

Guía No 5	Calculo Diferencial	Grupo: 1	unad
-----------	---------------------	----------	------

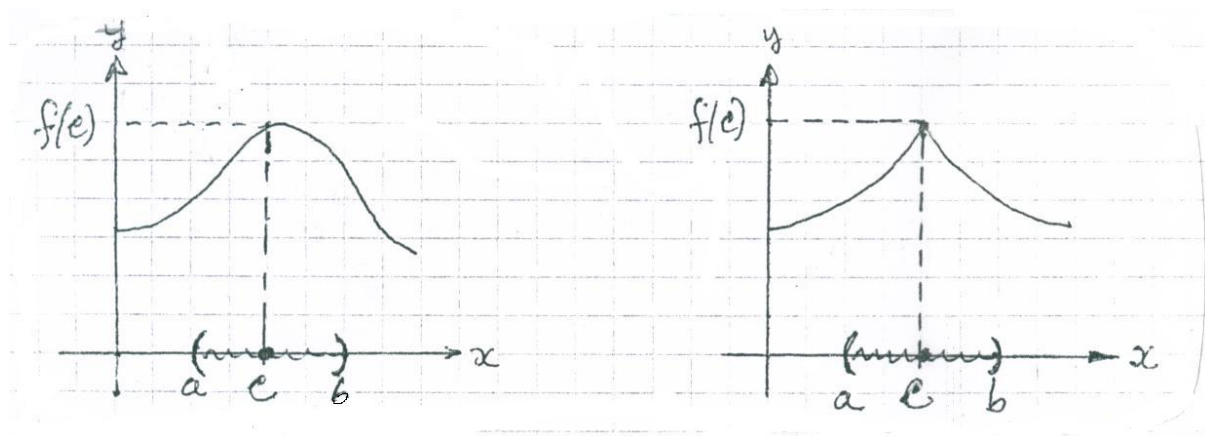
Facultad de Ciencias Básicas Tecnología e Ingeniería

APLICACIONES DE LA DERIVADA

Valores máximos y mínimos de funciones

Definición de valor máximo local (relativo)

La función f tiene un valor máximo local en el número c , si existe un intervalo abierto que contiene a c , en el que f está definida, tal que $f(c) \geq f(x)$ para toda x en el intervalo.

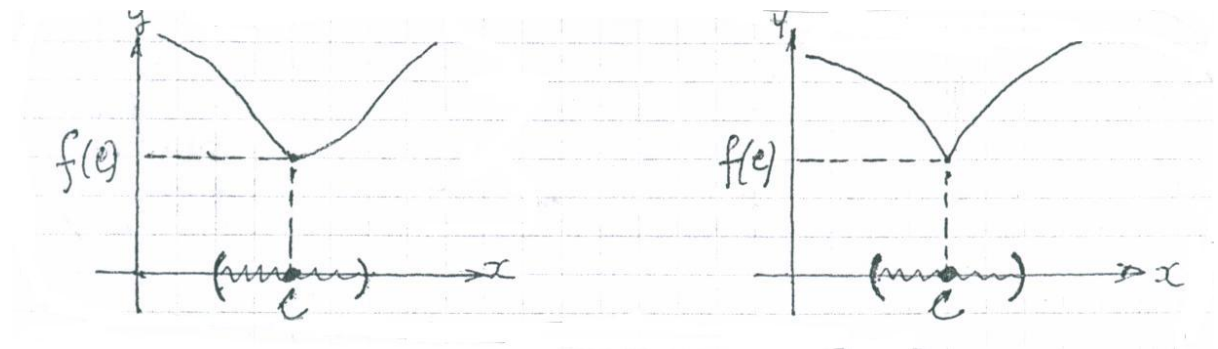


Máximo Absoluto o Global

Sea f una función con dominio I . Entonces f tiene un valor máximo absoluto en I en el punto c si $f(c) \geq f(x)$ para toda $x \in I$.

Definición de Valor Mínimo Local (relativo)

La función f tiene un valor mínimo local en el número c si existe un intervalo abierto que contiene a c , en el que está definida tal que $f(c) \leq f(x)$ para toda x en el intervalo.



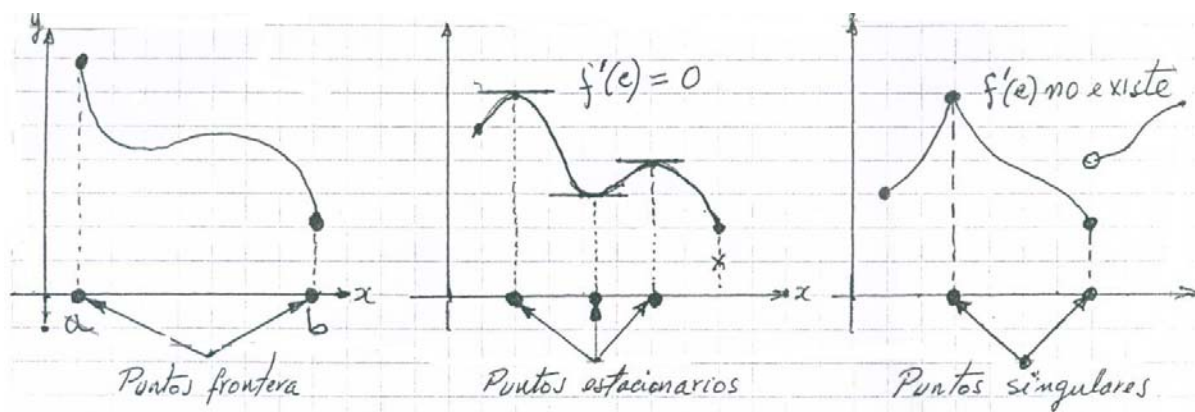
Mínimo Absoluto o Global

Sea una función con dominio I . Entonces f tiene un valor mínimo absoluto en I en el punto c si $f(c) \leq f(x)$ para toda $x \in I$.

VALOR EXTREMO: $f(c)$ es un valor extremo de f en I , si es un valor máximo o un valor mínimo.

Existencia de máximo absoluto y mínimo absoluto

Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en ese intervalo.



Observemos donde se presentan los valores extremos

Estas tres clases de puntos (puntos frontera, puntos estacionarios y puntos singulares) son los puntos clave en la teoría de máximos y mínimos. Cualquier punto de estos tres tipos en el dominio de una función f se denomina

PUNTO CRÍTICO DE f .

c puntos crítico de f :

c punto frontera

c punto estacionario

c punto singular

Procedimiento para determinar los valores máximos y mínimos de una función continua f en un intervalo cerrado I .

Paso 1 Encontrar los puntos críticos de f

Paso 2 Evaluar f en cada uno de estos puntos críticos. El mayor de estos valores es el valor máximo; el valor más pequeño es el valor mínimo.

Ejemplo

Encontrar los valores máximos y mínimos de $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ en el intervalo

$$\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$$

$$f(x) = -x^3 + 3x^2$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x = 0$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x = 0$$

$$-3x(x-2) = 0$$

$$x = 0, x = 2$$

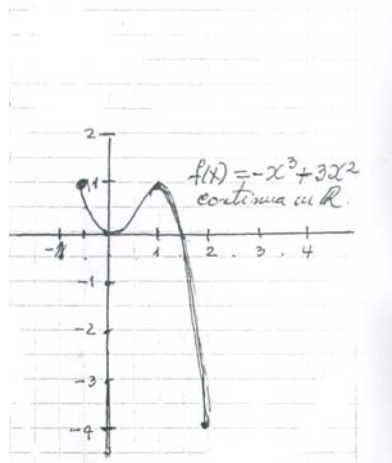
Puntos críticos: $-\frac{1}{2}, 0, 2$

$$f(-1/2) = 1$$

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = 1$$

$$f(2) = -4$$



El valor máximo es 1 y se alcanza en $-1/2$ y en 1

El valor mínimo es -4 y se alcanza en 2

Actividad Reconocimiento

Taller N.º 1

Encuentre los valores máximos y mínimos absolutos de:

A. $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ en $[-2, 1]$. Trazar la gráfica Rta: Max en 0, Min en -2

B. $f(x) = \sin x$ en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$. Trazar la gráfica Rta: Max en $\frac{\pi}{2}$, Min en $-\frac{\pi}{2}$

APLICACIONES QUE INVOLUCRAN UN EXTREMO ABSOLUTO EN UN INTERVALO CERRADO

Aplicaremos la teoría de valores extremos a problemas en los que la solución es un extremo absoluto de una función en un intervalo cerrado

OPTIMIZACIÓN

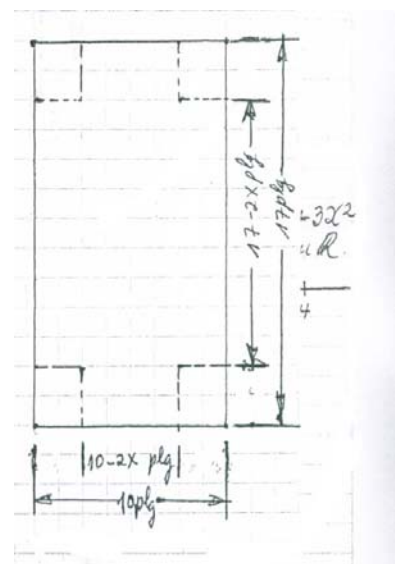
Optimizar algo significa que maximiza o se minimiza alguno de sus aspectos

Estrategia para resolver problemas de máximos y de mínimos

1. Leer el problema hasta entenderlo
2. Hacer un diagnóstico para identificar las partes más importantes del problema
3. Introducir las variables y hacer una lista de todas las relaciones del dibujo y del problema como ecuaciones, etc.
4. Identificar la incógnita y hacer una ecuación para ella
5. Hacer pruebas con los puntos crítico y con los puntos extremos

Ejemplo

un fabricante de cajas de cartón quiere elaborar cajas abiertas a partir de trozos rectangulares de cartón con dimensiones de 10 plg por 17 plg, cortando cuadrados en las cuatro esquinas y doblando los lados hacia arriba. Se desea determinar la longitud del lado de los



cuadrados que se deben cortar de modo que la caja tenga el mayor volumen posible.

$$V'(x) = 170 - 108x + 12x^2$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow 2(6x^2 - 54x + 85) = 0 \quad x = \frac{54 \pm \sqrt{(-54)^2 - 4(6)(85)}}{12} \Rightarrow x = 6.97$$

$$\Rightarrow x = 2.03$$

Solamente sirve $x = 2.03 \in [0, 5]$

$$V(0) = 0$$

El mayor volumen posible es 456.03 plg y se $V(5) = 0$ cuando $x = 2.03$

obtiene

$$V(2.03) = 156.03$$

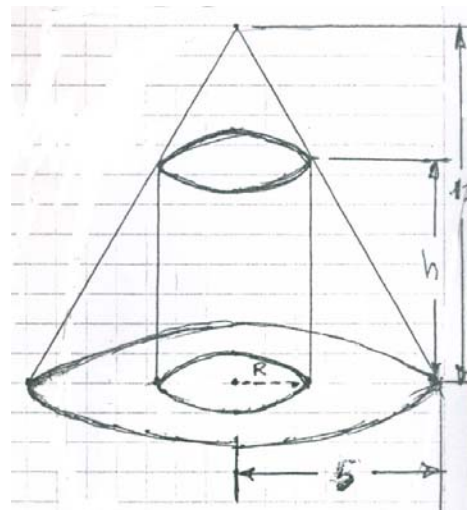
Actividad de Reconocimiento

Taller N°2

Problema

un cilindro circular recto de altura h pies y radio de la base R pies, se inscribe en un cono circular recto de altura 12 pies y base 5 pies de radio.

- Expresa la altura h del cilindro en función de R



- b. Expresar el volumen del cilindro en función de R
- c. Encuentre las dimensiones del cilindro circular recto de máximo volumen que se puede inscribir en el cono dado, suponiendo que los ejes del cilindro y del cono coinciden.

MONOTONÍA Y CONCAVIDAD

Funciones crecientes – Funciones decrecientes

Sea f definida en un intervalo I (abierto, cerrado o ninguno de éstos). Decimos que:

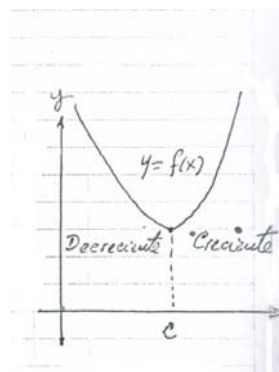
- i) f es creciente en I , si para toda pareja denominamos x_1 y x_2 en I

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- ii) f es decreciente en I si, para toda pareja de números x_1 y x_2 en I

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

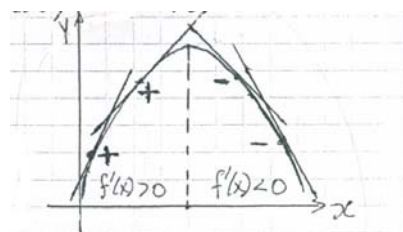
- iii) f es estrictamente monótona en I si es creciente en I o es decreciente en I



La primera derivada y monotonía

Sea f continua en el intervalo I y derivable en todo punto interior de I

- a. Si $f'(x) > 0$ para toda x interior a I , entonces f es creciente en I



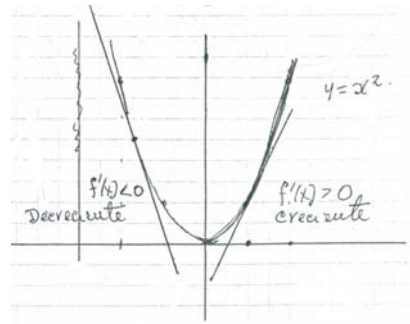
b. Si $f''(x) < 0$ para toda x interior a I , entonces f es decreciente en I

Ejemplo

Sea $f(x) = x^2$ $f'(x) = 2x$

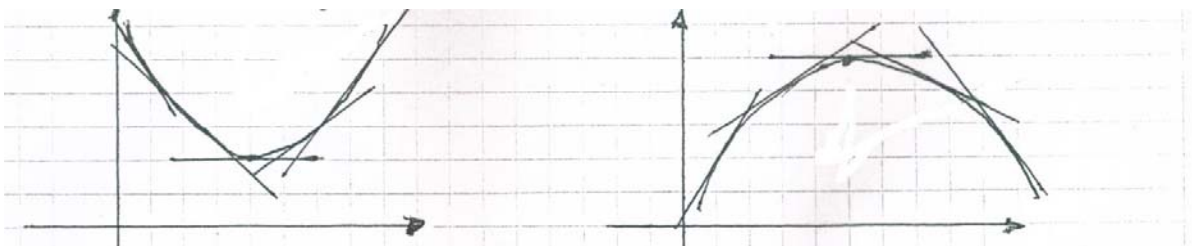
$f'(x) > 0$ si $x > 0$. Creciente

$f'(x) < 0$ si $x < 0$. Decreciente



LA SEGUNDA DERIVADA Y CONCAVIDAD

Sea f derivable en un intervalo abierto I . Decimos que f (al igual que su gráfica) es cóncava hacia arriba en I , si f' es creciente en I , y decimos que f es cóncava hacia abajo en I , si f' es decreciente en I .

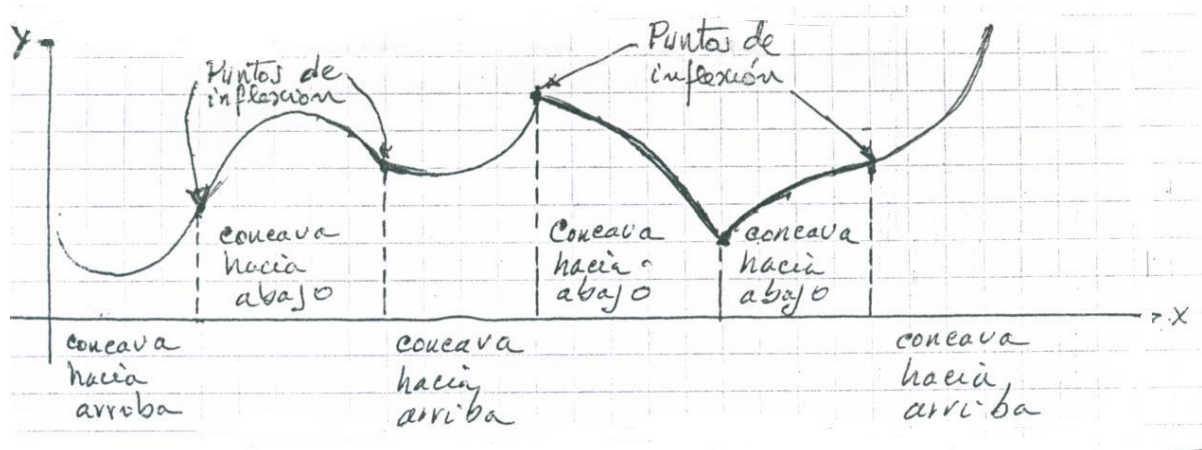


f' creciente (aumenta su valor de
Izquierda a derecha).

Cóncava hacia arriba

f' decreciente (disminuye su
Valor de izquierda a derecha)

Cóncava hacia abajo (convexa)



Puntos de inflexión

Sea f continua en c . Llamamos a $(c, f(c))$ un punto de inflexión de la gráfica de f , si f es cóncava hacia arriba a un lado de c y cóncava hacia abajo del otro lado de c .

Los puntos donde $f''(x) = 0$ a donde $f''(x)$ no existe son los candidatos a ser puntos de inflexión

Como determinar la concavidad

Sea f dos veces derivable en el intervalo abierto I

i) Si $f''(x) > 0$ para toda x en I , entonces f es cóncava hacia arriba en I

ii) Si $f''(x) < 0$ para toda x en I , entonces f es cóncava hacia abajo en I

Ejemplo Sea $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$ $f'(x) > 0$ en $\mathbb{R}$ creciente en $\mathbb{R}$. Candidato a punto de inflexión

$f''(x) = 6x$ $f''(x) = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0$

$f''(x) = 6x > 0$. Cóncava hacia arriba $x > 0$

$f''(x) = 6x < 0$. Cóncava hacia arriba $x < 0$

$x = 0$ punto de inflexión

MÁXIMOS Y MÍNIMOS CON PRIMERA Y SEGUNDA DERIVADA

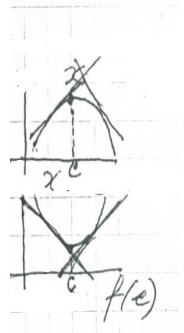
Criterio de la primera derivada

Sea f continua en un intervalo abierto (a, b) que contiene un punto crítico c .

i) Si $f'(x) > 0$ para toda x en (a, c) y $f'(x) < 0$ para toda x en (c, b) , entonces $f(c)$ es un valor máximo local de f .

ii) Si $f'(x) < 0$ para toda x en (a, c) y $f'(x) > 0$ para toda x en (c, b) , entonces $f(c)$ es un valor mínimo local de f .

iii) Si $f'(x)$ tiene el mismo signo en ambos lados de c , entonces $f(c)$ no es un valor extremo de f .



Criterio de la segunda derivada

Supóngase que f' y f'' existen en todo punto de un intervalo abierto (a, b) que contiene a c y supóngase que $f'(c) = 0$.

- i) Si $f''(c) < 0$, $f(c)$ es un valor máximo local de f
- ii) Si $f''(c) > 0$, $f(c)$ es un valor mínimo local de f

APLICACIONES DE LA DERIVADA GRÁFICA DE FUNCIONES

Sea $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

1. Análisis de $f(x)$: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

a. $D_f: \mathbb{R}$

b. Cortes de ejes: Eje x : $x^3 - 3x^2 + 5 = 0$

Eje y : $y = 5$

c. Asíntotas: Verticales ~~No~~ tiene

Horizontales $\rightarrow$ No tiene

2. Análisis de $f'(x)$: $f'(x) = 3x^2 - 6x$

a. $D_{f'}: \mathbb{R}$

b. Monotonía (Creciente - Decreciente)

CRECIENTE	DECRECIENTE
$f'(x) > 0$ $3x^2 - 6x > 0$ resolviendo mediante método $3x(x-2) > 0$ gráfico se obtiene. Ceros: $x=0$ ó $x-2=0$ función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$	$f'(x) < 0$ Basados en la gráfica 1, se obtiene que f es decreciente en el intervalo. $(0, 2)$.

c) Puntos críticos

Puntos estacionarios $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 6x = 0$$

$$3x(x - 2) = 0$$

$$x = 0$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

Existen 2 puntos estacionarios

$$(0, f(0)) \text{ y } (2, f(2))$$

$$(0, 5) \quad y(2, 1)$$

Puntos singulares $f'(x)$ no exista como el D' es $\mathbb{R}$, esto quiere decir que esta definida para cualquier valor de x por lo tanto la función f no tiene puntos singulares

d) Extremos relativos – Locales

Los candidatos a extremos se obtiene del total de los puntos críticos en este caso de la función f , los puntos críticos son $x=0$ $x=2$.

Utilizando criterios de la PRIMERA DERIVADA y basada en el grafico 1 se obtiene:

Mínimo Relativo en (2,1)

Mínimo Relativo en (0,5)

3. Análisis de $f''(x) - f''(x) = 6x - 6$

a. Dominio de $Df'' : \mathbb{R}$

b. Concavidad

La función es cóncava en el intervalo $(1, +\infty)$

Convexa $f''(x) < 0$

Según la grafica se tiene f es convexa en el intervalo $(-\infty, 1)$

c. Puntos Inflexión: utilizando la grafica el punto de inflexión sucede en $x=1$ la función cambia de convexa a cóncava.

$$(1; f(1)) \rightarrow (1, 3)$$

3. Grafica de la función $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

