Presented by :
Rohana & Muhammad Win Afgani
Mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika Pascasarjana Universitas Sriwijaya Angkatan 2006

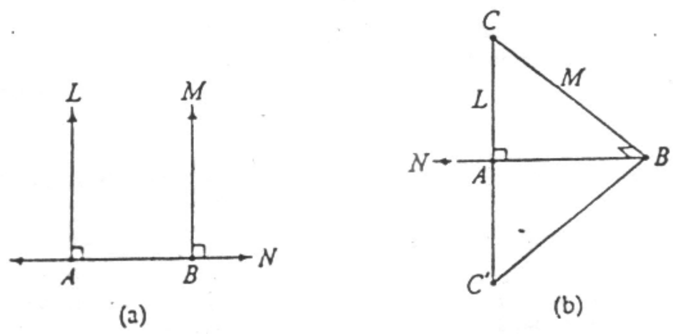
Teori Geometri Riemann

Teori Riemann kontradiksi dengan postulat sejajar Euclid dengan mengasumsikan prinsip berikut ini:

Postulat sejajar Riemann. *Tidak ada garis yang sejajar*

Dengan menganalisa bukti pada *crucial properties* dari **Teorema 2 Corollary 3 Postulat Kesejajaran Euclid**, yaitu :

Dua garis yang tegak lurus dengan garis yang sama akan sejajar



Gambar 4.14

Diketahui. Dua garis yang berbeda L, M yang tegak lurus dengan garis N (gambar 4.14(a).

Untuk membuktikan: L sejajar dengan M

Bukti.

Anggaplah L sejajar dengan M adalah pernyataan yang salah.

Maka L dan M akan bertemu di titik C (gambar 4.14(b)).

Misalkan L, M bertemu dengan N di A, B.

1. Perluas $\overline{CA}$ melalui panjangnya sendiri melalui A ke C'	1. Segmen dapat digandakan
2. Gambar C'B	2. Dua titik menentukan suatu garis
3. $\Delta ABC \cong \Delta ABC'$	3. SAS
4. $\angle ABC = \angle ABC'$	4. bagian yang sehadap

Jadi, $\angle$ABC' merupakan sudut siku-siku
karena $\angle$ABC merupakan sudut siku-siku
BC dan BC' tegak lurus dengan AB.

5. BC dan BC' serupa	5. hanya ada satu garis yang tegak lurus dengan garis yang diketahui pada titik pada garis yang diketahui pula

Jadi, AC dan BC, atau L dan M memiliki titik C dan C' secara bersama-sama.

6. Jadi L dan M serupa	6. Dua titik menentukan garis

Hal ini kontradiksi dengan hipotesis kita bahwa L dan M adalah garis yang berbeda. Jadi, pengandaian kita salah dan teorema berlaku benar.

Analisa pembuktian Riemann :

Pandangan penting adalah Langkah 6, bahwa L dan M serupa karena titik tersebut memiliki titik C dan C' secara bersama-sama.

Langkah ini (dan juga pembuktiannya) akan gagal **jika C dan C' tidak berbeda**,

Untuk menjawabnya, **Euclid** mengasumsikan bahwa **setiap garis "memisahkan" bidang menjadi dua sisi yang berhadapan**.

- jika L merupakan garis yang diketahui,
- titik dari bidang tersebut tidak pada L akan menyatakan dua bidang atau himpunan titik, yang disebut dengan sisi dari L.
- sisi ini tidak memiliki titik yang sama,

- setiap segmen yang menghubungkan titik dari satu sisi untuk suatu titik dari sisi sehadap atau sisi lainnya untuk bertemu dengan L.
- dalam pandangan sifat pemisahan, konstruksi dalam Langkah 1 pembuktian diatas (untuk memperluas $\overline{CA}$ melalui panjangnya ke C') menjamin bahwa C dan C' berada pada sisi sehadap dari N dan merupakan titik yang berbeda.
- Tanpa sifat pemisahan, keberbedaan C dari C' tidak memiliki justifikasi formal, dan bukti tersebut akan gagal.

teori geometri Riemann membuang postulat yang menyatakan bahwa setiap garis memisahkan bidang.

Menurut Riemann,

- Jika prinsip pemisahan tersebut diterima, C dan C' haruslah merupakan titik yang berbeda,
- jika mengabaikan prinsip yang menyatakan bahwa dua titik menentukan suatu garis, artinya memperbolehkan dua garis untuk berpotongan dalam dua titik.

Kesimpulan.

Ada dua teori geometris yang mengasumsikan postulat sejajar Riemann.

pertama, teori geometri eliptik tunggal,

sebarang dua garis yang berpotongan dalam tepat satu titik, tetapi tidak ada garis yang memisahkan bidang tersebut.

kedua, teori geometri eliptik rangkap dua,

dua garis berpotongan dalam tepat dua titik, dan setiap garis memisahkan bidang.

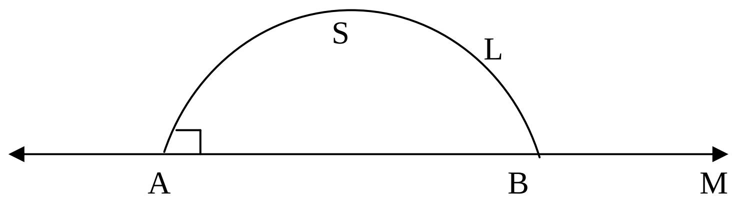
Garis sebagai BangunTertutup

Pertama, pertimbangkan geometri eliptik tunggal. Dengan menguji situasi yang ditunjukkan oleh gambar 4.14 (b) dalam pembuktian teorema bahwa dua garis yang tegak lurus pada garis yang sama akan sejajar, terlihat bahwa jika teori geometri eliptik tunggal mungkin digunakan,

- titik C' haruslah berimpit dengan titik C.
- Jadi, dalam memperpanjang $\overline{CA}$ hingga C', artinya kembali ke titik C lagi. segmen $\overline{CA}$ dan perluasannya.
- Akibatnya, suatu garis disusun sebagai suatu bangun tertutup.
- Jadi berlaku bahwa suatu titik tidak memisahkan suatu garis menjadi dua bagian;
- tetapi dua titik dari suatu garis akan memisahkan titik tersebut menjadi 2 segmen,
- sehingga penentuan pada garis tersebut tidak pada satu segmen saja tetapi pada dua segmen yang merupakan titik-titik ujung yang sama.

Konsepsi garis ini mungkin saja termotivasi dalam geometri eliptik ganda dengan cara berikut ini.

- Misalkan garis L diketahui dan misalkan A merupakan titik dari L (gambar 4.15).
- Misalkan M tegak lurus dengan L di A.
- Maka L dan M bertemu pada titik kedua B.
- A dan B sebagai titik ujung dari satu segmen, setidaknya, termuat dalam garis L.
- Misalkan S suatu segmen yang menghubungkan A dan B, yang termuat dalam L.
- Karena M memisahkan bidang tersebut dan M bertemu dengan L tepat pada dua titik,
- S haruslah (terpisah dari titik ujung) seluruhnya berada pada satu sisi M.



Gambar 4.15

Selanjutnya, ingin dibuktikan bahwa

- setiap titik L pada sisi M yang diketahui, berada pada S.

Konsep garis diperlukan syarat bahwa :

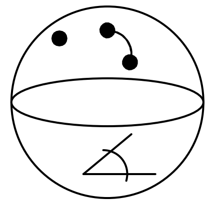
- sebarang titik L yang tidak pada segmen S haruslah merupakan perluasan dari S diluar satu titik ujungnya A atau B.
- Tetapi dalam proses perluasan S diluar A atau B, garis L ”melewati” M, dan masuk pada sisi M yang berhadapan dengan S.
- Jadi, sebarang titik dari L pada sisi yang sama dari M sebagai S haruslah pada S, dan disimpulkan bahwa S menyatakan bagian dari L pada sisi M yang diketahui.

Akan diargumentasikan pernyataan bahwa ada segmen S’, yang termuat dalam garis L, yang menghubungkan A dan B pada sisi lain dari M dan menyatakan bahwa bagian dari L pada sisi M tersebut.

- Untuk tujuan ini, ingat kembali bahwa ide kardinal geometri bidang Euclid (dari geometri netral) yang menyatakan bahwa *sebarang bangun F dapat dicerminkan (secara tegak lurus) pada garis yang diketahui untuk menghasilkan bangun simetrik F’.*
- Teori simetri ini perlu dipakai dalam geometri eliptik ganda.
- Jadi, akan ada bangun S’ yang simetrik dengan segmen S yang menguhubungkan A dan B pada sisi lain dari M dari titik S.
- Karena S merupakan segmen, S’ juga merupakan segmen.
- Karena S tegak lurus dengan M di A,
- segmen simetrik S’ juga tegak lurus dengan M di A.
- Karena S dan S’ merupakan segmen yang tegak lurus pada garis yang sama pada titik yang sama,
- maka S dan S’ harus bertemu dalam satu garis; yakni, S’ termuat dalam L. Dengan menggunakan argumen dari paragraf terakhir,
- sebarang titik dari L pada sisi yang sama dari M seperti S’, haruslah pada S’. Disimpulkan bahwa
- L dinyatakan oleh segmen S dan S’.
- Jadi, diyakinkan bahwa garis sebagai bangun tertutup, seperti dalam geometri eliptik tunggal.

Representasi Bola Pejal Euclid

Tabel berikut ini mendaftarkan beberapa konsep dasar geometri eliptik ganda dan representasinya pada bola pejal Euclid (gambar 4.16).

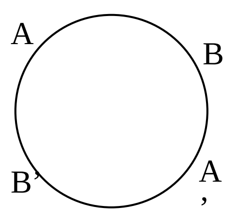


Gambar 4.16

<u>Geometri Eliptik Ganda</u>	<u>Representasi Euclid</u>
Titik	titik pada bola pejal S
Garis	Lingkaran besar dari S
Bidang	bola pejal S
Segmen	busur lingkaran besar S
Jarak antara dua titik	panjang busur terpendek dari lingkaran besar S yang menghubungkan dua titik
Sudut (yang dibentuk oleh dua garis)	Sudut bola pejal (yang dibentuk oleh dua Lingkaran besar)
Ukuran sudut	ukuran sudut bola pejal

Perhatikan bahwa postulat sejajar Riemann akan terpenuhi dalam representasi ini:

- setiap dua garis (lingkaran besar) bertemu, dan kenyataannya tepat pada dua titik.
- Selanjutnya, postulat pemisahan akan terpenuhi, karena setiap lingkaran besar akan memisahkan bola pejal tersebut menjadi dua belahan.
- Akhirnya, sebagai catatan bahwa setiap garis akan tampak sebagai bangun yang tertutup.



Gambar 4.17

Representasi geometri eliptik tunggal diturunkan dari geometri ganda.

- Lingkaran besar pada bola pejal tidak menunjukkan suatu garis geometri eliptik tunggal,
- karena dua lingkaran besar selalu berpotongan menjadi dua titik yang berhadapan secara diameter.

BUKTI :

- anggaplah bahwa dipertimbangkan sebarang dua titik yang berhadapan pada bola pejal sebagai titik yang sama; untuk mengidentifikasi sebarang titik dan titik sehadapnya.
- Maka dapat dinyatakan geometri eliptik tunggal sebagai geometri eliptik ganda.
- Jadi, garis geometri eliptik tunggal dinyatakan dengan lingkaran besar (dengan persetujuan bahwa titik yang sehadap telah diidentifikasikan).
- Segmen dinyatakan dengan busur minor lingkaran besar (karena busur mayor atau semi lingkaran menunjukkan keseluruhan garis).
- Untuk menentukan jarak antara dua titik yang ditunjukkan oleh A dan B, ingatlah bahwa A dan titik sehadapnya yakni A' menunjukkan titik yang sama, begitupun untuk B dan titik sehadapnya B' (gambar 4.17).
- Jadi, jarak diambil sebesar panjang dari sumbu minor yang lebih kecil yakni $\overline{AB}, \overline{AB'}$ (atau secara ekivalen sumbu minor $\overline{A'B}, \overline{A'B'}$).
- Sudut dan ukurannya ditunjukkan seperti dalam geometri eliptik ganda.

  Kesimpulan :

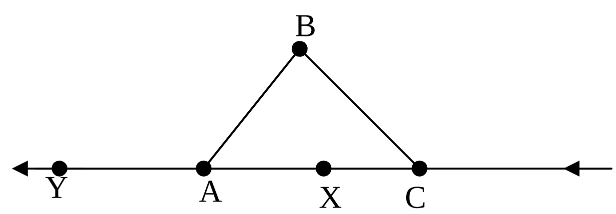
  - suatu garis merupakan bangun tertutup dan postulat sejajar Riemann terpenuhi.

- Tetapi sekarang, karena titik yang sehadap teridentifikasi, dua garis akan bertemu dalam satu titik saja. Juga berlaku bahwa postulat yang menyatakan *dua titik menentukan suatu garis*, juga terpenuhi.

Kesulitan yang ditemui dalam Perlakukan Formal Teori Riemann

Dalam toeri Riemann, titik dan garis berperilaku agak berbeda.

- Seperti yang telah dilihat (sub bab 10), garis merupakan bangun tertutup dan dua dari titiknya memisahkan garis tersebut menjadi dua segmen.
- Agak sulit mendefinisikan sudut, karena tidak punya arti tentang garis berarah seperti dalam geometri netral.
- Bahkan pertanyaan tentang membentuk definisi yang tepat untuk segitiga juga menjadi suatu masalah.
- Sebagai contoh, A, B, C merupakan tiga titik yang kolinier dan misalkan $\overline{AXC}, \overline{AYC}$ merupakan dua segmen garis AC yang ditentukan oleh A dan C (gambar 4.18).
- Maka jika segmen $\overline{AB}, \overline{BC}$ dan $\overline{AXC}$ membentuk suatu segitiga,
- dapatkah juga dipertimbangkan bahwa $\overline{AB}, \overline{BC}$ dan $\overline{AYC}$ membentuk suatu segitiga?
- Jika begitu, bilakah prinsip SAS dapat berlaku valid?
- Dalam geometri Euclid atau Lobacheski, kesulitaan tipe ini tidak muncul,
- karena segitiga yang berbeda tidak mungkin memiliki titik yang sama.



Gambar 4.18

Sifat Polar dalam Geometri Bidang Eliptik

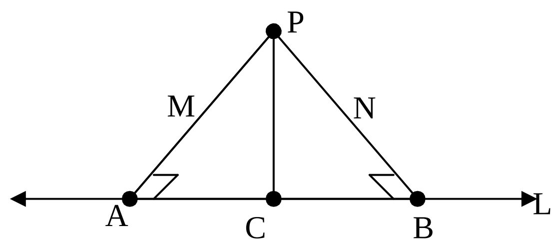
Dalam geometri bidang eliptik (seperti dalam geometri bidang Euclid dan Lobachevski),

- hanya ada satu garis yang tegak lurus dengan garis yang diketahui yang melalui suatu titik yang diketahui,
- jika titik tersebut berada pada garis tersebut.
- Akan tetapi, jika titik tersebut tidak berada pada garis tersebut, sifat ini akan gagal,
- karena sebarang dua garis yang tegak lurus dengan garis yang sama haruslah bertemu.
- menurut, geometri eliptik yang biasa: yakni, untuk setiap garis L, ada titik polar P sedemikian sehingga semua garis yang melalui P akan tegak lurus dengan L,
- seperti semua lingkaran besar pada bola dunia yang melalui kutub utaranya yang tegak lurus dengan ekuatornya.

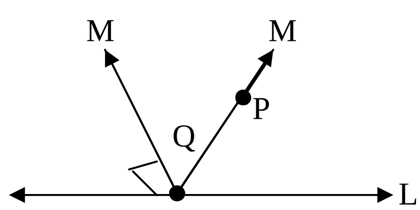
Untuk melihat mengapa hal ini bisa seperti itu, pertimbangkan geometri bidang eliptik (tipe lain).

- Misalkan L merupakan garis sebarang
- misalkan M, N tegak lurus dengan L pada titik yang berbeda A dan B (gambar 4.19).
- dengan menggunakan postulat sejajar Riemann, M dan N bertemu di titik P,
- sehingga suatu segitiga PAB dibentuk dengan sisi $\overline{PA}, \overline{PB}$ dan $\overline{AB}$.

- Karena ΔPAB memiliki dua sudut yang sama besar, segitiga tersebut akan sama kaki.
- Secara khusus, $\overline{PA} = \overline{PB}$.
- Misalkan C merupakan titik tengah segmen $\overline{PA}, \overline{PB}$ sebagai sisi yang berhubungan
- segmen $\overline{PC}$ sebagai sisi yang dimiliki bersama.
- Berlaku bahwa garis PC tegak lurus dengan AB.
- Dengan menggunakan argumen diatas, ΔPAC dan ΔPBC adalah segitiga sama kaki.
- Jadi, $\overline{PC} = \overline{PA} = \overline{PB}$
- Jelaslah, argumen tersebut dapat diulangi dengan membagi dua sama besar sisi ketiga dari ΔPAC (atau dari ΔPBC)
- dan dapat ditentukan sebanyak titik yang diinginkan pada L yang dihubungkan dengan P oleh segmen yang sama panjang, dan yang tegak lurus dengan L. Hal ini menyarankan sifat berikut ini:



Gambar 4.19



Gambar 4.20

Sifat Polar.

- Misalkan L merupakan sebarang garis.
- Maka akan ada titik P, yang disebut kutub dari L, sedemikian sehingga
  (a). setiap segmen yang menghubungkan P ke suatu titik dari L akan tegak lurus dengan L, dan
  (b). P berjarak sama dari semua titik dari L.

Dipertimbangkan beberapa akibat dari sifat polar.

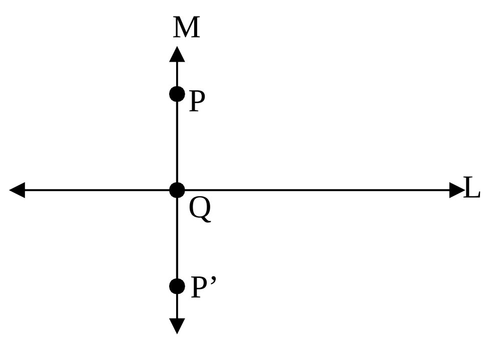
- Pertama, sifat tersebut perlu ditekankan bahwa karena dua titik dihubungkan oleh lebih dari satu segmen, maka jarak antara dua titik diambil sebagai panjang yang paling singkat yang menghubungkan segmen.
- Selanjutnya, perhatikan jika P merupakan kutub dari L, setiap garis yang tegak lurus dengan L melalui P.
- Anggaplah M tegak lurus pada L pada titik Q pada L (gambar 4.20).
- Tentu saja ada suatu garis M’ yang melalui P dan Q.
- Dengan menggunakan sifat polar, M’ akan tegak lurus dengan L di Q.
- Karena L memiliki tegak lurus yang unik di Q, M dan M’ saling berimpit dan M haruslah melewati P.

Jarak polar untuk menunjukkan jarak konstan dari P menuju titik-titik dari L.

- Misalkan garis M menghubungkan P ke titik Q dari L.
- Ditunjukkan bahwa akan ada segmen dari M yang menghubungkan P dan Q yang memiliki panjang sama dengan jarak polar P dari L.
- Dengan menggunakan sifat polar, M akan tegak lurus dengan L di Q,
- dan hanya ada satu garis yang menghubungkan P dan Q
- karena hanya ada satu garis yang tegak lurus dengan L di Q.
- Jadi, ada dua segmen yang menghubungkan P dan Q, segmen dimana P dan Q memisahkan M.
- Panjang yang lebih singkat dari segmen ini adalah jarak antara P dan Q dan haruslah merupakan jarak polar dari P ke L.

Sekarang pertimbangkan suatu konstruksi yang menyarankan bahwa suatu garis mungkin saja memiliki dua kutub.

- Misalkan P merupakan kutub garis L, dan Q merupakan titik dari L (gambar 4.21).
- Misalkan $\overline{PQ}$ merupakan segmen polar, yakni, segmen yang menghubungkan P dan Q yang panjangnya merupakan jarak polar dari P ke L.
- Perluas $\overline{PQ}$ melalui panjangnya melalui Q menuju P'.
- Pertimbangan simetri menyarankan bahwa P' juga merupakan kutub L,
- dan bahwa jarak polar L dari P dan P' adalah sama.
- karena P' dan P merupakan titik yang berbeda.
- disimpulkan bahwa setiap garis tidak memiliki dua kutub



Gambar 4.21

Dengan menguji situasi tersebut lebih dekat, pertama dipertimbangkan kasus geometri eliptik tunggal.

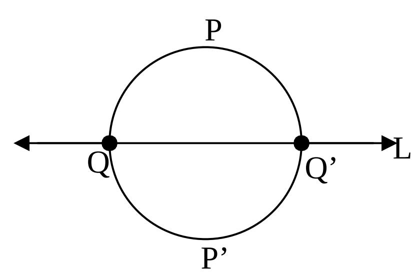
- Anggaplah P' dan P tidak berimpit.
- Maka akan berlaku bahwa sifat polar (seperti yang terlihat diatas) bahwa dua garis yang tegak lurus dengan L akan bertemu pada titik yang berbeda yakni P dan P'.
- Karena hal yang demikian tidak mungkin terjadi, P dan P' haruslah berimpit.
- Jadi, dengan memperluas $\overline{PQ}$ dengan melalui panjangnya sendiri menjadi P',
- terlihat bahwa panjang garis PQ ternyata dua kali jarak polar dari P ke L.

Sekarang, pertimbangkan kasus eliptik ganda.

- Dengan mengingat kembali bahwa L memisahkan bidang tersebut,
- terlihat bahwa P dan P' berada sisi sehadap L dan tidak berimpit.
- Jadi setiap garis setidaknya memilik dua kutub.
- Suatu garis tidak mungkin memiliki lebih dari dua kutub, karena, seperti yang terlihat, semua yang tegak lurus dengan garis tersebut untuk melewati garis tersebut haruslah melalui kutubnya.

Selanjutnya, diuji juga struktur garis PQ.

- Dengan memperluas $\overline{PQ}$ melaui panjangnya sendiri P',
- telah dibentuk suatu segmen $\overline{P'Q}$ yang simetris dengan $\overline{PQ}$ terhadap L.
- $\overline{PQ}$ dan $\overline{P'Q}$ hanya punya Q yang dimiliki bersama dan menyatakan suatu segmen $\overline{PQP'}$ yang memiliki panjang dua kali jarak polarnya dari P ke L.
- Hal ini mengendurkan relasi kutub P dan P' terhadap L dan Q.
- Tetapi L bertemu dengan garis PQ pada titik kedua Q' (gambar 4.22) bagaimana Q' dihubungkan dengan P, Q dan P'?
- perhatikan bahwa Q' tidak pada $\overline{PQP'}$;
- jika memang Q' pada $\overline{PQP'}$, jarak dari P arau P' ke Q' akan kurang dari jarak polar.
- Jadi P dan P' memisahkan garis PQ menjadi $\overline{PQP'}$ dan segmen $\overline{PQ'P'}$ yang memuat Q'.
- Misalkan $\overline{PQ'}$, $\overline{P'Q'}$ merupakan segmen dimana Q' memisahkan $\overline{PQ'P'}$.
- Dinyatakan bahwa $\overline{PQ'}$ merupakan segmen polar, untuk segmen polar pada garis PQ yang menghubungkan P dan Q bukan segmen yang saling mengimbangi untuk $\overline{PQ'}$,
- karena memuat $\overline{PQ}$ dan memiliki panjang yang lebih besar daripada jarak polarnya.
- Hal serupa juga berlaku untuk $\overline{P'Q'}$, $\overline{P'Q'}$ merupakan segmen polar, jadi garis PQ dipisahkan oleh P, Q, P', Q' menjadi empat segmen polar, dan panjangnya menjadi empat kali jarak polar dari P ke L.



Gambar 4.22

- Jadi, dalam geometri eliptik tipe apa saja, jarak polar selalu konstan dan begitu pun dengan panjang suatu garis.

Dalam geometri eliptik, **jumlah sudut sebarang segitiga selalu lebih besar dari 180^0.**

- hal ini dibuktikan dengan eksistensi segitiga yang memiliki dua sudut siku-siku pada diskusi diatas.
- Jadi, berlaku bahwa jumlah sudut segiempat selalu lebih besar dari 360^0.
- Yakni, dapat dibuktikan kesamaan AAA,
- bahwa dua segitiga akan kongruen jika sudut-sudutnya sama besar.

Kesimpulan

Untuk memfasilitasi perbandingan dari tiga perilaku yang menarik titik dan garis, maka digunakan tabel di bawah ini

	Euclid	Lobachevski	Riemann	
Dua garis yang berbeda saling berpotongan pada	Paling banyak satu	Paling banyak satu	Satu(eliptik tunggal) Dua (eliptik ganda)	Titik Titik
Garis L yang diketahui dan Titik P tidak pada :, akan ada	Satu dan hanya satu-satunya garis	Setidaknya dua garis	Tidak ada garis	Yang Melalui P yang sejajar dengan L
Suatu Garis	Akan	Akan	Tidak akan	Terpisah menjadi dua bagian oleh suatu titik
Garis sejajar	Dimana-mana berjarak sama	Dimana-mana tidak berjarak sama	Tidak ada	
Jika sautu garis berpotongan dengan satu dari dua garis yang sejajar, maka garis tersebut	Haruslah	Kemungkinan atau tidak mungkin	-	Akan memotong garis tersebut
Hipotesis Saccheri yang valid adalah	Hipotesis Sudut siku-siku	Hipotesis Sudut lancip	Hipotesis Sudut tumpul	
Dua garis yang berbeda akan tegak lurus dengan garis yang sama maka	Akan sejajar	Akan sejajar	Akan berpotongan	
Jumlah sudut suatu segitiga	Akan sama dengan	Akan kurang dari	Akan lebih dari	180^0
Luas segitiga	Akan bebas	Sebanding dengan kekurangan	Sebanding dengan kelebihan	Jumlah sudutnya
Dua segitiga yang meiliki sudut yang sehadap sama besar akan	Sama besar	Kongruen	kongruen	

Referensi :

Prenowitz, W. Jordan, M. 1965. *Basic Concepts of Geometry*. Blaisdell Publishing Company : Waltham, Massachusetts. Toronto. London.