - 4F > 0$, la ecuación (5) representa una circunferencia de centro en el punto $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ y radio igual a $r = \frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$.

b Sí $D^2 + E^2 - 4F = 0$, la ecuación (5) se dice, con frecuencia que representa una circunferencia de radio cero; se dice tambien que es un punto ó círculo nulo. La ecuación (5) representa un solo punto de coordenadas $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$.

c Sí $D^2 + E^2 - 4F < 0$, la ecuación (5) se dice que representa un círculo imaginario. En nuestra geometría real, sin embargo, la ecuación (5) *no representa*, en este caso, un *lugar geométrico*.

Esto resultados los podemos enunciar en el siguiente teorema

Teorema 2.1 *La ecuación* $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ *representa una circunferencia de radio diferente de cero, solamente sí*

$$D^2 + E^2 - 4F > 0.$$

Las coordenadas del centro son, $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ *y el radio es* $\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$.