

|            |                |      |          |
|------------|----------------|------|----------|
| Guía No. 4 | Álgebra Lineal | Unad | Grupo: 1 |
|------------|----------------|------|----------|

Escuela de Ciencias Básicas Tecnologías e Ingeniería

## RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

Vamos a usar productos escalares y vectoriales para escribir ecuaciones para rectas, segmentos de rectas y planos en el espacio.

## RECTAS Y SEGMENTOS DE RECTAS EN EL ESPACIO

Suponga que  $L$  es una recta en el espacio que pasa por un punto  $p_0(x_0, y_0, z_0)$  paralelo a un vector  $v = Ai + Bj + Ck$ . Entonces  $L$  es el conjunto de todos los puntos  $P(x, y, z)$  para los cuales  $\overrightarrow{P_0P}$  es paralelo a  $V$ . Es decir,  $P$  está sobre  $L$  si y solo si  $\overrightarrow{P_0P}$  es un múltiplo escalar de  $V$ .

**Ecuación vectorial para la recta que pasa por  $p_0(x_0, y_0, z_0)$  paralela a  $v$ .**

$$\overrightarrow{P_0P} = tv, \quad -\infty < t < \infty$$

Al igualar las componentes correspondientes de los dos lados de la ecuación anterior, obtenemos tres ecuaciones escalares con el parámetro  $t$ :

$$(x-x_0)i + (y-y_0)j + (z-z_0)k = t(Ai + Bj + Ck)$$

$$x-x_0=tA \quad y-y_0=tB \quad z-z_0=tC$$

Componentes igualadas

Al reordenar, esas ecuaciones nos dan la parametrización estándar de la recta para el intervalo

$$-\infty < t < \infty$$

EJEMPLO Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por  $(-2, 0, 4)$  paralela a  $v = 2i + 4j + 2k$

Solución con  $p_0(x_0, y_0, z_0)$  igual a  $(-2, 0, 4)$  y  $Ai + Bj + Ck$  igual a  $2i + 4j + 2k$  las ecuaciones son entonces

$$x = -2 + 2t, \quad y = 4t, \quad z = 4 + 2t$$

EJEMPLO Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por  $P(-3, 2, -3)$  y  $Q(1, -1, 4)$

Solución El vector

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= (1 - (-3))i + (-1 - 2)j + (4 - (-3))k \\ &= 4i - 3j + 7k \end{aligned}$$

Es paralelo a la recta, y las ecuaciones (2) con  $(x_0, y_0, z_0) = (-3, 2, -3)$  dan  $x = -3 + 4t, \quad y = 2 - 3t, \quad z = -3 + 7t$

Podríamos haber escogido  $Q(1, -1, 4)$  como el "punto base" y escribir

$$x = 1 + 4t, \quad y = -1 - 3t, \quad z = 4 + 7t$$

Estas ecuaciones son tan válidas como las primeras ya que simplemente lo sitúan a usted en un punto diferente para un valor dado de  $t$ .

Ecuaciones para planos en el espacio

Supongamos que el plano  $M$  pasa por un punto  $p_0(x_0, y_0, z_0)$  y es normal (perpendicular) al vector no nulo  $n = Ai + Bj + Ck$ . Entonces  $M$  es el conjunto de todos los puntos  $P(x, y, z)$  para los cuales

$\overrightarrow{P_0P}$  es ortogonal a  $n$ . Es decir,  $P$  se encuentra sobre  $M$  si y solo si  $n \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$ . Esta ecuación es equivalente a

$$(Ai + Bj + Ck) \cdot [(x - x_0)i + (y - y_0)j + (z - z_0)k] = 0$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

**Plano que pasa por  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  normal a  $n = Ai + Bj + Ck$**

Ecuación vectorial:  $n \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$

Ecuación de componentes:  $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

**EJEMPLO** Encuentre una ecuación para el plano que pasa por  $P_0(-3, 0, 7)$  perpendicular a  $n = 5i + 2j - k$

Solución

$$5(x - (-3)) + 2(y - 0) + (-1)(z - 7) = 0$$

$$5x + 15 + 2y - z + 7 = 0$$

$$5x + 2y - z = -22$$

Note en el ejemplo como las componentes de  $n = 5i + 2j - k$  resultan los coeficientes de  $x, y$ , y  $z$  en la ecuación  $5x + 2y - z = -22$ .

## ACTIVIDAD DE RECONOCIMIENTO

1. Encuentre ecuaciones paramétricas para

a. La recta que pasa por el punto  $P(3, -4, -1)$  paralela al vector  $i+j+k$ .

b. La recta que pasa por el punto  $P(1, -2, -1)$  y  $Q(-1, 0, 1)$

2. Encuentre una ecuación para el plano que pasa por el punto  $P_0(0, 2, -1)$  normal

$$n = 3i - 2j - k$$

## SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Un sistema de  $m$  ecuaciones con  $n$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  es

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Los números  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}$  son los coeficientes del sistema y  $b_1, b_2, \dots, b_n$  son los términos constantes. Si todos los términos constantes son ceros, el sistema se llama homogéneo.

Considere el sistema.

$$x_1 + 2x_2 = -3$$

$$2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -10$$

$$-x_1 + 6x_3 = 9$$

Sus coeficientes son

1, 2, 0, 2, 3, -2, -1, 0, 6. Términos constantes -3, -10, 9

Sistema homogéneo asociado

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &= 0 \\2x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0 \\-x_1 &+ 6x_3 = 0\end{aligned}$$

Se puede abreviar la escritura de un sistema lineal

El arreglo rectangular de los coeficientes y términos constantes de un sistema es una matriz aumentada

Por ejemplo la matriz aumentada del sistema lineal anterior es:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & -2 & -10 \\ 1 & 0 & 6 & 9 \end{array} \right]$$

Matriz de coeficientes

$$\left[ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 6 \end{array} \right]$$

Matriz columna (Vector de constantes)

$$\left[ \begin{array}{c} -3 \\ -10 \\ 9 \end{array} \right]$$

## Solución de un Sistema Lineal

Una solución  $r_1, r_2, \dots, r_n$  de escalares es una solución (particular) de un sistema lineal, si todas las ecuaciones se satisfacen al sustituir  $x_1 = r_1, \dots, x_n = r_n$ . El conjunto de todas las soluciones posibles es el conjunto solución.

El conjunto solución puede ser:

Unitario: Solución única

Infinito: El sistema tiene infinitas soluciones

Vacío: El sistema no tiene solución (Inconsistente)

Ejemplo resolver el sistema

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &= -3 \\2x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= -10 \\-x_1 &+ 6x_3 = 9\end{aligned}$$

Matriz aumentada del sistema

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & -2 & -10 \\ -1 & 0 & 6 & 9 \end{array} \right]$$

Aplicando operaciones elementales a las ecuaciones y matriz aumentada se tiene

|             |                                                                   |
|-------------|-------------------------------------------------------------------|
| $x_1 = -15$ | $\left[ \begin{array}{ccc c} 1 & 0 & 0 & -15 \end{array} \right]$ |
| $x_2 = 6$   | $\left[ \begin{array}{ccc c} 0 & 1 & 0 & 6 \end{array} \right]$   |
| $x_3 = -1$  | $\left[ \begin{array}{ccc c} 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$  |

Antes de seguir verifique la solución del sistema anterior, utilizando las ecuaciones y también con la matriz aumentada del sistema.

Ejemplo. Resolver el sistema:

$$x + 2y - z = 4$$

$$2x + 5y + 2z = 9$$

$$x + 4y + 7z = 6$$

La matriz aumentada del sistema es:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 2 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 6 \end{array} \right]$$

Aplicando operaciones elementales de renglón a la matriz aumentada del sistema, tenemos:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -9 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Así obtenemos:

$$x - 9z = 2$$

$$y + 4z = 1$$

En este sistema hacemos  $z = t$  ( $t$  parámetro), si  $z = t$ ,  $t \in \mathbb{R}$  entonces

$$x = 2 + 9z \qquad \text{Y} \qquad y = 1 - 4z$$

$$x = 2 + 9t \qquad y = 1 - 4t$$

Así el sistema tiene infinitas soluciones

$$z = t, \quad y = 1 - 4t, \quad x = 2 + 9t$$

Ejemplo resolver el sistema

$$y - 2z = -5$$

$$2x - y + z = -2$$

$$4x - y = -4$$

Matriz aumentada del sistema 
$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 0 & -4 \end{array} \right]$$

Haciendo cambios elementales por renglón en la matriz anterior, obtenemos la siguiente matriz:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{4} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -0 & 0 & -5 \end{array} \right]$$

Del último renglón decimos  $0z = -5$  o sea  $0 = -5$  falso. Decimos que el sistema, no tiene solución o que es inconsistente

## ACTIVIDADES DE RECONOCIMIENTO

A. resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{l} y + 2z = 6 \\ \text{a) } \begin{cases} 3x - 3y - 3z = 15 \\ x + 3y + 3z = 11 \end{cases} \end{array} \quad \text{Rta} \neq x = -1, y = 2, z = 2$$

$$\begin{array}{l} 3x + y + 3z = 15 \\ \text{b) } \begin{cases} -x + 3y - z = -5 \\ 2x + 4y + 2z = 9 \end{cases} \end{array} \quad \text{Rta} \neq \text{notienen soluciones (inconstante)}$$

$$\begin{array}{l} x + y - 3z = 2 \\ \text{c) } \begin{cases} -3x + y + z = 6 \end{cases} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Rta : } x = r - 1 \\ y = 2r + 3 \\ z = r \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \text{d) } \begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Rta : } x_1 = \frac{-t}{4} \quad x_2 = \frac{-t}{4} - s \\ x_3 = T, t \in R \quad x_4 = S, S \in R \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -15 \\ \text{e) } \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \\ -6x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 30 \end{cases} \end{array} \quad \text{Rta : } x_1 = -4, x_2 = 2 \text{ y } x_3 = 7$$



## REGLA DE CRAMER

Sea  $AX=B$  un sistema cuadrado, donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Sea  $A_i$  la matriz obtenida reemplazando la  $i$ -ésima columna con  $B$ .

Si  $\det(A) \neq 0$ , el sistema  $AX=B$  presenta una solución única

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

Ejemplo

Aplique la regla de Cramer para determinar la solución del sistema

$$x + y - z = 2$$

$$x - y + z = 3$$

$$-x + y + z = 4$$

Solución

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = -4, \quad \det(A_1) = -10, \quad \det(A_2) = -12 \quad \text{y} \quad \det(A_3) = -14$$

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-10}{-4} = \frac{5}{2}, \quad y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{-12}{-4} = 3, \quad z = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{-14}{-4} = \frac{7}{2}$$

## ACTIVIDADES DE RECONOCIMIENTO

i) Aplique la regla de cramer para resolver los sistemas

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad x + y = 1 \\ \quad \quad x - y = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{b)} \quad x + 2z = 1 \\ \quad \quad 3x + 4z = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \quad \quad x + y + z = 1 \\ \text{c)} \quad x - y + z = 1 \\ \quad \quad x + y - z = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \quad \quad 3x - 3y - 2z = 3 \\ \text{d)} \quad -x - 4y + 2z = 2 \\ \quad \quad 5x + 4y + z = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \quad \quad x + 2y + 3z = 1 \\ \text{e)} \quad \quad y + 4z = 1 \\ \quad \quad \quad z = 1 \end{array}$$