Geometría Analítica

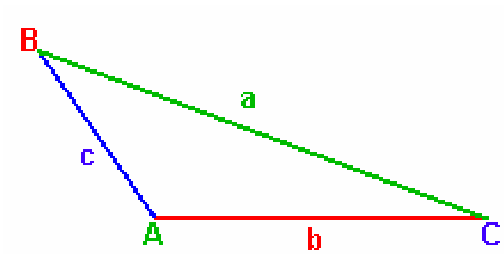
La Ley de los Senos, Cósenos y Tangente y su relación con los Postulados LLL LAL ALA

Estas tres leyes, senos cósenos y tangente es utilizada para la resolución de Triángulos Oblicuángulos, es decir:

Los tres ángulos y los tres lados de cualquier triángulo se llaman **Elementos** del triángulo. Si se conocen tres elementos de un triángulo, incluyendo cuando menos un lado, pueden calcularse los restantes, utilizando la ley de los senos, cósenos y Tangente, según la que se requiera. Resolver un Triángulo significa encontrar aquellos elementos de él que son desconocidos. Y los cuatro casos que se tienes que se relacionan con los postulados LLL LAL y ALA son:

- Se conocen dos ángulos y un lado (ALA)
- Se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos (LAL)
- Se conocen los tres Lados (LLL)
- Se conocen dos lados y el ángulo que se forma (LLA o ALL) (Este es un caso especial ya que esta relación LLA o ALL no es del todo aceptada para el caso de congruencia de Triángulos)

Para una mejor explicación del tema se explicaran las tres leyes y considerara el dibujo de un triángulo oblicuángulo, en el cual los vértices serán A, B y C, los ángulos correspondientes se designaran del mismo modo, y el lado del triángulo opuesto a cualquier vértice se designará con la letra del vértice pero en minúscula. Como se muestra a continuación

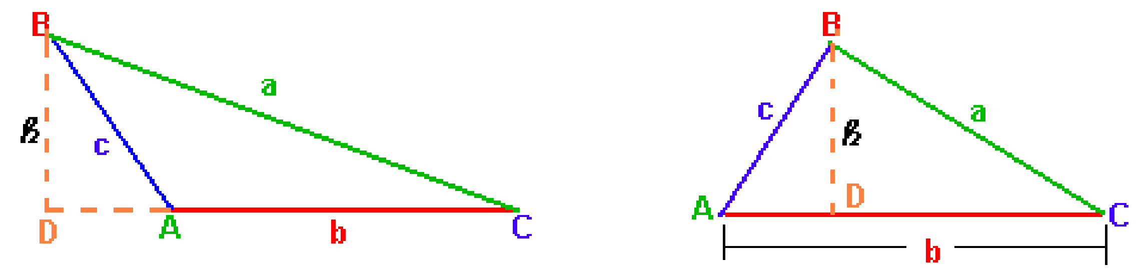


1) La Ley de los Senos

"En un Triángulo, la razón de un lado cualquiera al seno del ángulo opuesto constate."

<u>Explicación</u>:

Sean ABC un triángulo cualquiera como los que se muestran. La altura h se traza desde B hacia AC, con D como pie de esta altura



(a) (b)

Por el Triángulo rectángulo ABD en el inciso (a) tenemos
$h = c\ Sen\,(180 - A)$
Y puesto que Sen (180-A)= Sen A,

$$h = c\ SenA \quad \text{.... Ec (1)}$$

Para el Triángulo ABD con el inciso (b), se obtiene directamente la Ecuación (1).
Y para el Triángulo CBD se obtiene :

$$h = a\ SenC \quad \text{... Ec (2)}$$

Igualando los valores de h de las Ecuaciones (1) y (2) se tiene:

$$a\ SenC = c\ SenA$$

despejamos la Ecuación y obtenemos:

$$\frac{a}{SenA} = \frac{c}{SenC}$$

Un Razonamiento Semejante (o un ordenamiento diferente de las letras en el triángulo) conduce a la Ecuación

$$\frac{a}{SenA} = \frac{b}{SenB}$$

y una combinación de estás ultimas combinaciones nos da la **Ley de los Senos**

$$\frac{a}{SenA} = \frac{b}{Senb} = \frac{c}{SenC}$$

Por lo tanto la Ley de los Senos se utiliza para poder resolver los siguientes casos

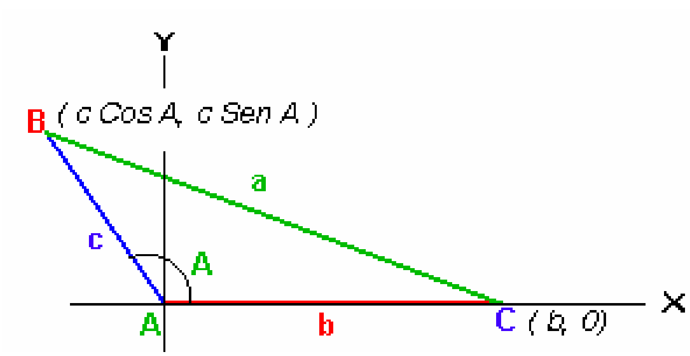
- Se conocen dos Ángulos y un lado
- Se conocen dos lados y el Ángulo opuesto a uno de ellos

b) La Ley de los Cósenos

"En un Triángulo, el cuadrado de un lado cualquiera es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el producto de estos dos lados con el coseno del ángulo que forman"

Explicación:

Cualquier triángulo cuyos elementos han sido denotados de la manera especial establecida puede colocarse en un sistema de coordenadas, como a continuación se muestra.



Aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos, para encontrar el cuadrado de la longitud BC, tenemos:

$$a^2 = (b - cCosA)^2 + (cSenA)^2$$
$$a^2 = b^2 - 2bcCosA + c^2Cos^2A + c^2Sen^2A$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bcCosA$$

(ya que $Cos^2A + Sen^2A = 1$)

Hemos obtenido así una forma de la Ley de los Cósenos.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bcCosA$$

Permutando las letras de los triángulos, podemos escribir inmediatamente las otras formas de la Ley de los Cósenos.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2acCosB$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abCosC$$

Por lo tanto la Ley de los Cósenos se utiliza para poder resolver los siguientes casos

- Se conocen dos lados y el ángulo que forman
- Se conocen tres lados.

c) La Ley de las Tangentes

Basándonos en la Ley de los senos obtenemos

$$\frac{a}{b} = \frac{SenA}{SenB} \text{...(a)}$$

Restamos 1 en ambos lados, y resulta

$$\frac{a}{b} - 1 = \frac{SenA}{SenB} - 1$$

Realizando la Resta

$$\frac{a-b}{b}=\frac{SenA-SenB}{SenB} \text{ ...(b)}$$

Del mismo modo, sumando 1 a cada miembro de (a), obtenemos

$$\frac{a+b}{b}=\frac{SenA+SenB}{SenB} \text{ ...©}$$

La división miembro a miembro de (b) por (c) da

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{SenA-SenB}{SenA+SenB}$$

La aplicación de las fórmulas de factores son

$$Senx+Seny=2Sen\frac{1}{2}(x+y)Cos\frac{1}{2}(x-y)$$
$$Senx-Seny=2Sen\frac{1}{2}(x-y)Cos\frac{1}{2}(x+y)$$

al numerador y al denominador del segundo miembro conduce a:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{2Sen\frac{1}{2}(A-B)Cos\frac{1}{2}(A+B)}{2Sen\frac{1}{2}(A+B)Cos\frac{1}{2}(A-B)}$$

La cual se transforma, después de dividir ambos términos de la fracción de la derecha por Cos1/2(A-B)Cos1/2(A+B), en

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{Tan\frac{1}{2}(A-B)}{Tan\frac{1}{2}(A+B)}$$

Esta es la conocida Ley de las Tangentes, inmediatamente pueden escribirse fró9mulas semejantes que contengan a y c o b y c.

Una desventaja en el uso de la Ley de los Cósenos para resolver un triángulo en que se conocen dos lados y el ángulo que se forman es que el método no se presta al cálculo logarítmico. Por tanto, si los números implicados tienen mas de tres dígitos significativos, el método no es eficiente. Por otra parte las formulas que se utilizaron para desarrollar la Ley de las Tangentes se adaptan particularmente bien al uso de logaritmos.

Al resolver el caso donde "Se conocen dos lados y el ángulo que forman" por la Ley de las Tangentes, se usa la formula que representa a esta ley, en la forma que contiene los dos lados conocidos, digamos a y b. Entonces, puesto que el ángulo C es dado, puede encontrase que la suma A+B es igual a 180-C, y la Ley de las Tangentes nos permite calcular A-B. En seguida con la suma y diferencia de A y B ya conocidas, pueden encontrarse los ángulos A y B. Una vez conocidos los ángulos, el tercer lado puede calcularse por la Ley de los senos.