

GEOMETRIA ANALITICA

CÉSAR ROMÁN MARTÍNEZ GARCÍA

The Date

Índice general

Introducción	vii
I GEOMETRÍA ANALÍTICA	1
1. LINEA RECTA	3
1.1. Relación	3
1.2. Función	4
1.3. Coordenadas Rectangulares	5
1.4. Distancia entre dos puntos	6
1.5. Fórmula del punto medio	6
1.6. Pendiente de una recta	7
1.7. Ángulo entre dos rectas	9
1.8. Ecuación de la recta en su forma pendiente ordenada	10
1.9. Ecuación de la recta en su forma punto pendiente	11
1.10. Ecuación de la recta dados dos puntos	11
1.11. Ecuación de la recta en su forma reducida	12
1.12. Ecuación normal de la recta	12
1.13. Ecuación general de la recta	14
1.14. Distancia de un punto a una recta	15
2. Circunferencia	17
2.1. Ecuación general de la circunferencia	18
3. Parábola	21

Prefacio

This is the preface. It is an unnumbered chapter. The `markboth` TeX field at the beginning of this paragraph sets the correct page heading for the Preface portion of the document. The preface does not appear in the table of contents.

Introducción

The introduction is entered using the usual chapter tag. Since the introduction chapter appears before the `mainmatter` TeX field, it is an unnumbered chapter. The primary difference between the preface and the introduction in this shell document is that the introduction will appear in the table of contents and the page headings for the introduction are automatically handled without the need for the `markboth` TeX field. You may use either or both methods to create chapters at the beginning of your document. You may also delete these preliminary chapters.

Parte I

**GEOMETRÍA
ANALÍTICA**

Capítulo 1

LINEA RECTA

This is the body (mainmatter) of the Standard LaTeX Book shell document.

The front matter has a number of sample entries that you should replace with your own. Replace this text with the body of your book. Do not delete the `mainmatter` TeX field found above in a paragraph by itself or the numbering of different objects will be wrong.

Changes to the typeset format of this shell and its associated L^AT_EX formatting file (`book.cls`) are not supported by MacKichan Software, Inc. If you wish to make such changes, please consult the L^AT_EX manuals or a local L^AT_EX expert.

If you modify this document and export it as “Standard LaTeX Book.shl” in the `Shells\Standard LaTeX` directory, it will become your new Standard LaTeX Book style shell.

1.1. Relación

Una relación es un conjunto de pares ordenados de números. El conjunto de todos los primeros elementos presentes en una relación es el dominio de la relación, y el conjunto de los segundos elementos es la imagen de la relación. Ejemplo:

$$\begin{array}{ccc} (-5 & , & 5) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Dominio} & & \text{Imagen} \end{array}$$

En siguiente ejercicio consiste en un conjunto R de pares ordenados encuentre el dominio y la imagen de ese conjunto.

$$R = \{(-5, 5), (-4, 2), (-2, 2), (0, 1), (0, 3), (2, -4), (3, 4)\}$$

El dominio está dado por el conjunto D y la imagen por el conjunto I , como se muestra a continuación.

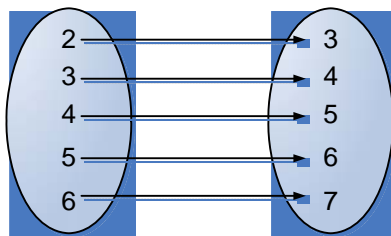


Figura 1.1:

$$D = \{-5, -4, -2, 0, 2, 3\}$$

$$I = \{5, -4, -3, -2, 1, 2, 4\}$$

1.2. Función

Una función es una relación en donde no hay dos elementos de pares ordenados que tengan igual el primer elemento y distintos los segundos elementos. Ejemplos

$$R = \{(2, 3), (3, 4), (4, 5), (6, 7)\}$$

El conjunto R es una función por que a un solo elemento del dominio le corresponde un elemento de la imagen, graficamente lo podemos ver de la siguiente manera.

El siguiente es un ejemplo de lo que no es una función.

$$R = \{(2, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 6), (5, 5), (6, 7)\}$$

El conjunto R no es una función pues los pares ordenados $(2, 3)$ y $(2, 4)$ tienen el mismo valor en el dominio pero distinto valor de la imagen lo que contradice la definición de función, esto se puede mostrar graficamente en el siguiente esquema.

Al par ordenado (x, y) se le acostumbra llamar par xy y a la variable x como variable independiente mientras que a y como variable dependiente, veamos esto en un ejemplo.

El Area de un circulo es

$$A = \pi r^2$$

La variable independiente seria r , y la variable dependiente seria A .

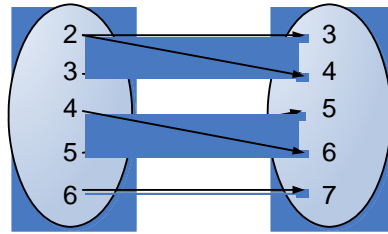


Figura 1.2:

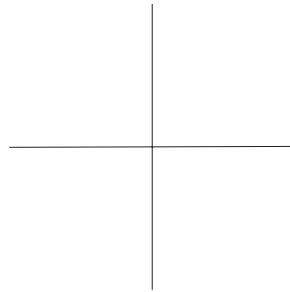


Figura 1.3:

1.3. Coordenadas Rectangulares

Sí en un plano dibujamos dos rectas perpendiculares y graduamos a partir de su punto de intersección, tendríamos un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, el punto de intersección de las rectas perpendiculares recibe el nombre de origen.

La recta horizontal se llama eje x ó eje de las abscisas y la recta vertical se llama eje y ó eje de ordenadas. Considerandos juntos, se llaman ejes coordenados, y el plano determinado por los tres ejes coordenados se llama plano coordenado.

Definición Abscisa de un punto es el número que mide, en magnitud y signo, la distancia del origen a la proyección del punto sobre el eje x .

Ordenada de un punto es el número que mide en magnitud y signo la distancia del origen a la proyección del punto sobre el eje y .

Nota a cualquier par ordenado de números reales (coordenadas) le corresponde un punto definido, reciprocamente, a cada punto del plano le corresponde un par definido de coordenadas. Esto se conoce como el segundo principio de la geometría analítica.

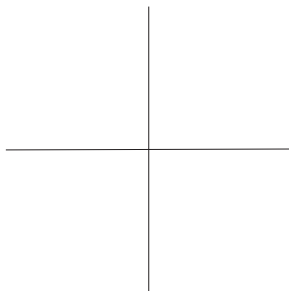


Figura 1.4:

1.4. Distancia entre dos puntos

Podemos establecer una fórmula general para calcular la distancia entre dos puntos cualesquiera. Donde la distancia entre dos puntos la identificaremos con la letra d .

De la figura podemos observar que se forma un triángulo cuyos catetos son las diferencias de las coordenadas $x_2 - x_1$ y $y_2 - y_1$, y la distancia d corresponde a la hipotenusa.

$$d^2 = \overline{P_1P_2}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

1.5. Fórmula del punto medio

Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ los extremos de un segmento. Sea R el punto que divide el segmento \overline{AB} en forma tal que se tenga:

$$\frac{\overline{AR}}{\overline{AB}} = r \quad (\text{razón dada})$$

Considerando los triángulos semejantes $\triangle AIR$ y $\triangle AGB$, se puede observar que:

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{AR}}{\overline{AB}} = r$$

$$\frac{\overline{IR}}{\overline{GB}} = \frac{\overline{AR}}{\overline{AB}} = r$$

siendo

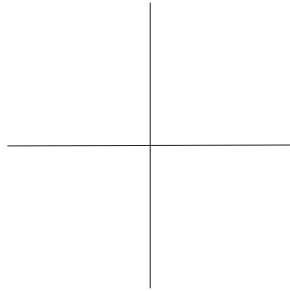


Figura 1.5:

$$\begin{aligned}\overline{AI} &= x_R - x_1 \\ \overline{AG} &= x_2 - x_1 \\ \overline{IR} &= y_R - y_1 \\ \overline{GB} &= y_2 - y_1\end{aligned}$$

Entonces de las igualdades se obtiene:

$$\frac{x_R - x_1}{x_2 - x_1} = r \implies x_R = x_1 + r(x_2 - x_1)$$

$$\frac{y_R - y_1}{y_2 - y_1} = r \implies y_R = y_1 + r(y_2 - y_1)$$

Como caso particular tenemos $r = \frac{1}{2}$, entonces.

$$\begin{aligned}x_R &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y_R &= \frac{y_1 + y_2}{2}\end{aligned}$$

Estas son las fórmulas para las coordenadas del punto medio.

1.6. Pendiente de una recta

La inclinación de una recta que interseca el eje x es el menor ángulo, mayor ó igual que 0° , que forma la recta con la dirección positiva del eje x , la inclinación θ de una recta es tal que $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$.

Definición La pendiente de una recta es la tangente de la inclinación.

$$\tan \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m \text{ con } m \text{ la pendiente de la recta}$$

Nota

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-(y_1 - y_2)}{-(x_1 - x_2)} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

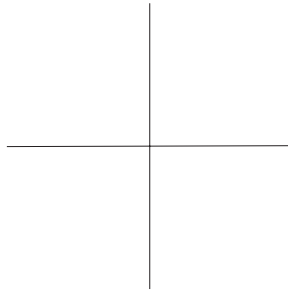


Figura 1.6:

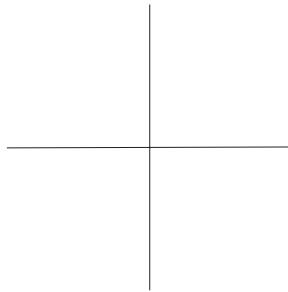


Figura 1.7:

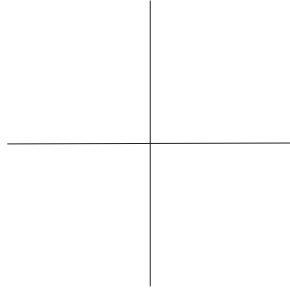


Figura 1.8:

Teorema Dos rectas no verticales son paralelas sí, y solo sí, sus pendientes son iguales.

ℓ_1 y ℓ_2 son paralelas sí, sus pendientes m_1 y m_2 son iguales.

1.7. Ángulo entre dos rectas

Sí ϕ es el ángulo, medido en dirección contraria al giro de las manecillas del reloj, entre dos rectas, entonces

$$\tan \phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

Demostración

$$\phi + \theta_1 = \theta_2 \implies \phi = \theta_2 - \theta_1$$

Mediante la fórmula para la tangente de la diferencia de los ángulos, se tiene que

$$\tan \phi = \tan(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\tan \theta_2 - \tan \theta_1}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2}$$

Sí $m_2 = \tan \theta_2$ y $m_1 = \tan \theta_1$, se tiene que

$$\tan \phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} \text{ ó } \tan \psi = -\tan \phi$$

De este resultado podemos calcular que para que dos rectas sean paralelas

$$\phi = 0^\circ \implies \tan \phi = 0 \therefore \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} = 0 \text{ sí } 1 + m_2 m_1 \neq 0 \implies m_2 = m_1$$

Esta es la condición para que las rectas sean paralelas $m_2 = m_1$.

Análogamente podemos obtener la condición para que las rectas sean perpendiculares, esto es cuando

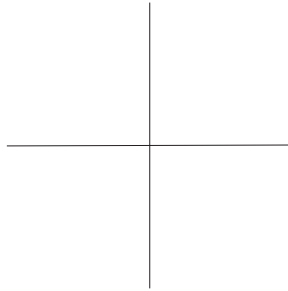


Figura 1.9:

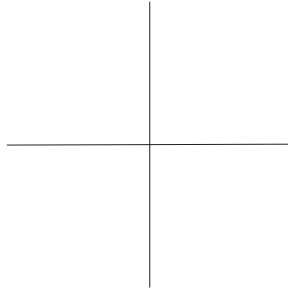


Figura 1.10:

$$\phi = 90^\circ \implies \tan \phi \longrightarrow \infty \therefore \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} \longrightarrow \infty \text{ sí } 1 + m_2 m_1 = 0 \implies m_2 m_1 = -1$$

Esta es la condición para que las rectas sean perpendiculares $m_2 m_1 = -1$.

1.8. Ecuación de la recta en su forma pendiente ordenada

La ecuación de la recta en su forma pendiente ordenada es la forma más usual para representar a una recta, esta se escribe de la siguiente forma, la ordenada al origen es $(0, b)$ en base a esto podemos calcular la pendiente m de la ordenada al origen $(0, b)$ a un punto $P(x, y)$ de la siguiente manera

$$m = \frac{y - b}{x - 0} \implies y = mx + b$$

ecuación de la recta en su forma ordenada al origen $y = mx + b$.

1.9. Ecuación de la recta en su forma punto pendiente

La ecuación de la recta la podemos obtener si conocemos la pendiente y la ordenada al origen y la forma de hacerlo lo acabamos de ver, pero a lo mejor lo que no conocemos es la ordenada al origen es decir, solo conocemos la pendiente m y un punto (x_1, y_1) por donde pasara la recta, entonces la manera de encontrar la ecuación de la recta es de la siguiente forma:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$

Así

$$y = mx + (y_1 - mx_1)$$

Es la ecuación de la recta que tiene pendiente m y que pasa por el punto (x_1, y_1) .

1.10. Ecuación de la recta dados dos puntos

Otro problema muy usual en la geometría es la de calcular la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, el punto $P_1(x_1, y_1)$ y el punto $P_2(x_2, y_2)$, la manera de resolver este problema es la siguiente, si conocemos los dos puntos por donde pasa la recta podemos calcular la pendiente de esos dos puntos mediante la ecuación:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ya calculada la pendiente m de los puntos de interes, el siguiente paso consiste el tomar la pendiente m y ya sea el punto P_1 ó el punto P_2 y sustituirlo en la ecuación punto pendiente obteniéndose la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

Sí se toma el punto $P_1(x_1, y_1)$ y la pendiente m se tiene

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ y } P_1(x_1, y_1) \Rightarrow y = mx + (y_1 - mx_1)$$

es decir

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \Rightarrow y = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)x + \left(y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1\right)$$

De manera analógica se tiene el resultado si se toma en vez de $P_1(x_1, y_1)$ el punto $P_2(x_2, y_2)$, veámoslo

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ y } P_2(x_2, y_2) \Rightarrow y = mx + (y_2 - mx_2)$$

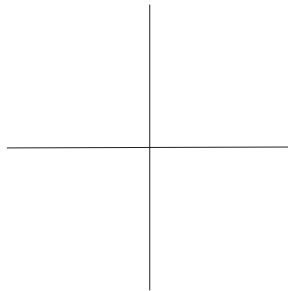


Figura 1.11:

es decir

$$y - y_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2) \implies y = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) x + \left(y_2 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_2 \right)$$

Independiente mente de que punto se toma ya sea $P_1(x_1, y_1)$ ó $P_2(x_2, y_2)$, el resultado es el mismo.

1.11. Ecuación de la recta en su forma reducida

La ecuación de la recta en su forma reducida es tambien conocida como ecuación de la recta con abscisa y ordenada en el origen, la ventaja que presenta en escribir la ecuación de la recta en su forma reducida es que apartir de la ecuación y sin necesidad de calculos podemos graficar la recta pues se conocen los puntos donde la recta corta al eje de las abscisas y ordenadas. Esta ecuación se obtiene a partir de la ecuación de la recta en su forma $y = mx + b$.

$$y = mx + b \implies y - mx = b \implies \frac{y}{b} + \frac{x}{-\frac{b}{m}} = 1$$

Sí definimos las siguiente variable como $a = -\frac{b}{m}$ se tiene:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ con } a, b \neq 0$$

cuya grafica se muestra a continuación

cabe notar que los valores de a y b seben de ser distintis de cero

1.12. Ecuación normal de la recta

Una recta queda determinada sí se conoce la recta perpendicular trazada a ella desde el origen $(0, 0)$ y el ángulo que dicha perpendicular forma con el eje x .

Utilizando la identidad $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$ obtenemos
La pendiente m de la recta \overline{AC} es

$$m = -\frac{1}{\tan \theta} = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$ de la figura tenemos que

$$x_1 = r \cos \theta \quad y_1 = r \sin \theta$$

\implies

$$m = -\frac{\frac{x_1}{r}}{\frac{y_1}{r}} = -\frac{x_1}{y_1}$$

Ahora utilicemos la ecuación de la recta en su forma punto pendiente $y - y_1 = m(x - x_1)$.

$$y - r \sin \theta = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta}(x - r \cos \theta)$$

\implies

$$y \sin \theta - r \sin^2 \theta = -x \cos \theta + r \cos^2 \theta$$

\implies

$$y \sin \theta + x \cos \theta = r(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$$

\implies

$$y \sin \theta + x \cos \theta = r$$

Esta es la ecuación de la recta en su forma normal

Otra forma de obtener la ecuación es la siguiente, apartir de la ecuación de la recta en su forma coordenadas al origen

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

como

$$\cos \theta = \frac{x_1}{r} \text{ y } \sin \theta = \frac{y_1}{r}$$

además se tiene que

$$\cos \theta = \frac{x_1}{a} \text{ y } \sin \theta = \frac{y_1}{b} \implies a = \frac{r}{\cos \theta} \text{ y } b = \frac{r}{\sin \theta}$$

\implies

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \implies \frac{x}{\frac{r}{\cos \theta}} + \frac{y}{\frac{r}{\sin \theta}} = 1$$

\implies

$$\frac{x \cos \theta}{r} + \frac{y \sin \theta}{r} = 1 \implies x \cos \theta + y \sin \theta = r$$

1.13. Ecuación general de la recta

La ecuación general de la recta como su nombre lo dice es la ecuación mas general y apartir de ella se pueden reproducir todas las ya mencionadas de la recta, la ecuación general de la recta es.

$$Ax + By + C = 0$$

Donde los coeficientes A, B y C pueden tomar cualquier valor, como ejemplos obtengamos las ecuaciones de la recta en su forma pediente m y ordenada b . Se se obiene despejando a la variable y .

$$Ax + By + C = 0 \implies y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Sí defimos a $m = -\frac{A}{B}$ y $b = -\frac{C}{B}$, con la condición de que $B \neq 0$, se tiene que

$$y = mx + b \text{ con } m = -\frac{A}{B} \text{ y } b = -\frac{C}{B} \text{ sí } B \neq 0$$

Ahora obtengamos la ecuación de la recta en su forma coordenadas al origen, la manera de obtener esta ecuación a partir de la ecuación general consiste en despejar a C de la ecuación general de la recta y despues dividir toda la expresión con el termino $-C$ claro con la condición de que $C \neq 0$.

$$Ax + By + C = 0 \implies Ax + By = -C \implies \frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = 1$$

Sí desinimos a como $a = -\frac{C}{A}$ y $b = -\frac{C}{B}$ se tiene que la ecuación toma la forma

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ con } a = -\frac{C}{A} \text{ y } b = -\frac{C}{B}$$

Por ultimo pasemos de la forma general de la recta a la forma normal para ello recordemos que tanto la ecuación general de la recta como la ecuación normal de la recta representan una misma recta escrita en forma distinta por lo tanto sus coeficientes de ambas ecuaciones deben de ser los mismos osea iguales.

$$Ax + By + C = 0 \text{ y } x \cos \theta + y \sin \theta = r$$

\implies

$$\frac{\cos \theta}{A} = \frac{\sin \theta}{B} = -\frac{r}{C} = k, \text{ con } k = cte$$

\implies

$$\begin{aligned} \cos \theta &= kA \\ \sin \theta &= kB \\ -r &= kC \end{aligned}$$

Elevando $\cos \theta = kA$ y $\sin \theta = kB$ al cuadrado y sumando se obtiene

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = (kA)^2 + (kB)^2 = k^2(A^2 + B^2) = 1$$

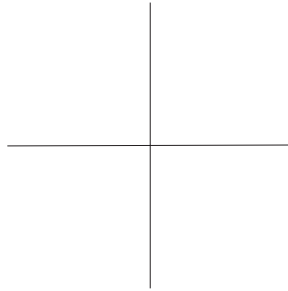


Figura 1.12:

\Rightarrow

$$k = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

\therefore

$$\cos \theta = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin \theta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad -r = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

en la que se debe considerar el signo del radical opuesto al de C . Si $C = 0$, el signo de radical se considera igual a de B .

1.14. Distancia de un punto a una recta

La distancia d del punto $P_1(x_1, y_1)$ a la recta $Ax + By + C = 0$, se obtiene como:

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

En donde el signo del radical debe ser opuesto al signo de C . Si $C = 0$, entonces se toma arbitrariamente el signo positivo ó negativo en el radical y no considerar interpretación geométrica al signo de la distancia. Si se trata de hallar la distancia d entre dos rectas paralelas

$$Ax + By + C_1 = 0$$

$$Ax + By + C_2 = 0$$

la fórmula para obtenerla es:

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Capítulo 2

Cirunferencia

Ya se vio como se escribe la ecuación de una recta cuya posición en el plano coordenado se especifica. Ahora de descubrirá que es igual mente fácil escribirla la ecuación de una circunferencia, si se conoce la localización de su centro y el radio.

Definición Una circunferencia es el conjunto de todos los puntos sobre un plano que son equidistantes de un punto fijo sobre el plano. El punto fijo se llama centro y la distancia del centro a cualquier punto de la circunferencia se llama radio.

Sea el centro de la circunferencia el punto fijo $c(h, k)$ y sea el radio igual a r . Entonces, si $P(x, y)$ es cualquier punto de la cirunferencia, la distancia de c a P es igual a r entonces.

$$r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$$

\Rightarrow

$$r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$$

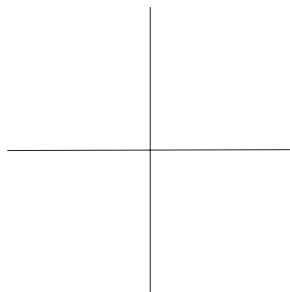


Figura 2.1:

Esta última ecuación es la ecuación de la circunferencia con centro en $c(h, k)$ y radio r . Como caso particular si la circunferencia está en el origen la ecuación es $h = 0$ y $k = 0$ entonces

$$r^2 = x^2 + y^2$$

2.1. Ecuación general de la circunferencia

La ecuación general de la circunferencia se obtiene a partir de la ecuación de la circunferencia para ello lo que se hace es realizar la elevación de los cuadrados que aparecen en los términos de $x - h$ y $y - k$, para después agrupar todos los términos de x y los de y de un solo lado de la igualdad como se muestra a continuación.

$$r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$$

\implies

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 - r^2 = 0$$

\implies

$$x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk + k^2 - r^2 = 0$$

Si definimos $D = -2h$, $E = -2k$ y $F = h^2 + k^2 - r^2$ tenemos

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Que corresponde a la ecuación general de la circunferencia. Ahora lo que vamos a hacer es de la ecuación general de la circunferencia $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, pasar a la ecuación $r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$. Lo que se debe de hacer para realizar este cambio es completar cuadrados en la ecuación general de la circunferencia.

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

\implies

$$x^2 + Dx + () + y^2 + Ey + () = -F$$

\implies

$$x^2 + Dx + \frac{D^2}{4} + y^2 + Ey + \frac{E^2}{4} = -F + \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4}$$

\implies

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F$$

Donde el centro de la circunferencia esta en $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$ y el radio es $r = \sqrt{\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F}$, notemos que $\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F$, solo puede dar tres valores es decir tenemos tres casos.

$$\text{sí } \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F > 0 \text{ La circunferencia es real}$$

$$\text{sí } \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F < 0 \text{ La circunferencia es imaginaria}$$

$$\text{sí } \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F = 0 \text{ se trata de un punto}$$

Capítulo 3

Parábola

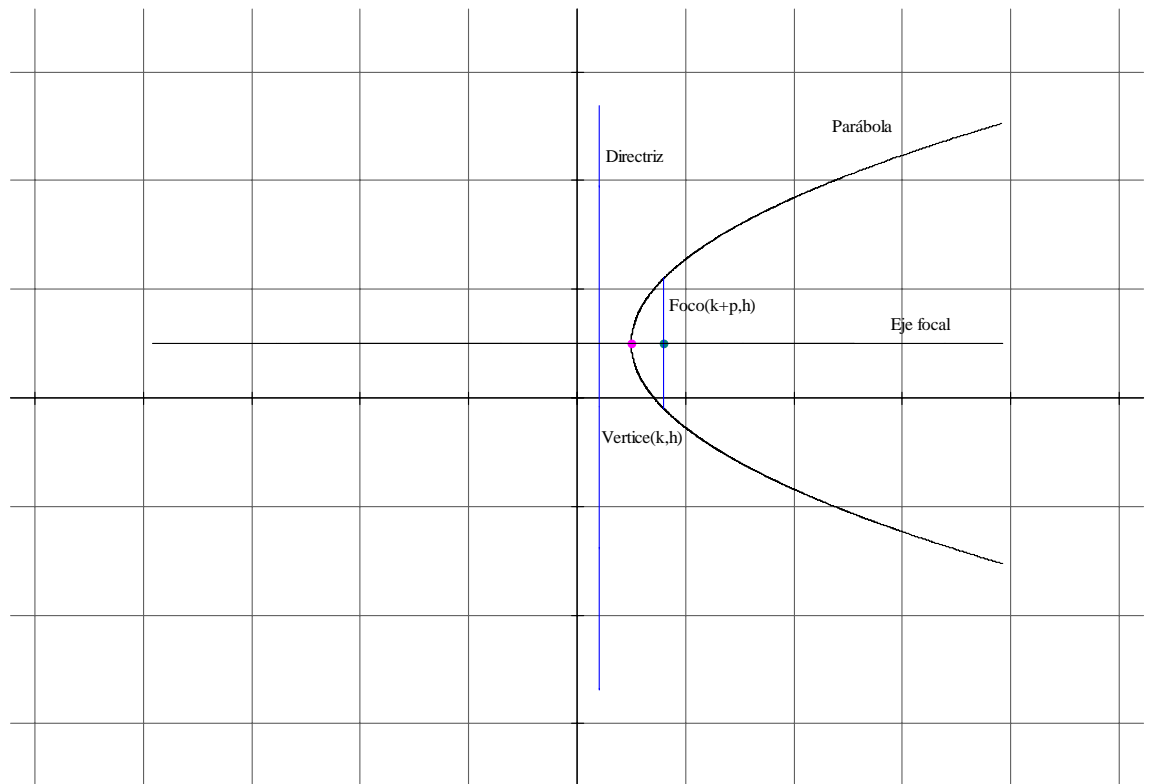


Figura 3.1:

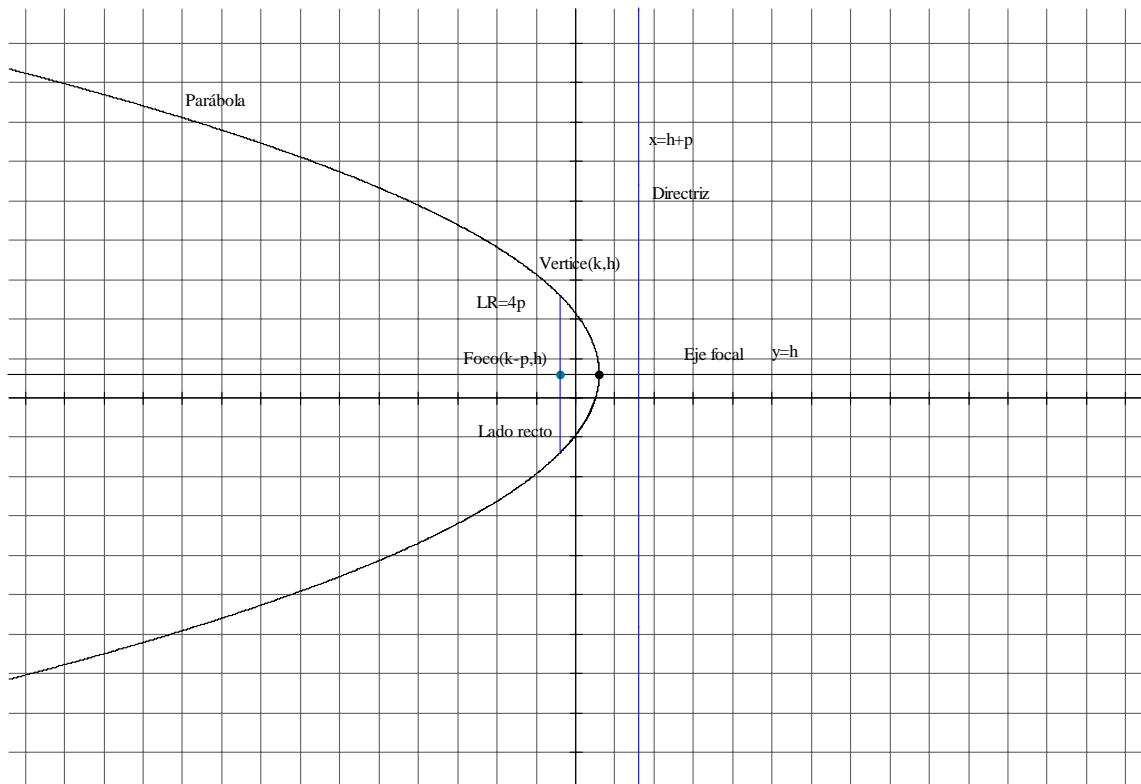


Figura 3.2: