

## Ààì ì à-ðàñì ðáäääëáí èå

Í áí çí à-áí èå	$\Gamma(x   a)$
Í áéàñüü çí à-áí èé	$0 \leq x < \infty$
Ï àðàì áòòü	Ï àðàì áòò ôí ðì ù $a > 0$
Ï èí áí ñüü	$\frac{1}{\Gamma(a)} x^{a-1} \exp(-x)$ , áää $\Gamma(a) = (\pi \text{ í éí ày})$ ààì ì à-ò óí èòèy í ð í àðàì áòòà $a$ .
Ó óí èòèy ðàñì ðáäääëáí èy	Í á áü ðàæääðñy á yéàì áí ðàðí ù ò ó óí èòèy ò

## Ï í èåçí ù á ñâî éñòàà

Áñèè  $\gamma_i \sim \Gamma(x | a_i)$ ,  $i=1,2$ , òí  $\xi_1 + \xi_2 \sim \Gamma(x | a_1 + a_2)$ .  
 Áñèè  $\gamma_i \sim \Gamma(x | a_i)$ ,  $i=1,2$ , òí  $\gamma_1 / (\gamma_1 + \gamma_2) \sim B(x | a_1, a_2)$ .

## Ááí áðàòèy ñèó-àéí ù ò -èñäè

Áñèè  $0 < a < 1$ , áí çüü àì ððè í áçààèñèì ù ò ñèó-àéí ù ò -èñäè  $r_1, r_2, r_3$ , ðàáíí ì áðíí ðà-  
 áääéáí ù ò í à ì ððáçèå  $[0, 1]$ . Ï í èí æèì  $s_1 = \sqrt[r_1]{r_1}$ ,  $s_2 = \sqrt[r_2]{r_2}$ . Áñèè  $s_1 + s_2 > 1$ , òí áí çüü àì  
 àì áñòí  $r_1, r_2$  äðóáð ì àðó ðàèèð æá ñèó-àéí ù ò -èñäè. Òàè áóááì ì ñòóí àòü áí ðáò ì ðð, ì í èà  
 í á ì ì èó-èì  $s_1 + s_2 \leq 1$ . Á ýóí ì ñèó-àá çàäääèì  $y$ ,  $x_1$  è  $x_2$  ñèääóð ù èì è ñí ì ðí ð áí èyì è:

$$y = s_1 / (s_1 + s_2), x_1 = -y \times \ln(r_3), x_2 = -(1 - y) \times \ln(r_3).$$

Ñèó-àéí ù á -èñäè  $x_1$  è  $x_2$  í áçààèñèì ù è ðàñì ðáäääëáí ù èàè  $\Gamma(x | a)$  è  $\Gamma(x | 1 - a)$  ñí ðààð-  
 ñòááí í í.

Äèy çí à-áí èé ì àðàì áòòà, áí èüð èð áääé èòü, ì í æíí áí ì í èí èòü ýòí ò ì áòí ä, áí ñí ì èüçí áàá-  
 ø èñü ñâî éñòáí ì àääèðèáí ì ñèè.

## Áü -èñäí èå ò óí èòèè ðàñì ðáäääëáí èy è áå èâáí èèèé

Èääéí ì í èó-èòü ñòáí áí í ù á ðyáü, ì í çáí èyð ù èå áü -èñèyòü ààì ì à-ðàñì ðáäääëáí èå (çì .  
 Ááðàì í àèö, Ñðèääí [6.5.29]):

$$\Gamma(x | a) = \frac{x^a}{\Gamma(a)} \sum_{n \geq 0} \frac{(-x)^n}{(a+n)!}$$

$$\Gamma(x | a) = x^a e^{-x} \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{\Gamma(a+n+1)} = \frac{x^a e^{-x}}{\Gamma(a)} \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{a(a+1)\dots(a+n)}$$

Èàê í áú ÷íí, àòí ðí é ðÿä - èç-çà í í èí æèðàéüí í ñòè ÷èáí í â - àááàð ñááÿ ñ âú ÷èñèèðàéüí í é òí ÷-èè çðáí èÿ èó-ø á ì áðáí áí. Í í ñ ðí ñòí ì x ñèí ðí ñòü ñòí àèì í ñòè ñòáí áí íí áí ðÿàà áí áí èüí í áú-ñòðí ì àááàð. Çàðí ñ ðí ñòí ì x ðàñðàð ñèí ðí ñòü ñòí àèì í ñòè òáí í í é äðí áè (cì . Ááðàì í àèò, Ñòèèáí [6.5.31]):

$$\Gamma(x | a) = 1 - \frac{x^a e^{-x}}{\Gamma(a)} \left( \frac{1}{x+1} \frac{1-a}{1+} \frac{1}{x+1} \frac{2-a}{1+} \frac{2}{x+1} \dots \right)$$

È ñí í àà í í áí í ñèááí ààðàéüí í ñòü áá ÷áðí ù ò í í áóí àÿü èò äðí ááé ì í í í òí í í í ñòí àèðñÿ é í óæ-í í í ó çí à-áí èð .

Ýèñí áðèì áí òü í í èàçü ààð ò, ÷òí àéÿ x, ì áí üø èò a, èó-ø á èñí í èüçí ààòü ñòáí áí í í é ðÿä, à àéÿ áí èüø èò - òáí í óð äðí áú. Í èàçü àáàðñÿ, èí ááà x ì ðèì áðí í ðááí ÿàðñÿ a, òðááóáðñÿ ì ðí ñòí - ì èðí ààòü í èí èí  $\sqrt{a}$  ÷èáí í á ðÿàà, ì ðè-áì ñ òí áí üø áí èáì x ÷èñèí òðááóáì ù ò ÷èáí í á ðÿàà áú ñòðí óáü àáàð. Áí àèí àè-í í àááàð ñááÿ òáí í àÿ äðí áú ì ðè x ≥ a .

Á áí èüø èí ñòáá ñòàðèñòè-áñèèò ì àèàðí á (á -àñòí í ñòè, á ø èðí èí ðáñí ðí ñòðáí áí í ù ò á È ññèè ì àèáðàò Statistica è SPSS) ò óí èòèÿ ááì ì à-ðàñí ðàáàéáí èÿ çààèñèò í ò ááòò ì àðàì áòðí á, èí òí -ðú á ì ðèí ÿòí í àçü ààòü ò í ðí à (shape) è ì àñø ò áá (scale). Í óñòü a - ì àðàì áòð ò í ðí ù, b - ì à-ðàì áòð ì àñø ò ááá; àéÿ ò óí èòèè ááì ì à-ðàñí ðàáàéáí èÿ áóááì è ñí í èüçí ààòü í áí çí à-áí èà  $\Gamma(x | a, b)$ . Óí ðí óèà àéÿ ì èí òí í ñòè áú àéÿàèò á ÿòí ì ñéó-áá ñèááóð ù èì í áðàçí ì :

$$\frac{1}{b\Gamma(a)} \left(\frac{x}{b}\right)^{a-1} \exp\left(-\frac{x}{b}\right)$$

Áí èì áí èá: èí í ááà á èà-áñòáá ì àðàì áòðà ò í ðí ù è ñí í èüçóáðñÿ  $\lambda = \frac{1}{b}$ .

Á ì ðèááááí í ù ò í èæá èí ààò ì ðááèáááàðñÿ èì áí í í ÿòí ò áàðèáí ò, ñòááø èé áá-òàèòí ñòáí áàð-òí ì á ì ðèèèááí í é ñòàðèñòèèè. Í í óí í è-áí èð ì àðàì áòð ì àñø ò ááá ðáááí 1, ÿòí ò ñéó-àé ñí í ò-ááòñòáóáò ðáññí í òðáí í í í ó á "í ñí í áí í í " òáèñòá. Í ðèáí àèì ù á èí áú ñèááóáò, áñòáñòááí í í, ðáñ-ñí àððèáàòü èèò ü èàè èèèð ñòðàèèè, óí òÿ è ðááí òí ñí í ñí áí óð áí áñáò ñòàðèñòè-áñèèò çàáà-÷àò, ñ èí òí ðü ì ÿ ñòàéèèáèñÿ.

Àéÿ ðááí òü ñ ÿðèì è èí ááì è í áí áóí àèì í óí áòü áú ÷èñèÿòü ááì ì à-òóí èòèè (ñ . òàééü loggamma.h è loggamma.cpp).

### Òàéé gammaDF.h

```

/*****
/*                               Gamma distribution                               */
/*****

```

```

#ifndef __GAMMA_H__                /* To prevent redefinition */
#define ENTRY    extern
#define LOCAL    static

class GammaDF {
public:
    GammaDF(double shape, double scale=1);
    double value(double x);        // Óóíêöëÿ ðãñĩðãããéáíèÿ Gamma(x|shape,scale)
    double inv(double p);          // Íáðãðíàÿ óóíêöëÿ: Gamma(x|shape,scale)=p
private:
    double a, shape, scale, lga;
    double fraction(double x);
    double series(double x);
};

#define __GAMMA_H__                /* Prevents redefinition */
#endif                              /* Ends #ifndef __GAMMA_H__ */

```

## Òàéë gammaDF.cpp

```

/*****
 *                               Ãàìà-ðãñĩðãããéáíèà
 *                               */
/*****

#include <math.h>
#include <assert.h>

#include "gammaDF.h"
#include "logGamma.h"

LOCAL const double zero = 0.0;
LOCAL const double one = 1.0;
LOCAL const double two = 2.0;

GammaDF::GammaDF(double shape, double scale):
    a(shape), shape(shape), scale(scale), lga(logGamma(shape))
{
    assert(shape > 0 && scale > 0);
}

double
GammaDF::series(double x)
// Ñì. Abramowitz & Stegun,
// Handbook of Mathematical Functions, 1964 [6.5.29]
// Ì.Ãáðãìíêö, È.Ñòèããá
// Ñíðããí-íèè ïí ñíãöèèèüíüì óóíêöëÿì (Ì: Ìèð, 1979)
//
// Æëÿ àñ-èñèáíèÿ íáíèííé ààìà óóíêöèè P(a,x)
// èñííèüçóãðñÿ àà ðàçèíããíèà à ðÿà Òàéëíðà.
//
{
    double sum, prev_sum, term, aa = a;
    long i = 0;

    term = sum = one / a;
    do {
        aa += one;
        term *= x / aa;
        prev_sum = sum; sum += term;
        i++;
    } while(fabs(prev_sum) != fabs(sum));
    return sum *= exp(-x + a * log(x) - lga);
}

```

```

/* incGamma_series */

double
GammaDF::fraction(double x)
// Ñì. Abramowitz & Stegun,
// Handbook of Mathematical Functions, 1964 [6.5.31]
// Ì.Àáðàìíàèò, È.Ñòèääáí
// Ñìðãáí+íèè ìí ñíàòèàèüííì ðóíèòèÿì (Ì: Ìèð, 1979)
//
// Äèÿ âú+èñèääíèÿ íáííèííé ààììà ðóíèòèè P(a,x)
// èñííèüçóáòñÿ áà ðàçèíæáíèà á òáííóð äðíáú Èææáíäðà
//
// P(a,x)=exp(-x +x*ln(a))*CF/logGamma(a),
//
// äää
//
//      1      1-a      1      2-a      2
// CF = --- ---- - - - - ---- - - - - ---- ....
//      x+      1+      x+      1+      x+
//
// Èñííèüçóðòñÿ ìíàòíäÿùèà äðíáè CF(n) = A(n) / B(n)
//
// äää
//      A(n) = (s(n) * A(n-1) + r(n) * A(n-2)) * factor
//      B(n) = (s(n) * B(n-1) + r(n) * B(n-2)) * factor
// ìðè+áì
//      A(-1) = 1, B(-1) = 0, A(0) = s(0), B(0) = 1.
//
// Çããñü
//
//      s(0) = 0, s(1) = x, r(0) = 0, r(1) = 1,
//
// òàè +ðì
//
//      A(1) = one * factor, B(1) = r * factor
//
// è, ñèääíâàðäèüíí,
//
//      r(i) = k - a   if i = 2k,   k > 0
//      r(i) = k       if i = 2k+1,
//      s(i) = 1       if i = 2k,
//      s(i) = x       if i = 2k+1
//
// factor - øèääèèðùèé ìííæèðäèü
//
{
double old_sum=zero, factor=one;
double A0=zero, A1=one, B0=one, B1=x;
double sum=one/x, z=zero, ma=zero-a, rfact;

do {
z += one;
ma += one;
/* two steps of recurrence replace A's & B's */
A0 = (A1 + ma * A0) * factor; /* i even */
B0 = (B1 + ma * B0) * factor;
rfact = z * factor;
A1 = x * A0 + rfact * A1; /* i odd, A0 already rescaled */
B1 = x * B0 + rfact * B1;
if (B1) {
factor = one / B1;
old_sum = sum;
sum = A1 * factor;
}/* if */
} while (fabs(sum) != fabs(old_sum));
return exp(-x + a * log(x) - lga) * sum;
}/*fraction*/

double
GammaDF::value(double x)

```

```
// Áú+èñëÿàðñÿ Gamma(x|a):
//   áãðíÿðííñòù òíãí, +òí ñéó+àéíàÿ áãèè+èíà,
//   ííã+èíÿðùàÿñÿ òáíððãéúíííó ààííà-ðãñíðãããéáíèð ñ ìàðãàíàððóíí 'a',
//   ìáíüøá èèè ðããáíà 'x'.
{
  x *= scale;
  if(x <= zero)
    return zero; /* ÍÁ ìøèáéè! */
  else if(x < (a + one))
    return series(x);
  else
    return one - fraction(x);
}/*value*/

double
GammaDF::inv(double p)
// Èùàð òàèíá çíà+áíèá 'x', äëÿ êíðíðíãíí Gamma(x|a) = p,
//   ò.á. ðããáíà 'p' áãðíÿðííñòù òíãí, +òí ñéó+àéíàÿ áãèè+èíà,
//   ííã+èíÿðùàÿñÿ òáíððãéúíííó ààííà-ðãñíðãããéáíèð ñ ìàðãàíàððóíí 'a',
//   ìáíüøá èèè ðããáíà 'x'.
{
  double fx, l = 0, r = 1, x;

  if (p == 0) return 0;
  assert(p > 0 && p < 1);

  for(l=0, r=a/2; value(r) < p; r+=a/2) l=r;
  x=(l+r)/2;
  do {
    fx = value(x);
    if (fx > p) r = x; else
    if (fx < p) l = x; else
      break;
    x = (l + r)* 0.5;
  } while ((l!=x) && (r!=x));
  return x;
}/*inv*/
```