

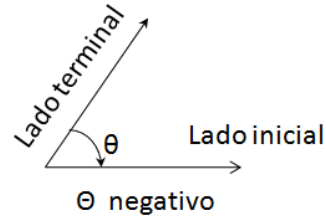
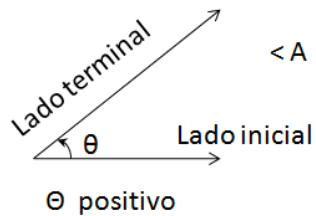
Guía No 3	Álgebra y Trigonometría	UNAD	Grupo: 1
-----------	-------------------------	------	----------

Escuela de Ciencias Básicas Tecnologías e Ingeniería

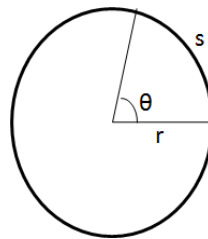
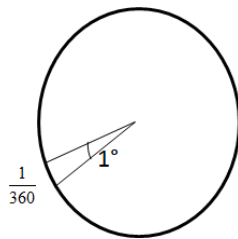
TRIGONOMETRIA

Medición de ángulos

Un ángulo es la figura formada por dos líneas o rayos, con un extremo común. A este punto común se le llama vértice del ángulo.



Medición de ángulos grados y radianes



Definición:

La medida en radianes de un ángulo θ está definida como

$$\theta = \frac{s}{r}, \text{ donde } \theta, s \text{ y } r \text{ están descritos en la figura.}$$

La medida en radianes de un ángulo es un número real que no va acompañado de unidades. En la definición $\theta = \frac{s}{r}$, tanto s como r debe ser medido en las mismas unidades de longitud. Por ejemplo si $s=8\text{cm}$ y $r=4\text{cm}$, entonces

$$\theta = \frac{8\text{cm}}{4\text{cm}} = 2 \quad \text{El número 2 no tiene unidades}$$

Así, un ángulo de 2 (radianes) significa un ángulo que subtiende un arco que es dos veces la longitud del radio.

Nota

Si θ es un ángulo que subtiende un arco cuya longitud es la misma que el radio, es decir, $s=r$, entonces según la definición

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{r}{r} = 1$$

Así, un ángulo de 1 radian es un ángulo central que subtiende un arco igual a la longitud del radio.

Fórmula para la conversión entre grados y radianes.

$$\frac{(\theta \text{ en grados})}{180^\circ} = \frac{(\theta \text{ en radianes})}{\pi}$$

Ejemplo

Convertir cada una de las siguientes medidas en radianes a grados.

$$\text{a) } \frac{\pi}{6} \quad \text{b) } \frac{\pi}{4} \quad \text{c) } \frac{\pi}{3} \quad \text{d) } \frac{-3\pi}{5} \quad \text{e) } 1$$

Solución del punto a.

$$a) \quad \frac{\theta}{180^\circ} = \frac{\pi/6}{\pi/1} \quad \Rightarrow \quad \frac{\theta}{180^\circ} = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$$

Ejemplo

$$a) \quad 90^\circ \quad b) \quad 270^\circ \quad c) \quad 45^\circ$$

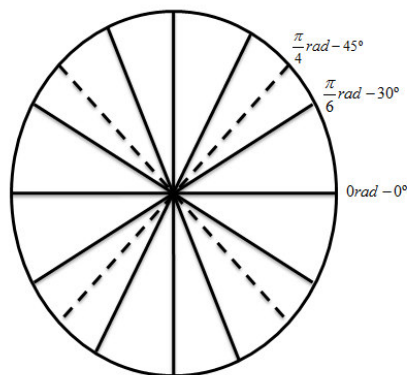
Solución del punto a.

$$a) \quad \frac{90^\circ}{180^\circ} = \frac{\theta}{\pi} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{\theta}{\pi} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{2} = \theta$$

LA CIRCUNFERENCIA UNITARIA

Ángulos en radianes y grados.

Completar la ubicación de ángulos en radianes y grados.



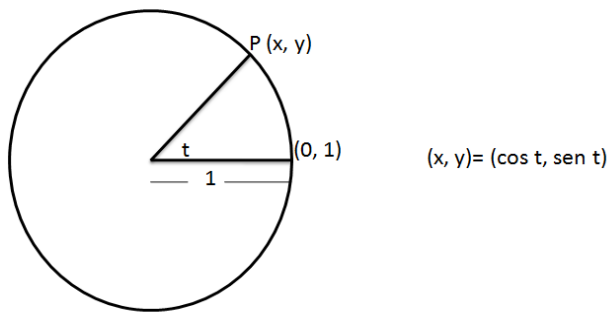
Definición de las funciones seno y coseno de un número real.

Suponga que t es un número real. Coloque un ángulo que mida t radianes en posición estándar y sea P la intersección del lado terminal del ángulo y la circunferencia unitaria cuyo centro es el origen.

Sí P es el punto (x, y) entonces:

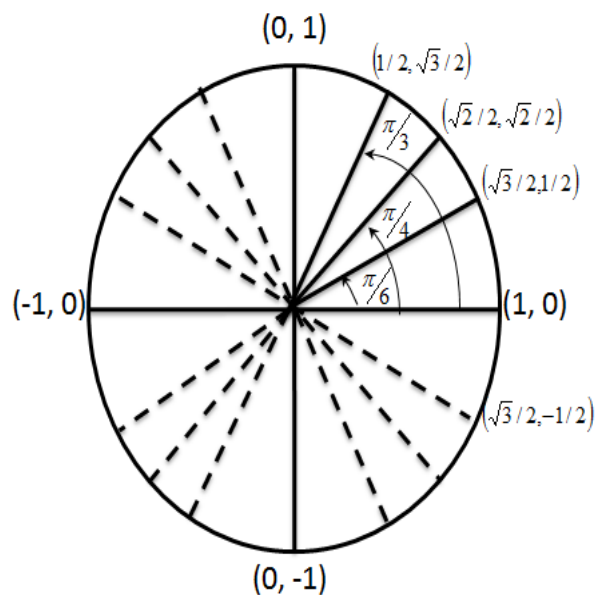
La función seno está definida por **$\text{sen } t = y$**

La función coseno está definida por **$\text{cost} = x$**



El valor más grande que esta función puede tener es 1 , y el valor más pequeño es -1 . Además las funciones seno y coseno toman todos los valores entre -1 y 1 , y de este hecho se deduce que el rango de las dos funciones es **$[-1, 1]$** .

Para ciertos valores de t , el seno y el coseno se pueden obtener fácilmente a partir de la siguiente figura.



$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} &= \frac{1}{2} \\ \cos \frac{\pi}{6} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \frac{\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos \frac{\pi}{3} &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Actividades reconocimiento

Taller No 1

Completar la siguiente tabla.

Ángulo	o	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
Seno	o	$\frac{1}{2}$														
Coseno	i	$\frac{\sqrt{3}}{2}$														

Función periódica

Se dice que una función es periódica si existe un número real positivo p tal que, siempre que x esté en el dominio de f , entonces $x+p$ también estará en el dominio de f y $f(x+p)=f(x)$. el valor más pequeño del número real positivo p se llama periodo de f .

$$\text{sen}(t + 2\pi) = \text{sen } t \quad \text{funci3n peri3dica de periodo } p = 2\pi$$

$$\text{cos}(t + 2\pi) = \text{cos } t \quad \text{funci3n peri3dica de periodo } p = 2\pi$$

Definici3n de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante.

$$\tan t = \frac{\text{sen } t}{\text{cos } t} \quad \sec t = \frac{1}{\text{cos } t} \quad \cot t = \frac{\text{cos } t}{\text{sen } t} \quad \csc t = \frac{1}{\text{sen } t}$$

$$\text{cos } t \neq 0$$

$$\text{cos } t \neq 0$$

$$\text{sen } t \neq 0$$

$$\text{sen } t \neq 0$$

$$\begin{array}{llll} \tan(t + \pi) = \tan t & \sec(t + 2\pi) = \sec t & \cot(t + \pi) = \cot t & \csc(t + 2\pi) = \csc t \\ p = \pi & p = 2\pi & p = \pi & p = 2\pi \end{array}$$

Donde p es el periodo.

Actividades reconocimiento

Taller No 2

Completar la tabla siguiente con los signos de las funciones trigonom3tricas.

Cuadrante	Seno	Coseno	Tangente	Cotangente	Secante	Cosecante
I						
II						
III						
IV						

Actividades reconocimiento

Taller No 3

Completar la tabla siguiente.

t	o	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Sen																	
Cos																	
Tan																	
Cot																	
Sec																	
Csc																	

LAS FUNCIONES SENO Y COSENO, Y SUS GRAFICAS

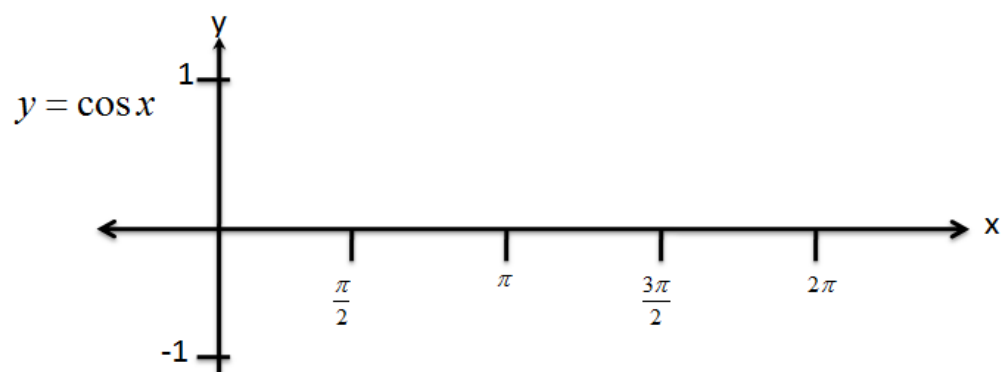
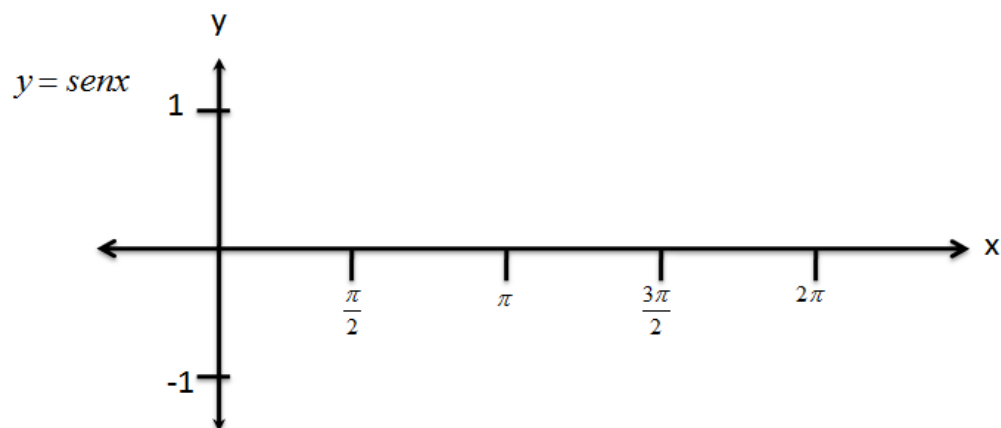
La función tangente, secante, cosecante y cotangente.

Cualquier número real se puede interpretar como un ángulo. Por lo tanto, podemos describir los dominios de las funciones trigonométricas dentro de la estructura del sistema de los números reales.

Actividades reconocimiento

Taller No 4

Utilizar la tabla de valores de seno y coseno para bosquejar la gráfica de $y = \text{sen } x$ y $y = \cos x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$



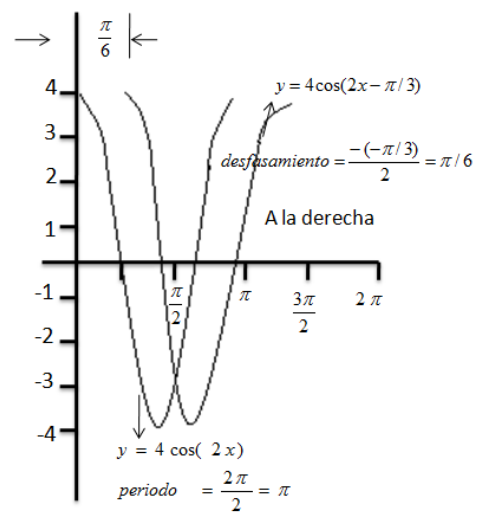
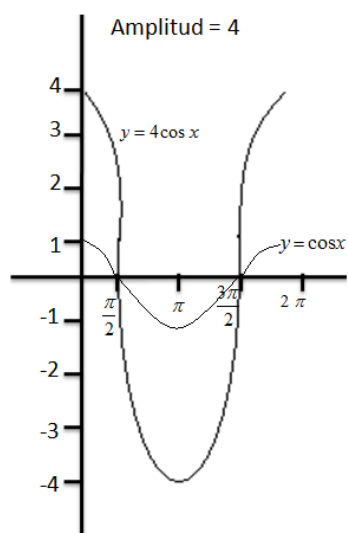
Las graficas de $y = A \text{sen}(Bx + c)$ y $y = A \cos(Bx + c)$

$$\text{Amplitud} = |A|$$

$$\text{Periodo} = \frac{2\pi}{|B|}$$

$$\text{Desfasamiento} = -\frac{C}{B}$$

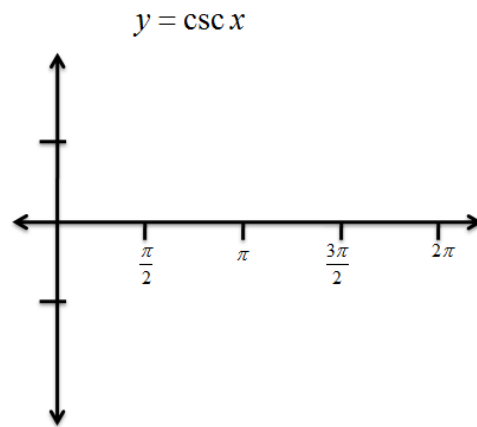
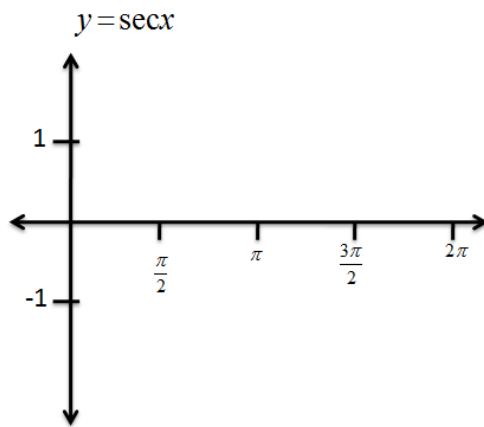
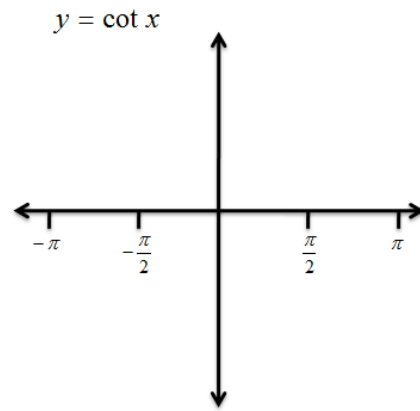
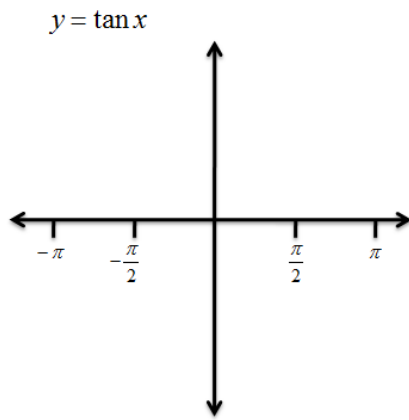
Grafica de $y = 4 \cos(2x - \pi/3)$



Actividades reconocimiento

Taller No 5

Graficar las funciones tangente, secante, cosecante y cotangente.



IDENTIDADES

Una identidad es una ecuación verdadera para todos los valores de reemplazo posibles de la variable.

IDENTIDADES RECIPROCAS

$$1. \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$2. \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$3. \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

IDENTIDADES DE COCIENTE

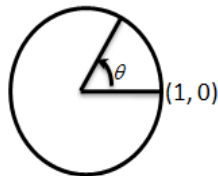
$$4. \tan \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta}$$

$$5. \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\text{sen } \theta}$$

IDENTIDADES PITAGORICAS

$$(x, y) = (\cos \theta, \text{sen } \theta)$$

Ecuación de la circunferencia unitaria



$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\text{pero } x = \cos \theta, \quad y = \text{sen } \theta$$

$$\text{así: } \cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta = 1$$

Si en $\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ dividimos entre $\text{sen}^2 \theta$, se tiene:

$$\frac{\text{sen}^2 \theta}{\text{sen}^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\text{sen}^2 \theta} = \frac{1}{\text{sen}^2 \theta} \Rightarrow 1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

Si en $\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ dividimos entre $\cos^2 \theta$, se tiene:

$$\frac{\text{sen}^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Rightarrow \tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta \Rightarrow 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

IDENTIDADES PITAGÓRICAS

$$6. \text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$7. 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$8. 1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

FÓRMULAS PARA LA SUMA

$$\text{sen}(A \pm B) = \text{sen } A \cos B \pm \cos A \text{sen } B$$

$$\cos (A \pm B) = \cos A \cos B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

$$\tan (A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

FÓRMULAS PARA EL DOBLE Y PARA LA MITAD DE UN ÁNGULO

Fórmulas para el doble de un ángulo.

Ejemplo.

Obtener una fórmula para $\operatorname{sen} 2\theta$.

$$\operatorname{sen} 2\theta = \operatorname{sen} (\theta + \theta) = \operatorname{sen} \theta \cos \theta + \cos \theta \operatorname{sen} \theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$$

Ejemplo.

Obtener una fórmula para $\cos \theta$.

$$\cos 2\theta = \cos (\theta + \theta) = \cos \theta \cos \theta - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$$

Otras formas alternativas de las fórmulas para el doble de un ángulo.

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta = 1 - \operatorname{sen}^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta = \cos^2 \theta - (1 - \cos^2 \theta) = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$\tan 2\theta = \tan(\theta + \theta) = \frac{\tan \theta + \tan \theta}{1 - \tan \theta \tan \theta}$$

FÓRMULAS PARA EL DOBLE DEL ÁNGULO

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \theta \quad \rightarrow \quad \operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 \quad \rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

Ejemplo.

Verificar la identidad

$$\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \tan x$$

$$\frac{1 - (\cos^2 x - \sin^2 x)}{\sin 2x} = \tan x$$

$$\frac{(1 - \cos^2 x) + \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = \tan x$$

$$\frac{\sin^2 x + \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = \tan x$$

$$\frac{2 \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = \tan x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

$$\tan x = \tan x$$

Actividades reconocimiento

Taller No 6

Verificar cada una de las siguientes identidades.

$$a) \quad \frac{1 - \cos(2x)}{\sin 2x} = \tan x$$

$$b) \frac{\tan^2 x}{\sec x - 1} = \frac{1 - \cos x}{\cos x}$$

$$c) \frac{1 + \cos(2x)}{\sin 2x} = \cot x$$

$$d) \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\cos x}{1 - \sin x} = 2 \sec x$$

$$e) \frac{\sin(2x)}{1 + \cos(2x)} = \tan x$$