

POSTULAT SEJAJAR EUCLID

Pada Bab 1 telah diperlihatkan bahwa bukti geometrik dengan cara menggambarkan kesimpulan melalui diagram untuk saat ini dianggap tidak memuaskan. Bukti tersebut tidak memenuhi standar sekarang. Di lain pihak, Euclid, yang merupakan ahli logika ternama, bergantung sepenuhnya pada pembuktian menggunakan diagram. Bagaimana perubahan dalam perilaku ini bisa diatasi?

Tampaknya kekuatan utama yang memotivasi perubahan ini adalah perkembangan teori geometri non Euclid yang kontradiksi dengan postulat sejajar Euclid. Seiring dengan kepercayaan ahli matematika bahwa geometri Euclid hanya memungkinkan untuk teori ruang, dan yang menjelaskan segala sesuatu secara fisik, maka tidak akan pernah terjadi keadaan bahwa diagram akan menyesatkan. Tetapi posisi unik geometri Euclid di abad ke 19 telah diserang oleh penemuan geometri non Euclid, dan ahli matematika sangat terguncang. Revolusi di bidang matematika telah terjadi, jika dibandingkan dengan revolusi Copernican di bidang astronomi atau revolusi Darwin di bidang biologi. Ide tentang kealamian geometri dan posisi unik geometri Euclid yang telah dilakukan sepanjang dua ribu tahunan, akhirnya runtuh pada dekade 1820-1830.

Dalam Bab 4, akan ditunjukkan pendahuluan dasar mengenai geometri non Euclid dengan mendiskusikan postulat sejajar Euclid yang terkenal. Selama dua millennium, ahli matematika dirugikan atas postulat tersebut dan mencoba beragam upaya untuk mendeduksi postulat tersebut sebagai teorema lain Euclid. Hingga awal abad ke 19, ahli matematika yang kompeten berhasil diyakinkan bahwa masalahnya telah diselesaikan, dan hanya memiliki kekeuarangan dalam pembuktiannya. Kegagalan setiap percobaan dalam membuktikan postulat sejajar tersebut membawa pada pengakuan bahwa postulat sejajar tidaklah pasti, dan bahwa teori Euclid tidaklah suci, dan bahwa teori geometri lainnya (non Euclid) bisa saja digunakan. Selanjutnya dalam bab ini akan dijelaskan 3 upaya penting dalam membuktikan postulat sejajar Euclid.

1. Struktur Geometri Bidang Euclid

Postulat sejajar Euclid, yakni berupa satu kalimat penting dalam sejarah kontroversi intelektual, dapat dinyatakan sebagai berikut:

Jika dua garis dibagi oleh garis transversal sedemikian sehingga jumlah dua sudut interiornya(sudut dalam) pada satu sisi transversal adalah kurang dari 180° , garis tersebut akan bertemu pada sisi transversal tersebut.

Sejarah pentingnya postulat sejajar tersebut didasarkan pada peran pentingnya dalam teori Euclid. Oleh karena itu, pertama dimulai dengan mensketsa teori geometri bidang Euclid. Agar menjadi bukti, penting dilakukan pemeriksaan terhadap struktur teori ini. Perlakuan yang dilakukan tidak mengikuti detailnya perkembangan Euclid, tetapi menekankan pada ide dasarnya dengan menggunakan istilah yang lebih modern, dan juga perlakuan yang cukup sesuai dengan hasil kerjanya yang sekarang sehingga banyak dipakai di berbagai buku ajar.

Kita mulai mendaftarkan sejumlah asumsi atau postulat untuk geometri bidang Euclid.

- I. *sesuatu akan sama dengan sesuatu atau sesuatu yang sama akan sama satu sama lainnya.*
- II. *Jika kesamaan ditambahkan dengan kesamaan, maka jumlahnya akan sama*

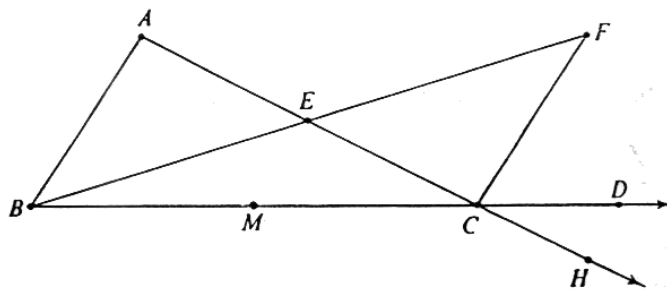
- III. Jika kesamaan dikurangi dari kesamaan, selisihnya akan sama
- IV. Keseluruhan akan lebih besar daripada bagiannya
- V. Bangun geometrik dapat dipindahkan tanpa mengubah ukuran atau bentuknya.
- VI. Setiap sudut memiliki bisector
- VII. Setiap segmen memiliki titik tengah
- VIII. Dua titik hanya berada pada satu satunya garis
- IX. Sebarang segmen dapat diperluas oleh suatu segmen yang sama dengan segmen yang diberikan
- X. Lingkaran dapat digambarkan dengan sebarang titik pusat dan radius yang diketahui
- XI. Semua sudut siku-siku sama besar.

Dari postulat-postulat ini, dapat dideduksi sejumlah teorema dasar. Diantaranya adalah:

1. Sudut bertolak bertolak belakang sama besar
2. Sifat kongruensi segitiga (SAS, ASA, SSS)
3. Teorema kesamaan sudut dasar segitiga sama kaki, dan konversinya.
4. Eksistensi garis yang tegak lurus pada garis pada titik dari garis tersebut.
5. Eksistensi garis yang tegak lurus pada garis yang melalui titik eksternal
6. Pembentukan suatu sudut yang sama dengan sudut dengan titik sudut dan sisi yang telah diberikan sebelumnya.
7. Pembentukan segitiga yang kongruen dengan segitiga dengan sisi yang sama pada sisi segitiga yang diketahui.

Sekarang akan dibuktikan teorema sudut eksterior, sebagai cara menuju perkembangan lebih lanjut. Pertama, diperkenalkan notasi yang akan digunakan sebagai pembuktian. Notasi $\overline{AB}$ menunjukkan segmen AB

Teorema 1. teorema sudut eksterior. Sudut eksterior segitiga akan lebih besar daripada sudut interior terpendek manapun.



Gambar 2.1.

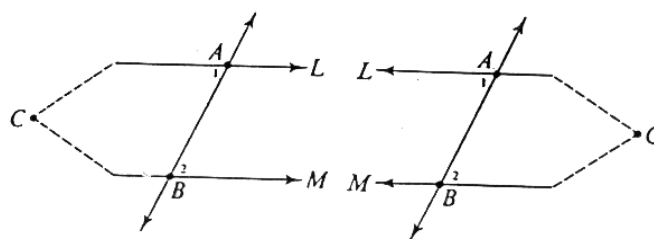
Bukti. Misalkan ABC adalah sebarang segitiga, dan misalkan D merupakan perpanjangan dari $\overline{BC}$ melalui C. pertama akan ditunjukkan bahwa sudut eksterior $\angle ACD$ lebih besar dari $\angle A$. Misalkan E merupakan titik tengah $\overline{AC}$, dan misalkan $\overline{BE}$ merupakan perluasan panjangnya melalui E hingga F. maka $\overline{AE} = \overline{EC}$, $\overline{BE} = \overline{EF}$ dan $\angle AEB = \angle CEF$ (sudut bertolak belakang sama besar). Jadi $\triangle AEB \cong \triangle CEF$ (SAS), dan $\angle BAE = \angle FCE$ (bagian segitiga kongruen sama

besar). Karena $\angle ACD > \angle FCE$ (keseluruhan sudut selalu lebih besar dari bagiannya), kita simpulkan $\angle ACD > \angle BAE = \angle A$.

Untuk menunjukkan bahwa $\angle ACD > \angle B$, perluas $\overline{AC}$ melalui C hingga H, yang membentuk sudut $\angle BCH$. Kemudian tunjukkan bahwa $\angle BCH > \angle B$, dengan menggunakan prosedur bagian pertama pembuktian: misalkan M merupakan titik tengah $\overline{BC}$, perluas panjang $\overline{AM}$ melalui M, dan lain-lain. Untuk melengkapi bukti, perhatikan bahwa $\angle BCH$ dan $\angle ACD$ merupakan sudut bertolak belakang sehingga sudut tersebut sama besar.

Perhatikan bahwa kupasan pada Bab 1 ternyata menggunakan pembuktian ini. Pernyataan $\angle ACD > \angle FCE$ bergantung pada diagramnya. Sekarang mudah melakukan pembuktian beberapa hasil yang cukup penting.

Teorema 2. Jika dua garis dibagi oleh garis transversal sehingga membentuk pasangan sudut interior dalam berseberangan, maka garis tersebut sejajar.



Gambar 2.2

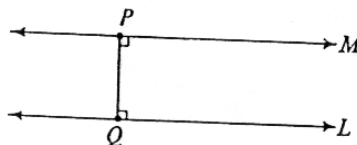
Bukti. Ingat kembali bahwa dua garis dalam bidang yang sama dikatakan sejajar jika garis tersebut tidak bertemu. Misalkan garis transversal membagi dua garis L, M pada titik A, B sehingga membentuk pasangan sudut interior dalam berseberangan, $\angle 1$ dan $\angle 2$, yang sama besar, dan misalkan L dan M tidak sejajar. Maka L dan M akan bertemu di titik C, yang membentuk $\triangle ABC$. C terletak pada satu sisi AB atau pada sisi lainnya. Untuk kasus lainnya, sudut eksterior $\triangle ABC$ sama dengan sudut interior terpencil. (misalkan, jika C pada sisi AB yang sama sebagai $\angle 2$ maka sudut eksterior $\angle 1$ sama dengan sudut interior terpencil $\angle 2$). Hal ini kontradiksi dengan teorema sebelumnya. Oleh karena itu L dan M sejajar.

Corollary 1. Dua garis tegak lurus terhadap garis yang sama pasti sejajar.

Sebagai akibat langsung Corollary 1 adalah

Corollary 2. Hanya ada satu garis yang tegak lurus terhadap garis melalui titik eksternal.

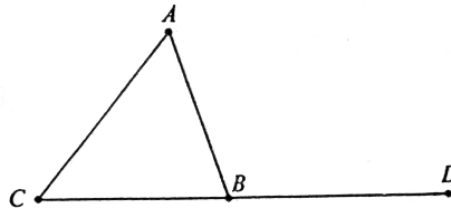
Corollary 3. (Eksistensi garis sejajar). Jika titik P tidak berada pada garis L, maka akan ada setidaknya satu garis yang melalui P yang sejajar dengan L.



Gambar 2.3

Bukti. Dari P hilangkan garis tegak lurus pada L yang memiliki kaki di Q, dan di P bangun garis M yang tegak lurus terhadap PQ. Maka M sejajar dengan L menurut Corollary 1.

Teorema 3. Jumlah dua sudut segitiga kurang dari 180° .



Gambar 2.4.

Bukti.

Misalkan $\triangle ABC$ merupakan sebarang segitiga. Kita tunjukkan bahwa $\angle A + \angle B < 180^\circ$. Perluas $\overline{CB}$ melalui B hingga ke D. maka $\angle ABD$ merupakan sudut eksterior $\triangle ABC$. Dengan menggunakan teorema 1, $\angle ABD > \angle A$. tetapi $\angle ABD = 180^\circ - \angle B$. dengan mensubstitusikan untuk $\angle ABD$ pada relasi pertama, maka $180^\circ - \angle B > \angle A$, atau $180^\circ > \angle A + \angle B$. Jadi, $\angle A + \angle B < 180^\circ$, dan teorema tersebut terbukti.

2. Pengganti Postulat Sejajar Euclid.

Pada sub bab 1, telah dijelaskan permulaan perkembangan geometri bidang Euclid. Perhatikan bahwa tidak ada yang bisa dilakukan untuk postulat sejajar. Tetapi perkembangan selanjutnya memerlukan postulat tersebut. Dalam buku ajar terkini, postulat sejajar Euclid biasanya digantikan oleh pernyataan berikut ini:

Hanya ada satu garis sejajar pada garis yang melalui titik bukan pada garis tersebut

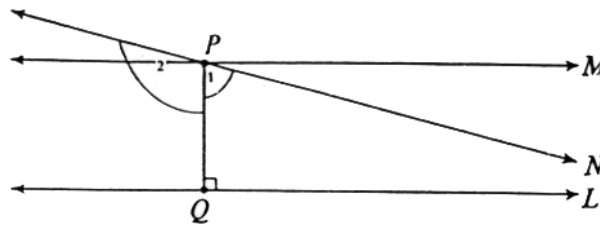
Pernyataan ini disebut dengan postulat Playfair. Bagaimana postulat ini bisa dihubungkan dengan postulat sejajar Euclid? Tentu saja dua pernyataan ini tidak sama. Pernyataan sebelumnya merupakan pernyataan tentang garis sejajar, dan pernyataan kedua mengenai garis yang bertemu. Bahkan kedua pernyataan tersebut memainkan peran yang sama dalam perkembangan logis geometri. Kita katakan pernyataan ini ekuivalen secara logis. Hal ini berarti bahwa jika pernyataan pertama dianggap sebagai postulat (bersama dengan semua postulat Euclid kecuali postulat sejajar), kemudian pernyataan kedua dapat dideduksi sebagai teorema; dan konversinya, jika pernyataan kedua dianggap sebagai postulat (bersama dengan semua postulat Euclid kecuali postulat sejajar), maka pernyataan pertama dapat dideduksi sebagai teorema. Jadi secara logis, tidak penting dua pernyataan mana yang akan diasumsikan sebagai postulat, dan yang mana yang akan dideduksi sebagai suatu teorema.

3. Ekuivalensi Postulat Euclid dan Playfair

Sekarang akan dibuktikan ekuivalensi postulat sejajar Euclid dan postulat Playfair. Pertama, dengan mengasumsikan postulat sejajar Euclid, kita deduksi postulat Playfair.

Diketahui garis L dan titik P bukan pada L (gb 2.5). kita tunjukkan disana bahwa hanya ada satu garis melalui P tidak pada L. Kita tahu bahwa ada garis melalui P yang sejajar dengan L, dan tahu bagaimana menggambarkannya (lihat Corollary 3 pada teorema 2). Dari P, kita hilangkan garis tegak lurus pada L dengan kaki Q, dan pada P garis tegak M yang tegak lurus pada PQ. Maka M sejajar dengan L.

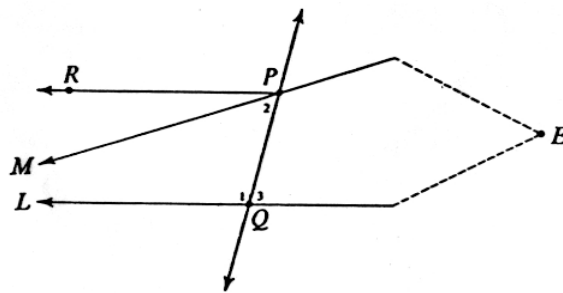
Sekarang misalkan N adalah sebarang garis melalui P yang berbeda dari M. Kita tunjukkan bahwa N bertemu dengan L. Misalkan $\angle 1$, $\angle 2$ menunjukkan sudut dimana garis N bertemu dengan PQ. Maka $\angle 1$ bukan merupakan sudut siku-siku untuk sebaliknya N dan M berimpit, berlawanan dengan asumsi. Jadi $\angle 1$ atau $\angle 2$ adalah sudut lancip, katakanlah $\angle 1$.



Gambar 2.5.

Ringkasan. Garis L dan N dibagi oleh garis transversal sehingga membentuk sudut lancip $\angle 1$ dan sudut siku-siku, yang merupakan sudut interior pada sisi yang sama dari garis transversal tersebut. Karena jumlah sudut tersebut kurang dari 180° , postulat sejajar Euclid dapat diaplikasikan dan kita simpulkan bahwa N bertemu dengan L. Jadi M hanya satu-satunya garis yang melalui P yang sejajar dengan L, dan kita deduksi postulat Playfair dari postulat sejajar Euclid.

Sekarang dengan mengasumsikan postulat Playfair, kita deduksi postulat sejajar Euclid



Gambar 2.6

Misalkan garis M, dibagi oleh garis transversal di titik Q, P yang membentuk $\angle 1$ dan $\angle 2$, pasangan sudut interior pada satu sisi garis transversal yang memiliki jumlah sudut kurang dari 180° (Gambar 2.6), yakni :

$$(1) \quad \angle 1 + \angle 2 < 180^\circ$$

Misalkan $\angle 3$ menunjukkan tambahan $\angle 1$ yang terletak pada sisi berlawanan PQ dari $\angle 1$ dan $\angle 2$ (lihat Gambar 2.6). maka

$$(2) \quad \angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$$

dari hubungan (1), (2) maka

$$(3) \quad \angle 2 < \angle 3$$

Pada titik P, bentuk $\angle QPR$ yang sama dengan, dan yang interior dalam berseberangan dengan $\angle 3$. Maka $\angle 2 < \angle QPR$, sehingga RP berbeda dari M. Menurut teorema 2, RP sejajar

dengan L. Karenanya menurut postulat Playfair, M tidak sejajar dengan L; oleh karena itu, garis M dan L bertemu.

Seandainya garis-garis tersebut bertemu di sisi berlawanan dari PQ dari $\angle 1$ dan $\angle 2$, katakanlah di titik E. maka $\angle 2$ merupakan sudut eksterior $\triangle PQE$; karenanya $\angle 2 > \angle 3$, berlawanan dengan (3). Akibatnya, pengandaian tadi salah, jadi garis M dan L bertemu pada sisi garis transversal PQ yang memuat $\angle 1$ dan $\angle 2$. Jadi postulat sejajar Euclid mengikuti postulat Playfair dan akibatnya dua postulat tersebut menjadi ekuivalen.

4. Peran Postulat Sejajar Euclid

Sub bab 3 dan 4 merupakan penyimpangan yang dihubungkan dengan pemakaian postulat sejajar Euclid terhadap imbangannya di masa modern. Sekarang kita akan kembali pada topic sub bab 1, yakni struktur teori Euclid. Hasil dari sub bab 1 tidak bergantung pada postulat sejajar. Kemajuan lebih lanjut yang akan membutuhkan postulat tersebut. Kebanyakan hasil penting tersebut yang dianggap kekhasan dari geometri Euclid merupakan akibat dari postulat sejajar.

Dengan mengasumsikan postulat sejajar Euclid (atau postulat Playfair), berikut ini merupakan beberapa hasil penting yang dapat dibenarkan:

1. *jika dua garis sejajar dibagi oleh garis transversal, sebarang pasangan sudut interior dalam berseberangan yang terbentuk akan sama besar.*
2. *jumlah sudut sebarang segitiga adalah 180° .*
3. *sisi bertolak belakang dari jajaran genjang adalah sama besar*
4. *garis sejajar selalu berjarak sama*
5. *eksistensi segi empat dan bukur sangkar*
6. *teori luas menggunakan unit persegi*
7. *teori segitiga yang sama, yang termasuk eksistensi bangun dengan ukuran sebarang yang sama dengan bangun yang diketahui*

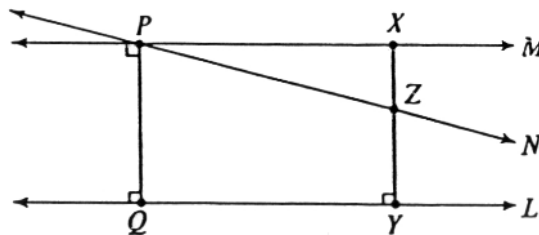
Sekarang anda lihat mengapa kami (dan ahli matematika dari Yunani) sangat perhatian terhadap postulat sejajar Euclid. Postulat tersebut merupakan sumber untuk banyak hasil yang sangat penting. Tanpa postulat tersebut (atau ekuivalennya), kita tidak akan memiliki teori luas yang sudah lama dikenal, teori kesamaan, dan relasi Pythagoras yang terkenal itu. Tanpa postulat tersebut, sekolah geometri tampaknya tidak berguna. Postulat sejajar Euclid tampak tidak begitu penting bila anda mempelajari geometri di Sekolah menengah, karena postulat tersebut hanya digunakan satu kali yang hanya berguna untuk menurunkan hasil dasar 1 tentang sudut interior dalam berseberangan, yang kemudian seterusnya digunakan untuk hasil-hasil yang lain.

Cara dimana Euclid mengatur teoremanya mengimplikasikan bahwa sesungguhnya Euclid tidak sepenuhnya puas dengan postulat sejajarnya. Euclid menyatakan hal tersebut di awal kerjanya tetapi pernyataan itu tidak dipakainya sampai akhirnya dia tidak dapat melakukan kemajuan tanpa postulat tersebut. Agaknya, Euclid memiliki intuisi bahwa postulat sejajar tersebut tidak memiliki kualitas intuitif ataupun sederhana dari postulat lainnya. Rasa yang demikian dilakukan oleh para ahli geometri selama 20 abad. Para ahli mencoba mendeduksi postulat sejajar dari postulat lainnya, atau menggantikan postulat tersebut dengan postulat yang nampaknya lebih pasti. Sekarang kita diskusikan tiga percobaan tersebut dalam “menyelesaikan permasalahan” postulat sejajar Euclid.

5. Bukti Proclus tentang Postulat Sejajar Euclid

Proclus (410-485) memberikan “bukti” tentang postulat sejajar Euclid yang kita ringkas sebagai berikut:

Kita asumsikan postulat Euclid bukan sebagai postulat sejajar, dan deduksi postulat Playfair. Misalkan P merupakan titik berada tidak pada garis L (gb 2.7). Kita bentuk garis M melalui P sejajar dengan garis L dengan cara yang biasa digunakan. Misalkan PQ tegak lurus dengan L di Q , dan misalkan M tegak lurus dengan PQ di P . sekarang, anggaplah ada garis lain N melalui P yang sejajar dengan L . maka N membentuk sudut lancip dengan garis PQ , yang terletak, katakanlah pada sisi kanan PQ . Bagian dari N di sebelah kanan titik P seluruhnya termuat dalam daerah yang dibatasi oleh garis L , M dan PQ . Sekarang, dimisalkan X adalah sebarang titik di M yang letaknya disebelah kanan titik P . misalkan XY tegak lurus dengan L di Y dan misalkan garis XY tersebut bertemu dengan garis N di Z . maka $\overline{XY} > \overline{XZ}$. Misalkan X mundur di garis M . Maka $\overline{XZ}$ meningkat secara tidak menentu, karena $\overline{XZ}$ setidaknya sama besarnya dengan segmen dari X yang tegak lurus dengan N . jadi $\overline{XY}$ juga meningkat secara tidak menentu. Tetapi jarak antara dua garis sejajar harus terbatas. Oleh karena itu, akan menjadi kontradiksi dan pengandaian kita salah. Jadi, M hanya merupakan satu-satunya garis yang melalui P yang sejajar dengan L . Karenanya, postulat Playfair berlaku, dan juga ekuivalen dengan postulat sejajar Euclid.



Gambar 2.7

Kita tidak mengharapkan maksud yang lebih mengesankan tentang variasi yang bisa muncul dalam argumen di bidang geometri dasar yang disampaikan oleh ahli matematika abad 15. Sekarang marilah kita uji. Argumen tersebut mencakup 3 asumsi:

- jika dua garis saling berpotongan, jarak pada suatu garis dari satu titik ke garis lainnya akan meningkat secara tak menentu, karena titik tersebut mundur(menyusut) tak berujung.*
- Segmen terpendek yang menghubungkan titik eksternal pada suatu garis merupakan segmen yang tegak lurus*
- Jarak antara dua garis sejajar adalah terbatas*

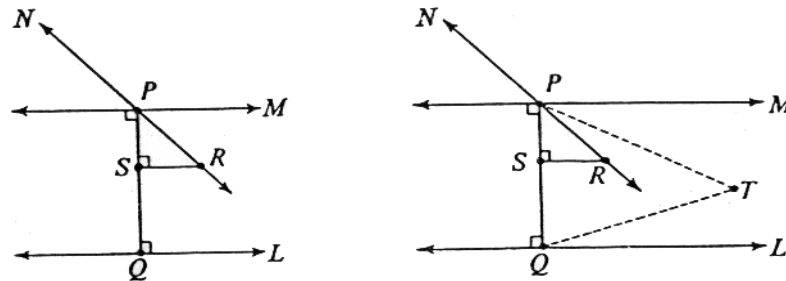
(A) dan (B) dapat dibenarkan tanpa bantuan postulat sejajar Euclid. Jadi inti persoalan pembuktian adalah asumsi (C). Proclus mengasumsikan (C) sebagai postulat tambahan. Mari kita sebut sebagai postulate asumsi proclus tersembunyi. Kemudian bisa dinyatakan; postulat Proclus ekuivalen dengan postulat sejajar Proclus. Seperti yang dijelaskan pada hasil 4 sub bab 4, postulat sejajar Euclid mengimplikasikan bahwa jarak antara garis sejajar selalu konstan, dan terbatas. Konversinya, melalui argument Proclus dapat dinyatakan bahwa postulat Proclus mengimplikasikan postulat sejajar Euclid.

Jadi, Proclus menggantikan postulat sejajar dengan postulat yang ekuivalen, dan bukan menetapkan validitas postulat sejajar tersebut.

6. Solusi Wallis atas Permasalahan yang ada

John Wallis(1616-1703) menggantikan postulat sejajar Euclid dengan menggunakan postulat berikut ini:

Ada segitiga dengan satu sisi yang telah ditetapkan sebelumnya secara sebarang yang akan sama dengan segitiga yang diketahui

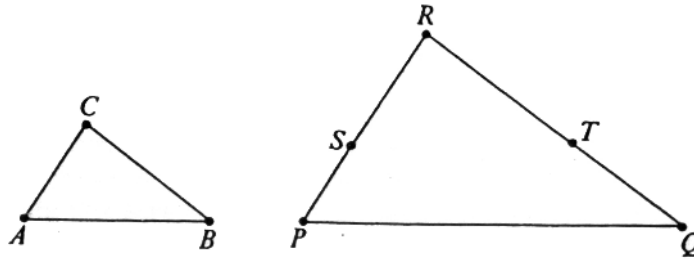


Gambar 2.8

Dari sini, postulat Playfair dapat dideduksi sebagai berikut:

Misalkan P merupakan titik yang tidak terletak pada garis L. dari P, hilangkan PQ yang tegak lurus dengan L, yang bertemu L di Q, dan di P buat garis M yang tegak lurus dengan PQ (gb 2.8). Misalkan N adalah sebarang garis selain M yang memuat P. Kita tunjukkan bahwa N bertemu L. Misalkan R sebarang titik pada N di daerah antara L dan M. Dari R, hilangkan garis RS yang tegak lurus dengan garis PQ, sehingga bertemu dengan PQ di S. Sekarang, dengan menggunakan postulat Wallis, tentukan segitiga PQT sedemikian sehingga ΔPQT sama dengan ΔPSR dan T berada pada sisi yang sama dari PQ sebagai R. Kemudian $\angle TPQ = \angle RPS$, dan PR dan PT bertemu. Jadi, T berada pada N. Selanjutnya $\angle PQT = \angle PSR$, sehingga $\angle PQT$ merupakan sudut siku-siku. Karena L tegak lurus dengan PQ di Q, maka T berada pada L, sehingga N bertemu L di T, dan hanya ada satu garis yang memuat P yang sejajar dengan L.

Jadi jelas bahwa **postulat Willis mengimplikasikan postulat sejajar Euclid**. Seperti yang telah dibahas di hasil 7 sub bab 4, konversi dari pernyataan tersebut akan berlaku. Jadi, postulat Wallis secara logis, ekuivalen dengan postulat Euclid. Wallis merasakan bahwa postulatnya sudah pasti, dan telah menangani permasalahan postulat sejajar cukup lama.



Gambar 2.9

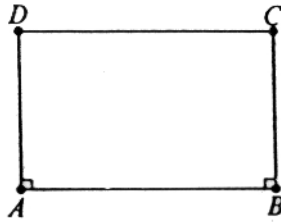
Apakah postulat Wallis lebih jelas atau lebih sederhana daripada postulat Euclid? Sebenarnya, postulatnya mengatakan bahwa jika $\triangle ABC$ dan segmen $\overline{PQ}$ diberikan dalam gb 2.9, akan ada titik R sedemikian sehingga $\triangle PQR$ sama dengan $\triangle ABC$. Bagaimana kita peroleh titik R? pada sisi PQ yang diketahui, kita dapat membentuk $\angle QPS = \angle A$ dan $\angle PQT = \angle B$. Lalu R akan muncul sebagai perpotongan garis PS dan QT. Akibatnya, postulat Wallis mengimplikasikan bahwa PS dan QT harus bertemu. Perhatikan bahwa $\angle A + \angle B < 180^\circ$ menurut teorema 3, sehingga $\angle P + \angle Q < 180^\circ$. Jadi postulat Wallis menyatakan bahwa dalam kasus tertentu, jika dua garis bertemu dengan garis transversal sehingga membentuk pasangan sudut pada satu sisi garis transversal yang jumlah sudutnya kurang dari 180° , maka dua garis tersebut haruslah bertemu. Hal ini sangat serupa dengan postulat sejajar Euclid. Tetapi postulat Wallis menyatakan hal yang lebih lengkap, karena postulat tersebut memerlukan $\angle R = \angle C$ dan proporsionalitas sisi dua segitiga tersebut. Tampaknya, postulat Wallis lebih pasti daripada postulat Euclid, dan tidak rumit.

7. Percobaan Saccheri untuk Mempertahankan Postulat Euclid

Girolamo Saccheri (1667-1733) melakukan studi yang mendalam tentang geometri dalam buku yang berjudul *Euclides Vindicatus*, yang diterbitkan di tahun saat kematiannya. Beliau melakukan pendekatan terhadap permasalahan pembuktian postulat sejajar Euclid dengan cara baru yang radikal. **Prosedurnya ekuivalen dengan mengasumsikan bahwa postulat sejajar Euclid salah, dan menemukan kontradiksi dengan penalaran logis. Hal ini akan mensahkan postulat sejajar dengan menggunakan prinsip metode tak langsung.**

Maksud Saccheri adalah studi segi empat yang memiliki sisi yang sama panjang dan tegak lurus dengan sisi ketiga. Tanpa mengasumsikan sebarang postulat sejajar, beliau melakukan studi mendalam tentang segi empat tersebut, yang sekarang disebut dengan segi empat Saccheri. Misalkan ABCD merupakan segi empat Saccheri dengan $\overline{AD} = \overline{BC}$ dan sudut siku-siku di A, B (gb 2.10). Saccheri membuktikan bahwa $\angle C = \angle D$, dan kemudian mempertimbangkan tiga kemungkinan yang berhubungan dengan sudut C dan D:

1. hipotesis tentang sudut siku-siku ($\angle C = \angle D = 90^\circ$)
2. hipotesis tentang sudut tumpul ($\angle C = \angle D > 90^\circ$)
3. hipotesis tentang sudut lancip ($\angle C = \angle D < 90^\circ$)



Gambar 2.10

Jika postulat sejajar Euclid diasumsikan, maka hipotesis sudut siku-siku akan terjadi (karena postulat sejajar mengimplikasikan bahwa jumlah sudut sebarang segi empat adalah 360°). **Argumen dasar Saccheri** sebagai berikut:

Tunjukkan bahwa hipotesis sudut tumpul dan hipotesis sudut lancip keduanya membawa keadaan kontradiksi. Hal ini akan membentuk hipotesis sudut siku-siku yang ekuivalen dengan postulat sejajar Euclid.

Saccheri membuktikan menggunakan sederetan teorema yang memiliki alasan yang tepat, bahwa hipotesis sudut tumpul akan menghasilkan kontradiksi.

Beliau mempertimbangkan implikasi hipotesis sudut lancip. Diantaranya ada sejumlah teorema yang tidak umum, dua diantaranya kita nyatakan sebagai berikut:

Jumlah sudut sebarang segitiga kurang dari 180° .

Jika L dan M merupakan dua garis dalam bidang, maka salah satu dari sifat dibawah ini dipenuhi:

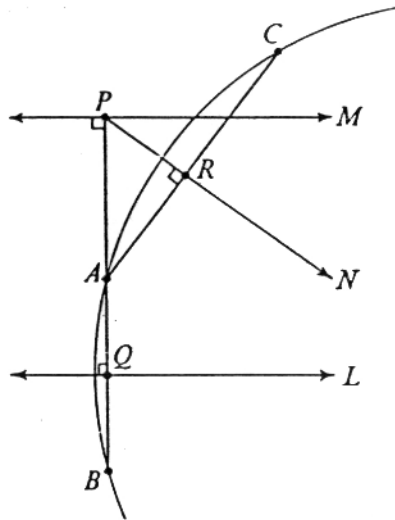
- L dan M berpotongan, dalam kasus dimana dua garis tersebut divergen dari titik perpotongan*
- L dan M tidak berpotongan tetapi memiliki garis tegak lurus yang sama dimana dua garis tersebut divergen dalam kedua arah dari garis tegak lurus yang sama tersebut*
- L dan M tidak berpotongan dan tidak memiliki garis tegak lurus yang sama, dimana dua garis tersebut konvergen dalam satu arah, dan divergen pada arah lainnya.*

Saccheri tidak memandang sebagai kontradiksi, meskipun beliau pikir harus menganggap sebagai kontradiksi; dan bahkan diketahui pada masa sekarang bahwa teori hipotesis sudut lancip Saccheri bebas dari kontradiksi seperti geometri Euclid. Sebenarnya, beliau membuktikan sejumlah teorema dalam bidang geometri non-euclid yang dikembangkan kira-kira satu abad setelah **Bolyai dan Lobachevsky**.

Tampaknya kepercayaan Saccheri pada Euclid ternyata menghindarinya melakukan perubahan logis menjadi geometri non-euclid. Upayanya untuk mempertahankan Euclid ternyata suatu kegagalan, tetapi kesalahan besar dengan sebagai satu-satunya orang yang memiliki kemampuan tak lazim dan dedikasi langka dapat mencapainya.

Latihan

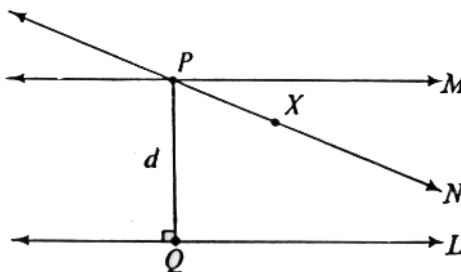
1. Buktikan postulat Playfair ekivalen dengan teorema sudut interior dalam berseberangan: jika dua garis sejajar dipotong oleh garis transversal, sebarang pasang sudut interior dalam berseberangan yang terbentuk akan sama besar.
2. Beri kupasan mengenai bukti postulat sejajar Euclid yang diberikan melalui argumen oleh W. Bolyai (1775-1856):



Gambar 2.11

Diberikan titik P yang tidak berada pada garis L, PQ tegak lurus dengan L di Q, dan garis M tegak lurus dengan PQ di P. Misalkan N merupakan sebarang garis melalui P yang berbeda dari M (gb 2.11). Tunjukkan bahwa N bertemu dengan L sehingga M merupakan satu-satunya garis yang melalui P yang sejajar dengan L. Misalkan A sebarang garis antara P dan Q. Perluas $\overline{AQ}$ melalui Q hingga B. Misalkan AR tegak lurus dengan N di R dan perluas $\overline{AR}$ melalui R hingga C. Maka A, B, C tidak terletak pada garis dan tentukan sebuah segitiga. Misalkan Z merupakan lingkaran yang membatasi segitiga ini. Maka L dan N merupakan bisektor tali busur yang tegak lurus dan haruslah bertemu di pusatnya.

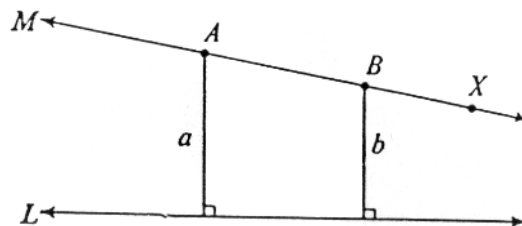
3. Beri kupasan mengenai pembuktian postulat sejajar Euclid di bawah ini



Gambar 2.12

Diberikan titik P yang tidak pada garis L, PQ tegak lurus dengan L di Q. misalkan d adalah jarak PQ dari P ke L. misalkan M adalah garis yang titik-titiknya berada pada sisi yang sama dari L sebagai titik P dan pada jarak d dari L. Jelaslah M memuat P dan tidak bertemu dengan L. Sekarang dimisalkan N adalah sebarang garis lain melalui P. Akan kita tunjukkan bahwa N bertemu dengan L. N melewati M dan memasuki daerah antara M dan L, misalkan dikatakan pada daerah sebelah kanan dari garis PQ. Misalkan X merupakan sebarang titik pada N yang berada di sebelah kanan garis PQ. Maka karena X mundur(menyusut) dari P, jarak dari X ke M akan meningkat tidak menentu. Pada akhirnya menjadi lebih besar dari d, jarak konstan dari titik M ke L. Akhirnya M juga harus bertemu dengan L, dan tentu saja N bertemu dengan L. Oleh karena itu, M merupakan satu-satunya garis yang melalui P yang sejajar dengan L.

4. Beri kupasan mengenai pembuktian proposisi berikut ini; dua garis yang tidak berjarak sama pasti bertemu.



Gambar 2.13

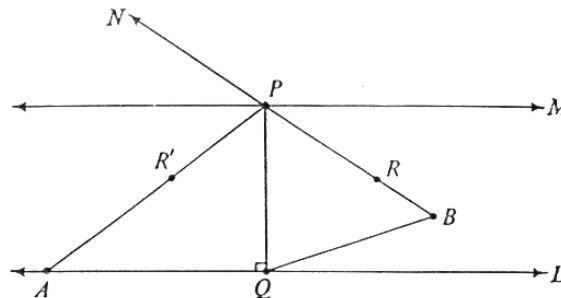
Misalkan garis L tidak berjarak sama dari dari M. maka akan ada dua titik A pada L dengan jarak a dari M dan titik B pada L dengan jarak b dari M sedemikian sehingga $a \neq b$. misalkan kita katakan $a > b$. Misalkan $c = a - b$ dan misalkan d adalah jarak AB. Karena suatu titik bergerak melalui jarak d dari A ke B sepanjang M, jaraknya pada L akan menurun dikarenakan c. pilihlah X pada M dalam arah yang sama dari A sebagai B sedemikian sehingga AX adalah $(a/c)d$. maka karena suatu titik bergerak dengan jarak $(a/c)d$ dari A ke X sepanjang M, maka jaraknya pada L menurun dikarenakan $(a/c)c = a$. Sehingga jarak dari X ke L adalah $a - a = 0$, yakni M bertemu L di X.

Hal ini mengimplikasikan bahwa hanya ada satu garis melalui P yang sejajar dengan L, yakni garis yang melalui P yang berjaraknya sama dari L.

5. Beri kupasan mengenai pembuktian postulat sejajar Euclid dari A.M Legendre (1752-1833):

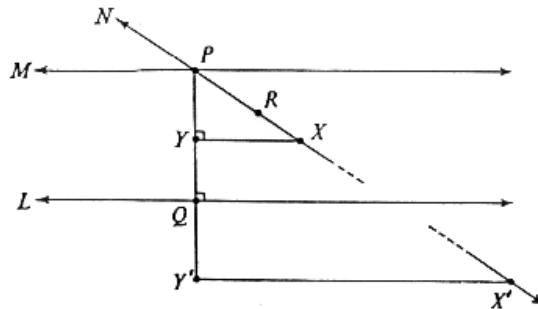
Diketahui titik P tidak berada pada garis L, PQ tegak lurus pada L di Q dan garis M tegak lurus dengan PQ di P. Misalkan N merupakan sebarang garis yang melalui P yang berbeda dari garis M. Akan kita tunjukkan bahwa N bertemu dengan L sehingga M hanya satu-satunya garis yang melalui P yang sejajar dengan L. Tentu saja N bertemu dengan L jika N tegak lurus dengan L, sehingga dapat kita asumsikan N tidak tegak lurus dengan L. karena N berbeda dari M, pasti ada suatu titik R pada N sedemikian sehingga $\angle QPR'$ adalah sudut lancip. Bentuk $\angle QPR$ yang sama dengan $\angle QPR$ dengan R' berada pada sisi berlawanan PQ dari R. maka Q berada didalam $\angle RPR'$. Jadi, L memuat titik di dalam $\angle RPR'$ dan harus

bertemu satu dari sisi-sisinya. Jika L bertemu dengan sisi PR , tentu saja N bertemu dengan L . anggaplah L bertemu dengan sisi PR' di A . pilih titik B pada sisi PR sedemikian sehingga $\overline{PB} = \overline{PA}$, maka $\triangle PQA \cong \triangle PQB$ (SAS) dan $\angle PQB$ adalah sudut siku-siku. Jadi B berada pada L dan N bertemu dengan L .



Gambar 2.14

6. Beri kupasan mengenai pembuktian postulat sejajar Euclid berikut ini:



Gambar 2.15

Diketahui titik P tidak berada pada garis L , PQ tegak lurus dengan L di Q dan garis M tegak lurus dengan PQ di P . Misalkan N adalah sebarang garis yang melalui P yang berbeda dari M . Akan ditunjukkan bahwa N bertemu L sehingga M merupakan satu-satunya garis yang melalui P yang sejajar dengan L . Tentu saja N bertemu dengan L jika N tegak lurus dengan L , sehingga dapat kita asumsikan N tidak tegak lurus dengan L . Karena N berbeda dari M , pasti ada suatu titik R pada N sedemikian sehingga $\angle QPR$ bukanlah sudut lancip. Pilih titik X secara sebarang pada sisi PR dari $\angle QPR$ dan misalkan Y merupakan kaki tegak lurus dari X pada sisi PQ dari $\angle QPR$. Misalkan X menyusut tak berakhir, maka y menyusut tak berakhir. Maka ada posisi Y' dari Y pada sisi PQ sedemikian sehingga $\overline{PY'} > \overline{PQ}$. Misalkan X' merupakan posisi X pada sisi PR . Karena $\overline{PY'} > \overline{PQ}$, titik P dan Y' haruslah berada pada sisi yang berlawanan dari L . Tetapi X' dan Y' berada pada sisi yang sama dari L , karena $Y'X' \parallel L$, jadi, P dan X' berada pada sisi yang berlawanan dari L , dan garis N yang menghubungkan titik P dan X' haruslah bertemu di L .

7. Postulat sejajar Euclid secara tidak langsung menyatakan bahwa jumlah sudut setiap segitiga adalah 180° . Apakah konversinya berlaku benar? Coba buktikan pernyataan ini, tetapi jangan habiskan waktu saja tanpa persiapan yang cukup untuk memecahkan permasalahan ini.

Referensi :

Prenowitz, W. Jordan, M. 1965. *Basic Concepts of Geometry*. Blaisdell Publishing Company : Waltham, Massachusetts. Toronto. London.