

**NR. CONTRACT: 31/GR/2006**

**TIP PROGRAM: A**

**COD CNCSIS: 1065**

**AN DERULARE: I**

**Valoare totala grant: 25 000 lei**

**Denumirea Proiectului: APLICATII LINIARE COMPLET POZITIVE**

**Director de Proiect: lect. dr. Maria JOITA**

**UNIVERSITATEA DIN BUCURESTI**

## SINTEZA LUCRARII

### 1. Obiectivele stiintifice prevazute

Principalul obiectiv stiintific al acestui proiect (anul I de studiu ) a fost descrierea structurii aplicatiilor liniare complet  $n$ -pozitive respectiv a aplicatiilor liniare complet  $n$ -pozitive covariante. Studiul aplicatiilor liniare complet pozitive fiind motivat de faptul ca acestea reprezinta un instrument de lucru foarte important in teoria informatiei cuantice dar si in alte domenii ale matematicii precum si in fizica cuantica. In teoria informatiei cuantice toate procesele admise sunt modelate de asa numitele operatii cuantice care sunt reprezentate de aplicatii liniare complet pozitive intre algebrele observabilelor (  $C^*$ -algebre) asociate sistemelor fizice considerate.

Diferite teoreme privind structura matricilor de ordinul  $n$ , ale caror elemente sunt aplicatii liniare continue intre  $C^*$ -algebre si care verifica conditia generala de pozitivitate, cunoscute si sub numele de aplicatii liniare complet  $n$ -pozitive, au fost obtinute de Kaplan, Suen, Heo etc.

Prin analogie cu cazul unei functionale liniare pozitive pe o  $C^*$ -algebra ( constructia GNS), Kaplan (*Multi-states on  $C^*$ -algebras*. Proc. Amer. Math. Soc., 106 (1989), 2, 437-446) asociaza unei matrici de functionale liniare continue pe o  $C^*$ -algebra  $A$ , care verifica conditia generala de pozitivitate, o reprezentare a  $C^*$ -algebrei  $A$  pe un spatiu Hilbert. Heo (*Completely multi-positive linear maps and representations on Hilbert  $C^*$ -modules*. J. Operator Theory 41 (1999),1, 3-22) generalizeaza rezultatele obtinute de Kaplan, considerand matrici de ordinul  $n$  ale caror elemente sunt aplicatii liniare si continue intre  $C^*$ -algebre si care verifica conditia generala de pozitivitate. Astfel, folosind tehnici din teoria  $C^*$ -modulelor Hilbert, prin analogie cu constructia KSGNS ( Kasparov, Stinespring, Gel'fand, Naimark, Segal) pentru aplicatii liniare complet pozitive intre  $C^*$ -algebre, el asociaza unei astfel de matrici o reprezentare a  $C^*$ -algebrei  $A$  pe un  $C^*$ -modul Hilbert. Suen (*An  $n \times n$  matrix of linear maps of a  $C^*$ -algebra*. Proc Amer Math. Soc.,112 (1991),3,709-712, *Representations of an  $n \times n$  matrix of linear maps on a  $C^*$ -algebra*. Math. Japon.,38(1993),3, 593-596) considera matricile de ordinul  $n$  ale caror elemente sunt aplicatii liniare definite pe o  $C^*$

-algebra  $A$  si cu valori in  $L(H)$ ,  $C^*$ -algebra operatorilor liniari si marginiti definiti pe un spatiu Hilbert  $H$ , si care verifica conditia generala de pozitivitate. El obtine doua caracterizari diferite pentru o astfel de matrice  $[\rho_{ij}]_{i,j=1}^n$ ; una prin analogie cu constructia Stinespring pentru aplicatii liniare complet pozitive definite pe  $C^*$ -algebre si cu valori in  $L(H)$  si alta in functie de reprezentarea Stinespring asociata aplicatiei liniare complet pozitive  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \rho_{kk}$ .

$C^*$ -algebrele locale sunt generalizari de  $C^*$ -algebre, topologia unei  $C^*$ -algebre locale fiind definita de o familie de  $C^*$ -seminorme. Teoria  $C^*$ -algebrelor locale este importanta prin ea insasi, dar mai ales prin faptul ca furnizeaza instrumente de investigare a anumitor aspecte din teoria  $C^*$ -algebrelor (multiplicatorii idealului lui Pedersen, cros-produse si K-teorie, topologie algebrica neocomutativa) si fizica cuantica. O constructie de tip KSGNS pentru aplicatii liniare complet pozitive intre  $C^*$ -algebre locale a fost obtinuta de M. Joita in lucrarea "Strict completely positive linear maps between locally  $C^*$ -algebras and representations on Hilbert modules", J. London Math. Soc. (2), 66 (2002), 2, 421-432, iar o constructie de tipul celei obtinute de Kaplan pentru matrici de functionale liniare si continue pe o  $C^*$ -algebra locala se gaseste in lucrarea

M. Joita, *Multi-positive linear functionals on locally  $C^*$ -algebras*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2), 53(2004), 184-194.

Un alt obiectiv stiintific al proiectului (anul I de studiu) a fost studiul reprezentarilor covariante induse de perechi covariante pozitiv definite relativ la grupoizi  $r$ -discreti (determinarea unor conditii necesare si suficiente pentru ca reprezentarea indusa de o pereche covarianta pozitiv definita sa fie ireductibila). Acest studiu fiind motivat de faptul ca Muhly si Solel (*Subalgebras of groupoid  $C^*$ -algebras*, J. Reine angew. Math. 402(1989)), utilizand caracterizarea unui grupoid  $r$ -discret  $G$  cu ajutorul semigrupului invers al  $G$ -multimilor sale deschise si compacte, au demonstrat o teorema de structura pentru o anumita clasa de  $C^*$ -algebre asociate lui  $G$ , cu ajutorul careia, cei doi asociaza (printr-o teorema de tip Stinespring) unei perechi covariante pozitiv definite o reprezentare covarianta, rezultat care le-a permis sa arate ca fiecare reprezentare contractiva a unei  $C^*$ -algebre din clasa mai sus mentionata admite o dilatare unica la o  $C^*$ -reprezentare a lui  $C^*(G)$  ( $C^*$ -algebra grupoidala asociata lui  $G$ ).

Un obiectiv secundar al acestui proiect (anul I de studiu) a fost prezentarea in cadrul seminarului de analiza functionala si redactarea unor capitole din monografia "Locally  $C^*$ -algebras and Hilbert modules".

## 2. Principalele rezultate stiintifice

Pornind de la lucrarea lui N.C. Phillips, *Representable  $K$ -theory for  $\sigma$ - $C^*$ -algebras*, K-Theory, 3(1989), 5, 441-478 in

**M. Joita**, *Crossed products of locally  $C^*$ -algebras*, **Rocky Math. J.** (revista cotata ISI), (to appear), math.OA/0512128

s-a introdus notiunea de cros-produs (cros-produs redus) al unei  $C^*$ -algebre locale  $A$  printr-o actiune limita inversa  $\alpha$  a unui grup topologic local compact  $G$  pe  $A$  si s-a demonstrat ca exista o corespondenta bijectiva intre reprezentarile covariante nedegenerate ale unui  $C^*$ -sistem dinamic local  $(G, A, \alpha)$  si reprezentarile nedegenerate ale cros-produsului  $A \times_\alpha G$ .

In lucrarea

**M. Joita**, *Covariant completely positive linear maps on locally  $C^*$ -algebras and representations on Hilbert modules*, **Houston J. Math.**, (revista cotata ISI), (to appear), math.OA/0609149

s-a demonstrat o versiune covarianta a constructiei KSGNS (Kasparov, Stinespring, Gel'fand, Naimark, Segal) pentru aplicatii liniare complet pozitive intre  $C^*$ -algebre locale ( M. Joița, *Strict completely positive maps between locally  $C^*$ -algebras and representations on Hilbert modules*, J. London Math. Soc. (2), **66**(2002), 421-432). Ca o aplicatie a acestei constructii s-a aratat ca orice aplicatie liniara continua complet pozitiva covarianta in raport cu  $C^*$ -sistemul dinamic local  $(G, A, \alpha)$  definita pe  $A$  cu valori in  $C^*$ -algebra locala  $B$  extinde la o aplicatie liniara continua complet pozitiva definita pe cros-produsul lui  $A$  prin actiunea  $\alpha$ .

Daca  $\rho = [\rho_{ij}]_{i,j=1}^n$  este o aplicatie liniara complet  $n$ -pozitiva, unitara definita pe o  $C^*$ -algebra cu unitate  $A$  cu valori in  $L(H)$ ,  $C^*$ -algebra operatorilor liniari si marginiti pe spatiul Hilbert  $H$ , atunci  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \rho_{kk}$  este o aplicatie liniara complet pozitiva unitara de la  $A$  in  $L(H)$ . Suen ( C-Y. Suen, *An  $n \times n$  matrix of linear maps of  $C^*$ -algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 112(1991), 709-712) a gasit o forma pentru aplicatia liniara complet  $n$ -pozitiva  $\rho = [\rho_{ij}]_{i,j=1}^n$  in termeni de reprezentarea Stinespring asociata aplicatiei liniare complet pozitive, unitare  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \rho_{kk}$ . Astfel, el a aratat ca daca  $(\Phi_\rho, V_\rho, H_\rho)$  este reprezentarea Stinespring asociata cu  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \rho_{kk}$ , atunci exista o matrice pozitiva  $[T_{ij}]_{i,j=1}^n$  in  $M_n(\Phi_\rho(A)')$  astfel incat  $\rho_{ij}(a) = V_\rho^* T_{ij} \Phi_\rho(a) V_\rho$  pentru orice  $a \in A$  si pentru orice  $i, j = \overline{1, n}$ . S-a demonstrat ca aceasta constructie poate fi extinsa in cazul neunitar si in plus, si ca este unica pana la unitar echivalenta. Folosind faptul ca o  $C^*$ -algebra locala este limita proiectiva de  $C^*$ -algebre si ca orice aplicatie liniara continua complet  $n$ -pozitiva de la o  $C^*$ -algebra locala  $A$  in  $L(H)$  este compunerea dintre o aplicatie liniara  $n$ -pozitiva de la o  $C^*$ -algebra in  $L(H)$  cu un morfism de  $C^*$ -algebre locale, constructia obtinuta de Suen a fost extinsa si in cazul aplicatiilor liniare continue de la o  $C^*$ -algebra locala in  $L(H)$ . Aceste rezultate se gasesc in

**M. Joita**, *Covariant completely  $n$ -positive linear maps on pro- $C^*$ -algebras*, **Studia Sci. Math. Hungar.** ( cotata ISI)( trimisa pentru publicare).

Tot in lucrarea mai sus mentionata s-a demonstrat o varianta covarianta a constructiei Suen. In plus, s-a aratat ca orice aplicatie liniara complet  $n$ -pozitiva, covarianta  $\rho = [\rho_{ij}]_{i,j=1}^n$  de la o  $C^*$ -algebra (  $C^*$ -algebra locala )  $A$  in  $L(H)$  extinde la o aplicatie liniara complet  $n$ -pozitiva  $\sigma = [\sigma_{ij}]_{i,j=1}^n$  pe cros-produsul  $C^*$ -algebrei (  $C^*$ -algebrei locale)  $A$  prin actiunea  $\alpha$  astfel incat reprezentarile induse de cele doua aplicatii liniare complet  $n$ -pozitive, prin constructia Suen, sunt

unitar echivalente.

Daca  $\rho = [\rho_{ij}]_{i,j=1}^n$  este o aplicatie liniara complet  $n$ -pozitiva de la o  $C^*$ -algebra  $A$  cu valori intr-o alta  $C^*$ -algebra  $B$ , atunci  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \rho_{kk}$  este o aplicatie liniara complet pozitiva de la  $A$  in  $B$ . In lucrarea

**M. Joita, L-T. Costache, M. Zamfir**, *Representations associated with completely  $n$ -positive linear maps between  $C^*$ -algebras*, Proceedings of International Conference on Mathematics & Informatics, ICMI 45, Bacau, Romania, September 28-20, 2006, ( in curs de aparitie)

s-a gasit o forma pentru aplicatia liniara complet  $n$ -pozitiva  $\rho = [\rho_{ij}]_{i,j=1}^n$  in functie de constructia KSGNS asociata aplicatiei liniare complet pozitive  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \rho_{kk}$  ( E. C. Lance, *Hilbert  $C^*$ -modules. A toolkit for operator algebraists*, London Mathematical Society Lecture Note Series 210, Cambridge University Press, Cambridge 1995). Aceasta constructie extinde constructia Suen.

Este cunoscut faptul ca unei perechi covariante pozitiv definite  $(T, \rho)$  (  $T$  este o functie definita pe semigrupul  $\mathcal{T}$  al multimilor  $G$ -deschise si compacte cu valori in  $L(H)$ , iar  $\rho$  este o  $*$ - reprezentare a  $C^*$ -algebrei  $C_0(G^0)$  pe  $H$ ,  $G^0$  fiind spatiul unitatilor grupoidului  $G$  ) relativ la un grupoid  $r$ -discret  $G$ , i se poate asocia, printr-o teorema de tip Stinespring, o reprezentare covarianta  $(U, \tilde{\rho})$  a lui  $\mathcal{T}$ . In lucrarea

**R. Vidican**, *Irreducible covariant representations associated with  $r$ -discrete groupoids*, Politehn. Univ. Bucharest Sci. Bull. Ser. A Appl. Math. Phys. 69(1007),1.

s-a aratat ca reprezentarea covarianta  $(U, \tilde{\rho})$  a lui  $\mathcal{T}$  asociata perechi covariante pozitiv definite  $(T, \rho)$  este ireductibila daca si numai daca pentru orice pereche covarianta pozitiv definita  $(S, \theta)$  astfel incat  $[S(s_j^{-1}s_i)]_{i,j=1}^n \leq [T(s_j^{-1}s_i)]_{i,j=1}^n$  pentru orice  $n$  si pentru orice  $s_i, s_j \in \mathcal{T}$  si  $S(t)\rho(a \circ t) = S(t)\theta(a \circ t)$  pentru orice  $a \in C_0(G^0)$  si pentru orice  $t \in \mathcal{T}$ , exista un numar complex  $\lambda$  astfel incat  $S = \lambda T$ .

Data o  $C^*$ -algebra  $A$  si un morfism injectiv  $\alpha$  de la  $A$  in  $A$ , un operator de transfer pozitiv relativ la  $\alpha$  este o aplicatie complet pozitiva  $\tau$  de la  $A$  in  $A$  astfel incat  $\tau \circ \alpha(a) = a$  pentru orice  $a \in A$ . Folosind constructia KSGNS asociata aplicatiei complet pozitive  $\tau$ , in lucrarea

**M. Joita, L-T. Costache, M. Zamfir**, *Dilations on Hilbert  $C^*$ -modules for dynamical  $C^*$ -system*, Proceedings of The 4-th International Colloquium "Mathematics in Engineering and Numerical Physics" (MENP-4), October 6-8, 2006 - University Politehnica of Bucharest, ROMANIA ( acceptat pentru publicare)

s-a aratat ca orice reprezentare covarianta  $(\varphi, T, E)$  a perechi  $(A, \alpha)$  pe un  $C^*$ -modul Hilbert admite o dilatare coizometrica adaptata la  $\tau$  si o dilatare izometrica.

Seriile de timp de ordin  $n$  se pot organiza ca un spatiu Hilbert finit dimensional. Prin identificarea acestui spatiu cu un anumit subspatiu al spatiului matricilor de ordin  $n$ , seriile de timp

capata o structura de  $C^*$ -algebra, ceea ce permite folosirea tehnicilor specifice acestui domeniu in cazul particular al seriilor de timp. In lucrarea

**A. Colojoara**, *Completely positive linear maps in time series*, The 4-th International Colloquium "Mathematics in Engineering and Numerical Physics" (MENP-4), October 6-8, 2006 - University Politehnica of Bucharest, ROMANIA

s-a aratat ca aplicatia care asociaza unei serii de timp date, componenta sa sezoniera este o aplicatie complet pozitiva. Folosind acest lucru s-a aratat ca in cazul particular al seriilor de timp ce nu au trend, au deci doar componenta sezonala si componenta aleatoare, aceste din urma sunt necorelate (componenta sezonala fiind determinata prin tehnici de regresie).

### 3. Mobilitati ( participari la conferinte internationale)

1. **M. Joita, L-T. Costache, M. Zamfir**, International Conference on Mathematics & Informatics, ICMi 45, Bacau, Romania, September 28-20, 2006. Titlul comunicarii: *Representations associated with completely  $n$ -positive linear maps between  $C^*$ -algebras*
2. **M. Joita, L-T. Costache, M. Zamfir**, The 4-th International Colloquium "Mathematics in Engineering and Numerical Physics" (MENP-4), October 6-8, 2006 - University Politehnica of Bucharest, ROMANIA. Titlul comunicarii: *Dilations on Hilbertt  $C^*$ -modules for dynamical  $C^*$ -systems*
3. **A. Colojoara**, The 4-th International Colloquium "Mathematics in Engineering and Numerical Physics" (MENP-4), October 6-8, 2006 - University Politehnica of Bucharest, ROMANIA. Titlul comunicarii: *Completely positive linear maps in time series*
4. **Radu Munteanu**, The International Workshop on "Operator Models and Applications" OMA 2006, Timisoara, Romania, June 29 - July 4, 2006. Titlul comunicarii: *Factor states and GNS-representations*

### 4. Lista lucrarilor realizate in proiect

1. **M. Joita**, *Completely multi-positive linear maps between locally  $C^*$ -algebras and representations on Hilbert modules*, **Studia Math.**, 172 (2006), 181-196 (**revista cotata ISI**).
2. **M. Joita**, *Crossed products of locally  $C^*$ -algebras*, **Rocky Math. J.** (**revista cotata ISI**), (to appear), math.OA/0512128 ( *partial* ).
3. **M. Joita**, *Covariant completely positive linear maps on locally  $C^*$ -algebras and representations on Hilbert modules*, **Houston J. Math.**, (**revista cotata ISI**), (to appear), math.OA/0609149.

4. **M. Joita**, *Covariant completely  $n$ -positive linear maps on pro- $C^*$ -algebras*, **Studia Sci. Math. Hungar.**(revista cotata ISI) (trimisa pentru publicare )
5. **M. Joita**, **L-T. Costache**, **M. Zamfir**, *Representations associated with completely  $n$ -positive linear maps between  $C^*$ -algebras*, Proceedings of International Conference on Mathematics & Informatics, ICMI 45, Bacau, Romania, September 28-20, 2006, ( in curs de publicare).
6. **M. Joita**, *A Radon -Nikodym theorem for completely multi-positive linear maps between locally  $C^*$ algebras and its applications*, Proceedings of the 5rd International Conference on Topological Algebra and Applications, University of Athens, Greece, June 27- July 1, 2005, Edited by A. Mallios and M. Haralampidou, Contemporary Mathematics (in curs de publicare), math.OA/0510073
7. **M. Joita**, *A note about full Hilbert modules over Frechet locally  $C^*$ -algebras*, Novi Sad Journal of Mathematics ( acceptata)
8. **M. Joita**, *Multiplier modules, countably generated Hilbert modules and stably isomorphic locally  $C^*$ -algebras*, Proceedings of The 21st International Conference on Operator Theory, 2006 (trimisa pentru publicare)( *partial* )
9. **M. Joita**, **L-T. Costache**, **M. Zamfir**, *Dilations on Hilbert  $C^*$ -modules for dynamical  $C^*$ -system*, Proceedings of The 4-th International Colloquium "Mathematics in Engineering and Numerical Physics" (MENP-4), October 6-8, 2006 - University Politehnica of Bucharest, ROMANIA ( in curs de publicare).
10. **R. Vidican**, *Irreducible covariant representations associated with  $r$ -discrete groupoids* , Politehn. Univ. Bucharest Sci. Bull. Ser. A Appl. Math. Phys. 69(2007),1.
11. **R. Vidican**,  *$r$ -discrete groupoids and covariance  $C^*$ -algebras*, Studies and Scientific Research, Series Mathematics ( trimisa pentru publicare).
12. **M. Buneci**, *Groupoid  $C^*$ -algebras*, *Surveys in Mathematics and its Applications* (Proceedings of Internatinal Workshop "Operator Models and Applications- OMA 2006"), p. 71-98.( *partial* )
13. **A. Colojoara**, *Symmetric Algebra of  $L(X, F)$  as an Algebra of Polynomials*, Proceedings of The 21st International Conference on Operator Theory, 2006 (trimisa pentru publicare) ( *partial* )

## 5. Lucrari in pregatire

1. **M. Joita**, *A Radon-Nikodym theorem for completely multi-positive linear maps from a pro- $C^*$ -algebra to  $L(H)$  and its applications*
2. **M. Joita, T-L. Costache, M. Zamfir**, *Covariant representations associated to covariant completely  $n$ -positive linear maps between  $C^*$ -algebras*
3. **M. Joita, T-L. Costache, M. Zamfir**, *On the order structure on the set of completely  $n$ -positive linear maps on  $C^*$ -algebras*
4. **M. Buneci**, *Haar systems compatible with groupoid morphisms*
5. **A. Colojoara**, *Positive Operators on Time Series.*

## 6. Concluzii

Obiectivele propuse ( pentru anul I de studiu) au fost atinse, dupa rezulta din sectiunile precedente. Rezultatele stiintifice obtinute in grant au fost trimise pentru publicare ( o parte au fost deja acceptate) in reviste de specialitate recenzate in Mathematical Reviews si Zentralblatt ( unele cotate ISI), altele au fost prezentate si acceptate pentru publicare in volumele unor conferinte internationale. De asemenea, aceste rezultate au fost publicate pe pagina Web a proiectului [http://www.geocities.com/m\\_joita/alpc](http://www.geocities.com/m_joita/alpc).

Prin participarea la seminarul stiintific de analiza functionala si la unele manifestari stiintifice, tinerii doctoranzi, membrii ai echipei acestui proiect, au acumulat noi cunostiinte si s-a reusit formarea unei echipe. Monografia ” Locally  $C^*$  -algebras and Hilbert modules” a fost redactata in proportie de 30% , urmand sa fie publicata in 2007.

15 ianuarie 2007

Director de proiect,

Lect. dr. Maria Joita