

Guía No. 5	Álgebra Lineal	UNAD	Grupo: 1
------------	----------------	------	----------

Escuela de Ciencias Básicas Tecnologías e Ingeniería

ESPACIOS VECTORIALES

SUBESPACIOS

Definición de Espacio Vectorial (Espacio lineal)

Sea V un conjunto no vacío de objetos, llamados elementos. El conjunto V se llama espacio vectorial si satisface los 10 axiomas siguientes que se enuncian en tres grupos.

Axioma de Clausura

1. Clausura respecto a la adición: A todo par de elementos x e y de V corresponde un único elemento V llamado suma de x e y , designado por $x+y$
2. Clausura respecto de la multiplicación por números reales: A Todo x de V y todo número real a corresponde un elemento de V llamado producto de a por x , designado por ax

Axioma de Para la Adición

3. Ley conmutativa: Para todo x y todo y de V tenemos $x+y=y+x$

4. Ley asociativa: Cualesquiera que sea x,y,z de V tenemos

$$(x+y)+z=x+(y+z)$$

5. Existencia de elemento cero: Existe un elemento en V designado con el símbolo 0 , tal que $x+0=x$ para todo x de V

6. Existencia de opuestos: Para todo x de V , el elemento $(-1)x$ tiene la propiedad $x+(-1)x=0$

Axioma de Para la Multiplicación por números

7. Ley asociativa: Para toda x de V y todo par de números reales a y b , tenemos $a(bx)=(ab)x$

8. Ley Distributiva para la adición en V : Para todo x y todo y de V y todo número real a , tenemos $a(x+y)=ax+ay$

9. Ley Distributiva para la adición de números: Para todo x de V y todo par de números reales a y b , tenemos $(a+b)x = ax + bx$

10. Existencia de Elemento Idéntico: Para todo x de V tenemos $1x = x$

Veamos a continuación algunos ejemplos de espacios vectoriales reales.

1. $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial respecto a la suma

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

Respecto al producto

$$\alpha(a_1, a_2, \dots, a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n)$$

2. $M_{m,n}$ las matrices reales de m filas y n columnas, es un espacio vectorial real respecto a la suma de matrices y producto por escalares.

3. Sea P el conjunto de todos los polinomios en x con coeficientes reales y de grado arbitrario. P es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y respecto a la suma usual

de polinomios y respecto del producto usual
escalares por polinomios.

EJEMPLOS:

Espacios Vectoriales...

$\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial.

Verifiquemos para $n=2$, es decir mostremos que $\mathbb{R}^2$ es
un espacio vectorial.

1. Suma $x+y = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2) \in \mathbb{R}^2$
2. Multiplicación por escalar $ax = a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2) \in \mathbb{R}^2$
3. Ley conmutativa $x+y = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2)$
 $= (y_1+x_1, y_2+x_2) = (y_1, y_2) + (x_1, x_2) = y+x.$

Por tanto $x+y = y+x.$

4. Ley asociativa $(x+y)+z = (x_1+y_1, x_2+y_2) + (z_1, z_2)$
 $= (x_1+y_1+z_1, x_2+y_2+z_2) = (x_1+(y_1+z_1), x_2+(y_2+z_2))$
 $= x+(y+z). \text{ Por tanto } (x+y)+z = x+(y+z)$

5. Elemento neutro $x+0 = (x_1, x_2) + (0, 0) = (x_1+0, x_2+0)$
 $= (x_1, x_2). \text{ Por tanto } x+0 = 0$

6. Elemento negativo $x + (-1)x = (x_1, x_2) + (-1)(x_1, x_2) =$
 $(x_1, x_2) + (-x_1, -x_2) = (x_1 - x_1, x_2 - x_2) = (0, 0)$

Por tanto $x + (-1)x = 0$, donde $0 = (0, 0)$

ACTIVIDAD DE RECONOCIMIENTO

Muestre que el conjunto de las matrices $M_{2 \times 2}$ es un espacio vectorial.

SUBESPACIOS

Se V espacio vectorial real. Un subconjunto W de V se llama subespacio de V si el mismo respecto de las operaciones definidas en V , es un espacio vectorial.

TEOREMA

Un subconjunto no vacío W de un espacio vectorial V es un subespacio de V si cumple los axiomas de clausura.

1. Si x y y son elementos de W , entonces

$$x + y \in W$$

2. si $x \in w$ y $a \in R$, entonces $ax \in w$

Ejemplo

Determine si el conjunto $W = \{(x, y) / y = 2x\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$

$$i) \quad x = (x_1, 2x_1), \quad y = (y_1, 2y_1)$$

$$x+y = (x_1, 2x_1) + (y_1, 2y_1) = (x_1+y_1, 2x_1+2y_1) = (x_1+y_1, 2(x_1+y_1)) \in W$$

$$x+y \in W$$

$$ii) \quad ax = a(x_1, 2x_1) = (ax_1, a(2x_1)) = (ax_1, 2(ax_1)) \in W$$

$ax \in W$. Por tanto W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$

ACTIVIDAD DE RECONOCIMIENTO

1. Determine si el conjunto $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x \geq 0\}$, es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

2. Determine si el conjunto

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 3y\}, \text{ es un subespacio de } \mathbb{R}^2$$

3. Determine si el conjunto

$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 4x\}$, es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

4. Determine si el conjunto $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 1\}$,
es un subespacio de $\mathbb{R}^2$