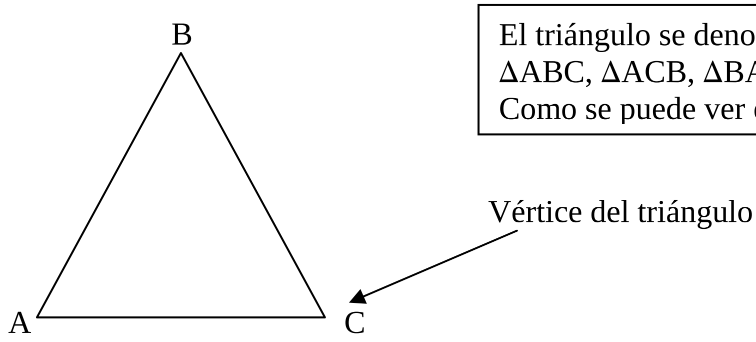
Notes of *Dark Wolf.*

Tema 1. 2. 1 Triángulos

Primero comenzaremos definiendo lo que vamos a entender por triángulo.

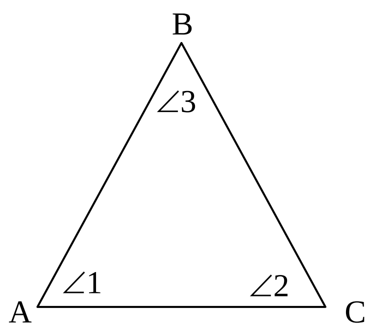
Definición de Triángulo: Es un polígono[1] de tres lados y tres ángulos.



El triángulo se denota de la siguiente manera:
ΔABC, ΔACB, ΔBAC, ΔBCA, ΔCAB, ΔCBA.
Como se puede ver el orden de los vértices no importa

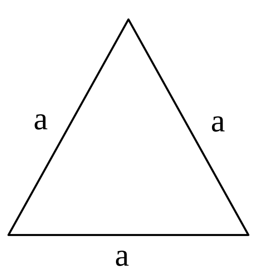
Note que un triángulo esta compuesto por tres elementos:

1. Tres ángulos
2. Tres lados
3. Tres vértices

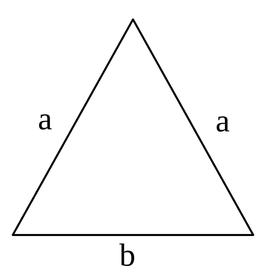


Los vértices son:	A, B, C
Los ángulos son:	$\angle 1, \angle 2, \angle 3$
Los lados son:	$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$

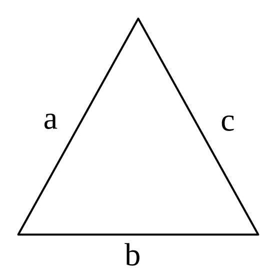
De acuerdo a como esta compuesto un triángulo, podemos, de manera natural clasificar a un triángulo de dos maneras, una en base a sus ángulos y la otra en base a sus lados. La clasificación de un triángulo de acuerdo a sus ángulos es la siguiente:



Equilátero
(Tres lados iguales)



Isósceles
(Dos lados iguales)

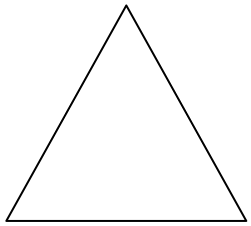


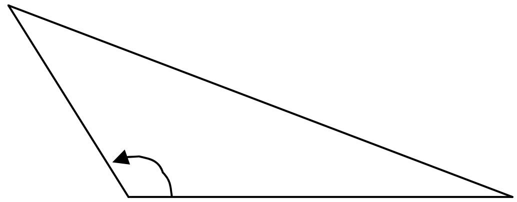
Escaleno
(Tres lados desiguales)

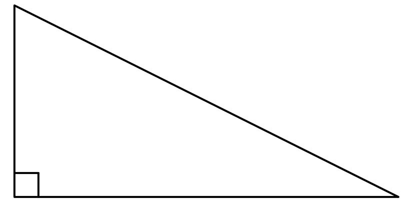
En estos momentos tenemos ya la clasificación de un triángulo según sus lados ahora lo que vamos a hacer es clasificar los triángulos de acuerdo a la abertura que presenten sus ángulos, dentro de está clasificación hay tres formas de llamar a un triangulo. La clasificación es la siguiente:

---

[1] Porción de plano limitada por líneas rectas





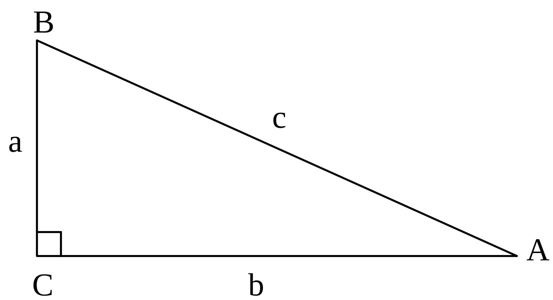


Acutángulo
(Tres ángulos agudos)

Obtusángulo
(Un ángulo obtuso)

Rectángulo
(Un ángulo recto)

Un triángulo muy pero muy importante es el triángulo rectángulo, por que en base a este triángulo se definen las relaciones trigonométricas y se establece el teorema de Pitágoras que más adelante veremos, por ese motivo al los lados del triángulo rectángulo se les dio los siguientes nombres:



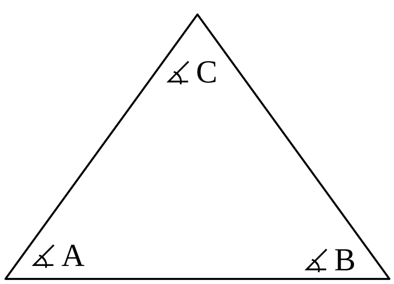
$\angle C$ es un ángulo recto por lo tanto vale 90º
El lado c se llama HIPOTENUSA y siempre es el lado mayor de un triángulo rectángulo.
El lado a y b se llaman CATETOS.

A continuación enunciaremos algunas propiedades de los triángulos:

1. Todo triángulo que tiene dos ángulos iguales es isósceles.
2. En todo triángulo equilátero, los tres ángulos son iguales, y cada uno vale 60º.
3. La suma de los ángulos agudos en un triángulo rectángulo es igual a 90º
4. En un triángulo, a mayor lado se opone mayor ángulo y recíprocamente.

Ahora enunciaremos y demostraremos algunos teoremas importantes sobre los triángulos.

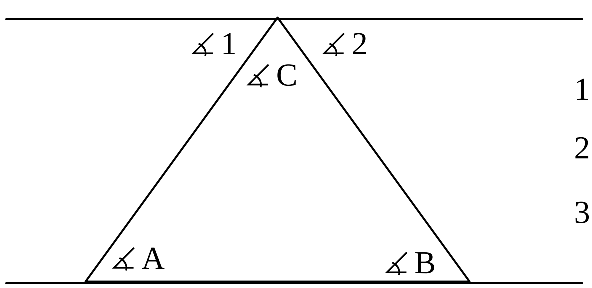
Teorema *La suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180º*



$$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180º$$

Demostración

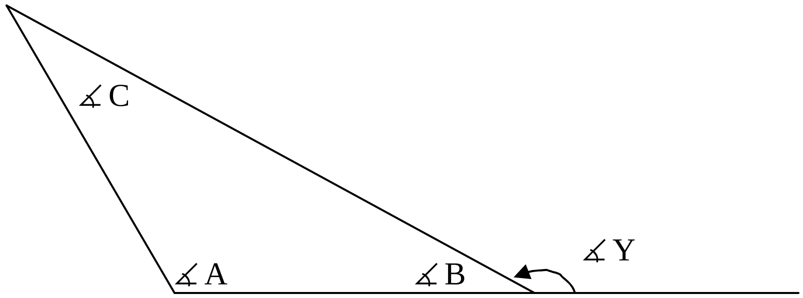
Por hipótesis tenemos que $\measuredangle A, \measuredangle B, \measuredangle C$ son ángulos interiores del ΔABC.



Construcción auxiliar: tracemos por el vértice C, las rectas paralelas $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$, formándose los ángulos: $\measuredangle 1, \measuredangle 2$

1. $\measuredangle 1 + \measuredangle C + \measuredangle 2 = 180º$
2. $\measuredangle 1 = \measuredangle A$, $\measuredangle 2 = \measuredangle B$ Por ser ángulos alternos internos entre paralelas
3. $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180º$

Teorema *Un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes a él.*



$$\measuredangle Y = \measuredangle A + \measuredangle C$$

Demostración Hipótesis $\measuredangle Y$ es un ángulo exterior ΔABC. Entonces

1. $\measuredangle Y + \measuredangle B = 180^{o}$
2. $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180^{o}$
3. $\measuredangle Y + \measuredangle B = \measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C$
4. $\measuredangle Y = \measuredangle A + \measuredangle C$

Ahora veremos el siguiente tema tiene por nombre:

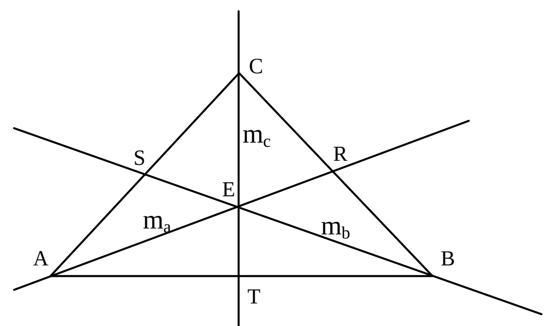
Rectas y puntos notables en el triángulo

Para no peder la costumbre comenzaremos con algunas definiciones.

MEDIANA *Es el segmento trazado desde un vértice hasta el punto medio del lado opuesto.*

En un triángulo hay tres medianas, una correspondiente a cada lado, para denotar las medianas tomaremos el siguiente convenio, usaremos la letra “m” y un subíndice que indique el vértice como se muestra a continuación.

$$\overline{AR} = m_a$$
$$\overline{BS} = m_b$$
$$\overline{CT} = m_c$$

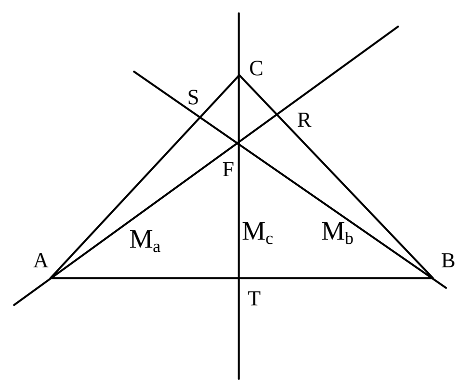


El punto de intersección E, donde se cortan las tres medianas se llama *BARICENTRO*

MEDIATRIZ *Es la perpendicular trazada en el punto medio de cada lado.*

En un triángulo hay tres mediatrices que denominaremos con la letra “M” y su subíndice que indica el lado como se muestra a continuación.

$$\overline{AR} = M_a$$
$$\overline{BS} = M_b$$
$$\overline{CT} = M_c$$



El punto de intersección F, donde se cortan las tres mediatrices se llama *CIRCUNCENTRO*

BISECTRIZ *Es la recta que partiendo del vértice, divide un ángulo en dos partes iguales.*

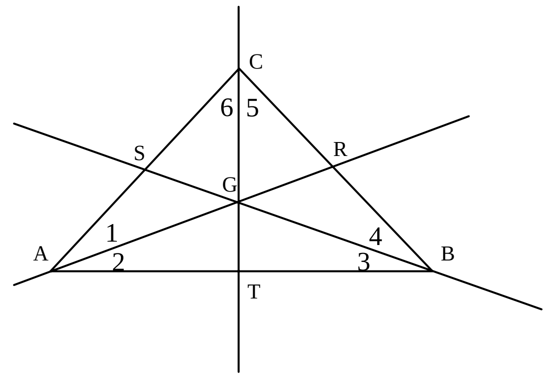
En un triángulo hay tres bisectrices, una para cada ángulo y se nombran por los segmentos: $\overline{AR}, \overline{BS}, \overline{CT}$.

$\measuredangle 1 = \measuredangle 2$

$\measuredangle 3 = \measuredangle 4$

$\measuredangle 5 = \measuredangle 6$

El punto de intersección G, donde se cortan las tres bisectrices se llama *INCENTRO*



ALTURA *Es la perpendicular trazada desde un vértice, al lado opuesto ó a su prolongación.*

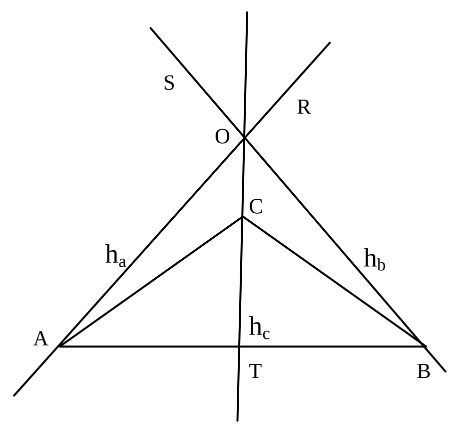
En un triángulo hay tres alturas, se designan con las letra “h” y el subíndice que indica el lado, como se muestra a continuación.

$\overline{AR} = H_a$

$\overline{BS} = H_b$

$\overline{CT} = H_c$

El punto de intersección O, donde se cortan las tres alturas se llama *ORTOCENTRO*

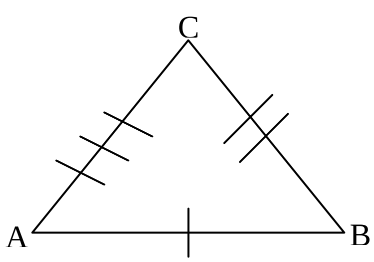


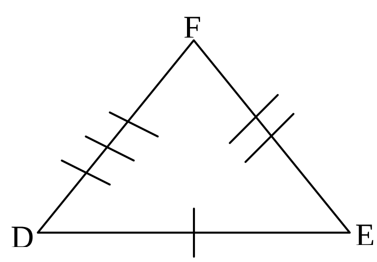
CONGRUENCIA DE TRIANGULOS

Dos triángulos son congruentes sí tienen el mismo tamaño y la misma forma. También se dice que dos triángulos son congruentes, idénticos ó iguales sí superpuestos coinciden en todos sus puntos. El símbolo de congruencia es: $\cong$

Existen tres casos para mostrar que dos triángulos son congruentes. (Dichos casos fueron expuestos por Euclides)

1. Dos triángulos son congruentes, sí los tres lados de uno, son respectivamente congruentes con los tres lados del otro. (LLL)





Sí

$\overline{AB} \cong \overline{DE}$

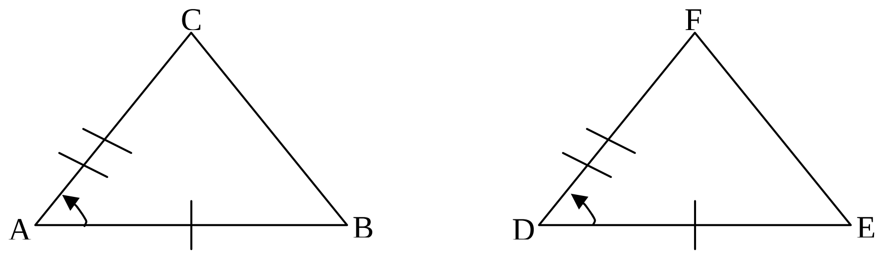
$\overline{BC} \cong \overline{EF}$

$\overline{AC} \cong \overline{DF}$

Entonces

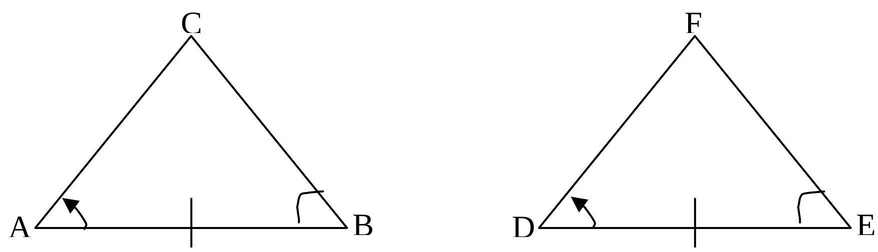
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

2. Dos triángulos son congruentes si dos lados y el ángulo comprendido de uno, son respectivamente congruentes a dos lados y el ángulo comprendido del otro. (LAL)



Sí
$\overline{AC} \cong \overline{DF}$
$\overline{AB} \cong \overline{DE}$
$\measuredangle A \cong \measuredangle D$
Entonces
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

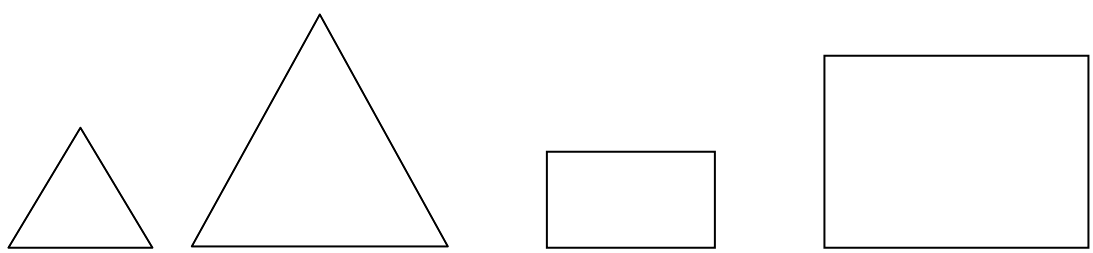
3. Dos triángulos son congruentes si dos ángulos y el lado comprendido de uno, son respectivamente congruentes a dos ángulos y el lado comprendido de otro. (ALA)



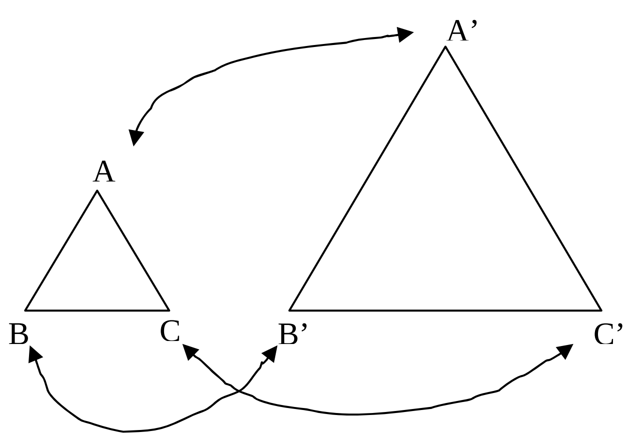
Sí
$\overline{AB} \cong \overline{DE}$
$\measuredangle A \cong \measuredangle D$
$\measuredangle B \cong \measuredangle E$
Entonces
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

SEMEJANZA

Diremos que dos figuras son semejantes sí tienen la misma forma y NO necesariamente el mismo tamaño.
Ejemplo



Cada par de las figuras anteriores se llaman semejantes. Para denotar semejanza se utilizara el símbolo: $\sim$
Para estudiar los polígonos semejantes hay que tomar en cuanta los siguientes conceptos:



La correspondencia entre los vértices

$$\begin{Bmatrix} A \leftrightarrow A' \\ B \leftrightarrow B' \\ C \leftrightarrow C' \end{Bmatrix}$$

La correspondencia entre los ángulos

$$\begin{Bmatrix} \measuredangle A \cong \measuredangle A' \\ \measuredangle B \cong \measuredangle B' \\ \measuredangle C \cong \measuredangle C' \end{Bmatrix}$$

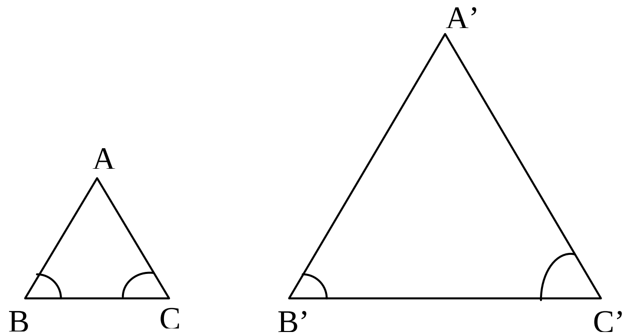
La proporcionalidad entre los lados $\left\{ \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'} \right\}$

RAZÓNDE SEMEJANZA Es la razón existente entre los lados correspondientes de dos figuras semejantes.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = r\ ; \quad \text{r es la razón de semejanza}$$

En figuras semejantes la razón entre cada par de lados correspondientes es una constante.
Ahora al igual en la congruencia, dentro de la semejanza también tenemos tres criterios para determinar semejanza de triángulos, los criterios de semejanza son:

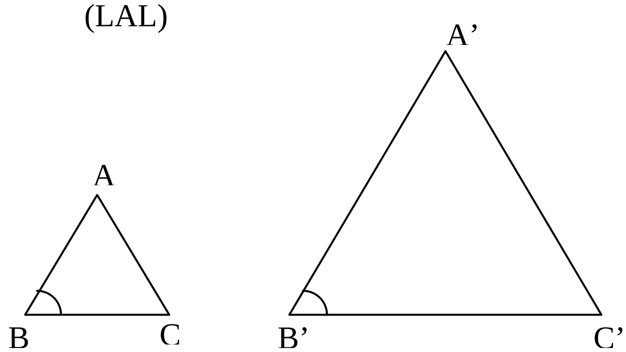
1. Dos triángulos son semejantes sí tienen dos ángulos respectivamente iguales. (AAA)



Sí $\left\{ \begin{array}{l} \measuredangle B = \measuredangle B' \\ \measuredangle C = \measuredangle C' \end{array} \right\}$

Entonces $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

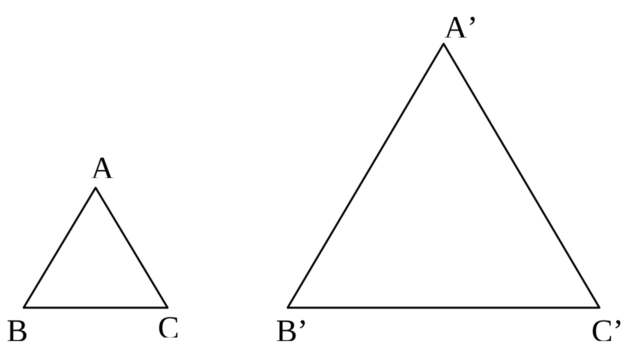
2. Dos triángulos son semejantes cuando tienen un ángulo igual formado por lados proporcionales. (LAL)



Sí $\left\{ \begin{array}{l} \measuredangle B = \measuredangle B' \\ \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \end{array} \right\}$

Entonces $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

3. Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus tres lados proporcionales. (LLL)

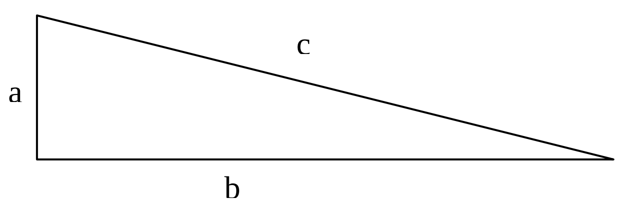


Sí $\left\{ \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \right\}$

Entonces $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

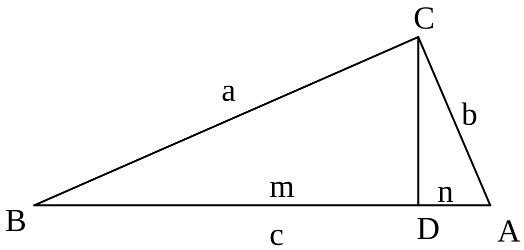
EL TEOREMA DE PITAGORAS

El todo triángulo rectángulo "el cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos"



$$c^2 = a^2 + b^2$$

Demostración



Observa $\Delta ABC \sim \Delta DAC$

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow cn = b^2 \qquad (1)$$

Observa $\Delta ABC \sim \Delta BCD$

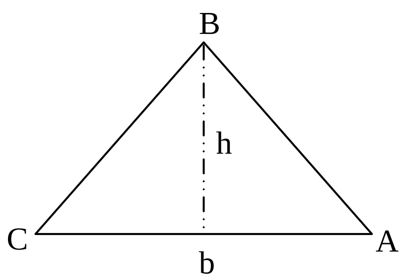
$$\frac{a}{c} = \frac{m}{a} \Rightarrow mc = a^2 \qquad (2)$$

Sumando (1) y (2)

$$cn + mc = b^2 + a^2$$
$$c(n+m) = a^2 + b^2$$
$$c(c) = a^2 + b^2$$
$$c^2 = a^2 + b^2$$

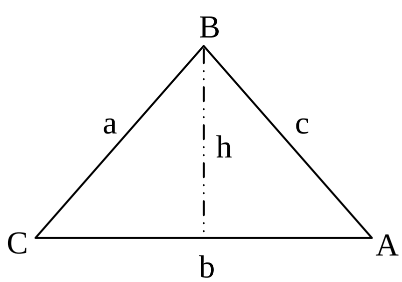
AREA DEL TRIANGULO

TEOREMA *El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de la base por la altura.*



$$A = \frac{bh}{2}$$

Fórmula de HERON con la cual se calcula el área de un triángulo en función de los lados a, b y c.



$$A = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

$$P = \frac{a+b+c}{2}$$