

Guía No 4	Algebra y Trigonometría	Grupo: 1	UNAD
-----------	-------------------------	----------	------

Escuela de Ciencias Básicas Tecnología e Ingeniería

Algebra Trigonometría y Geometría Analítica

FUNCIONES POLINOMIALES

Definición:

Una función polinomial es una función de la forma

$$y = p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Donde cada a_i es un numero real, y n es un numero entero no negativo. a_n se llama el coeficiente dominante (principal). Se dice que una función polinomial de este tipo, tiene grado n.

Domínio de la función polinomial : $\mathbb{R}$

Polinomio de grado uno : Función lineal

Polinomio de grado dos : Función cuadrática

Algunos polinomios

- $y = 3x + 1$: grado 1
- $y = x^2 + 2x + 1$: grado 2
- $y = 3x^3 + 1$: grado 3
- $y = 5x^4 - x + 2$: grado 4

Nota: si $p(x)$ es un polinomio de grado n, entonces la ecuación polinomial $p(x) = 0$ tiene a lo más n soluciones distintas; es decir, $p(x)$ tiene a lo más n ceros.

Esto equivale a decir que la grafica de $y = p(x)$ cruza el eje x a lo más n veces. Así, un polinomio de grado 5 puede tener a lo más 5 intersecciones con el eje x.

DIVISIÒN DE POLINOMIOS Y DIVISIÒN SINTÈTICA

División larga

Dividir $2x^2 - 11x + 5$ entre $x - 3$

$$\begin{array}{r}
 2x^2 - 11x + 5 \quad | \quad x - 3 \\
 \underline{-2x^2 + 6x} \qquad \quad 2x - 5 \\
 -5x + 5 \\
 \underline{5x - 15} \\
 -10
 \end{array}$$

Algoritmo de la división

Podemos escribir el resultado de la división de dos formas.

$p(x) = q(x)d(x) + r(x)$	$2x^2 - 11x + 5 = (2x - 5)(x - 3) - 10$
$\frac{p(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$	$\frac{2x^2 - 11x + 5}{x - 3} = 2x - 5 + \frac{-10}{x - 3}$

ACTIVIDAD DE RECONOCIMIENTO

Realizar la división larga solicitada.

1. $\frac{x^2 + 7x - 18}{x + 9}$

2. $\frac{3x^4 - x^3 + 6}{x - 1}$

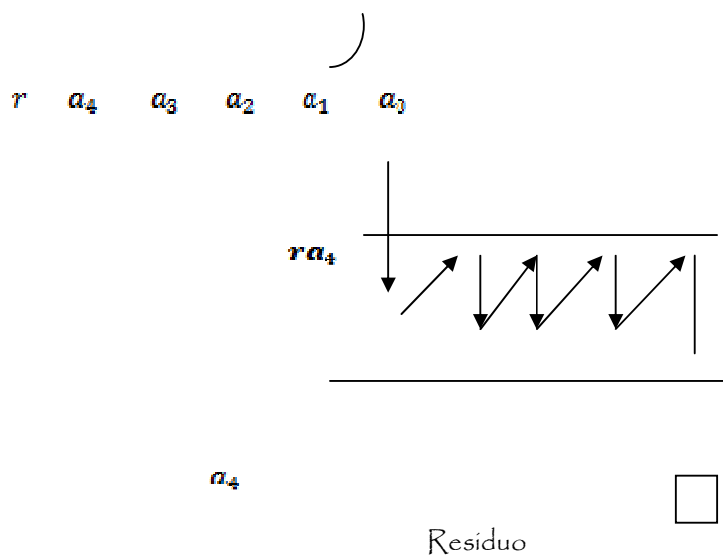
División sintética.

Cuando dividimos un polinomio entre un divisor de la forma $x - r$, se repite un poco la escritura.

Podemos abreviar este proceso al reconocer que toda la información esencial en el proceso de división esta dada por los diversos coeficientes y su lugar específico en el arreglo.

DIVISIÒN SINTÈTICA

Para dividir $a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ entre $x-r$ mediante el proceso de división sintética, construimos la siguiente tabla:



Observe que las flechas diagonales indican una multiplicación por r , y las flechas verticales indican una suma en cada columna.

Ejemplo: utilice la división sintética para determinar el cociente

$$\frac{x^5 + x^4 - 2x^2 + 24}{x + 2}$$

Solución: como el divisor $x+2$ corresponde a $x-r$, tenemos que $r=-2$ para el proceso de división sintética. Es decir, $x-(-2)=x+2$. Además, debemos recordar que se insertan ceros para los coeficientes de los términos faltantes. En otras palabras, vemos el dividendo como

$$x^5 + x^4 + 0x^3 - 2x^2 + 0x + 24$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -2 & 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 24 \\ & & -2 & 2 & -4 & 12 & -24 \\ \hline & 1 & -1 & 2 & -6 & 12 & \end{array}$$

Residuo 0 ←

Cociente $x^4 - x^3 + 2x^2 - 6x + 12$

ACTIVIDAD DE RECONOCIMIENTO

Utilice la división sintética para determinar el cociente y el residuo.

1.
$$\frac{2x^3 + x^2 - 3x + 15}{x + 2}$$

2.
$$\frac{2x^4 + x^3 - 6x^2 - 10x + 13}{x - 1}$$

$$3. \quad \frac{x^4 - 7x^2 + 8x - 42}{x-3}$$

TEOREMA DEL RESIDUO Y DEL FACTOR

La determinación de las raíces de una función polinómica puede ayudar a trazar la gráfica. Existen dos teoremas importantes que nos permiten reconocer las raíces de polinomios.

Teorema del residuo

Cuando un polinomio $p(x)$ de grado al menos 1 es dividido entre $x-r$, el residuo es $p(r)$.

Ejemplo: utilice la división sintética para dividir $p(x) = x^3 - x^2 + 3x - 1$ entre $x-2$ y verifique el teorema del residuo.

Solución: realizamos la división sintética:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 2 & 1 & -1 & 3 & -1 \\
 & & 2 & 10 & \\
 \hline
 & 1 & 1 & 5 & 9
 \end{array}$$

Residuo ←

En este ejemplo $x-r = x-2$ por lo tanto $r=2$, así, de acuerdo con el teorema del residuo, el residuo debe ser igual a $p(2)$:

$$p(x) = x^3 - x^2 + 3x - 1 \quad \text{sustituimos } x = 2$$

$$p(2) = 2^3 - 2^2 + 3(2) - 1$$

$$= 8 - 4 + 6 - 1 = 9 \quad \text{así,}$$

$$P(2) = 9 \quad \text{que es el residuo, como se pedía}$$

Como corolario inmediato del teorema del residuo, reconocemos que si $x-r$ es un factor de $p(x)$, entonces el residuo debe ser cero (0); recíprocamente, si el residuo es cero (0), entonces $x-r$ es un factor de $p(x)$. Esto se conoce como el **teorema del factor**.

El teorema del factor.

$x-r$ es un factor de $p(x)$ si y sólo si $p(r)=0$

Recuerde que al resolver una ecuación cuadrática $p(x) = x^2 - 3x - 10 = 0$

$$p(x) = x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$(x - 5)(x + 2) = 0 \quad \text{los factores de } p(x) \text{ son } x - 5 \text{ y } x + 2$$

$$x = 5 \text{ o } x = -2 \quad \text{las raíces son } 5 \text{ y } -2$$

Así, el teorema del factor es una generalización de lo ya analizado para ecuaciones cuadráticas.

RAICES DE ECUACIONES POLINOMIALES

Teorema de la raíz racional

Suponga que

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ donde $n \geq 1$, $a_n \neq 0$ es un polinomio de grado n con coeficientes enteros. Si $\frac{p}{q}$ es una raíz racional de $f(x)=0$, donde p y q no tienen factores en común distintos de ± 1 , entonces p es un factor de a_0 y q es un factor de a_n .

Ejemplo:

Determinar todas las raíces de la ecuación $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 23x - 12 = 0$

Solución:

Comencemos buscando cualquier raíz racional posible de la ecuación dada.

De acuerdo con el teorema de la raíz racional, si $\frac{p}{q}$ es una raíz racional de la ecuación dada, entonces p debe ser un factor de -12 y q debe ser un factor de 2 . Así, tenemos

Valores posibles de p : $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$,

Valores posibles de q : $\pm 1, \pm 2$

Raíces racionales posibles $\frac{p}{q}$: $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 2, \pm 3, \pm \frac{3}{2}, \pm 4, \pm 6, \pm 12$

Observe que los cocientes posibles de $\frac{p}{q}$ repiten ciertas raíces, las que enumeramos sólo una vez.

Por ejemplo, $6/2 = 3/1$

Podemos verificar estas posibles raíces, sustituyendo los valores en $p(x)$, sin embargo, es más eficaz verificar los valores utilizando la división sintética, ya que si determinamos la raíz, tendremos disponible el cociente.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 \frac{1}{2} & 2 & 3 & -23 & -12 & \\
 \hline
 & 2 & 4 & -21 & -\frac{45}{2} & \\
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|rrrrr}
 -\frac{1}{2} & 2 & 3 & -23 & -12 & \\
 \hline
 & 2 & 2 & -24 & 0 &
 \end{array}$$

Por lo tanto $-\frac{1}{2}$ es una raíz, y podemos leer el cociente en la fila inferior de la división sintética.

$$p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 23x - 12 = \left(x + \frac{1}{2}\right) (2x^2 + 2x - 24)$$

Ahora, intentaremos determinar otra raíz utilizando el teorema de la raíz racional para $2x^2 + 2x - 24$. Sin embargo, es más fácil intentar factorizar el polinomio cuadrático directamente.

$$2x^2 + 2x - 24 = 2(x^2 + x - 12) = 2(x + 4)(x - 3)$$

Por lo tanto, la ecuación original resulta

$$\begin{aligned}
 p(x) &= 2x^3 + 3x^2 - 23x - 12 = \left(x + \frac{1}{2}\right) (2x^2 + 2x - 24) \\
 &= 2 \left(x + \frac{1}{2}\right) (x + 4)(x - 3)
 \end{aligned}$$

Y todas las raíces son: $-\frac{1}{2}$, -4 , 3 .

ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACION

Determine las raíces racionales de la ecuación dada.

1. $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$

2. $x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + 6 = 0$

3. $2x^3 - 5x^2 + 15 = 28x$

4. $-x^6 + 4x^4 + x^2 - 4 = 0$

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

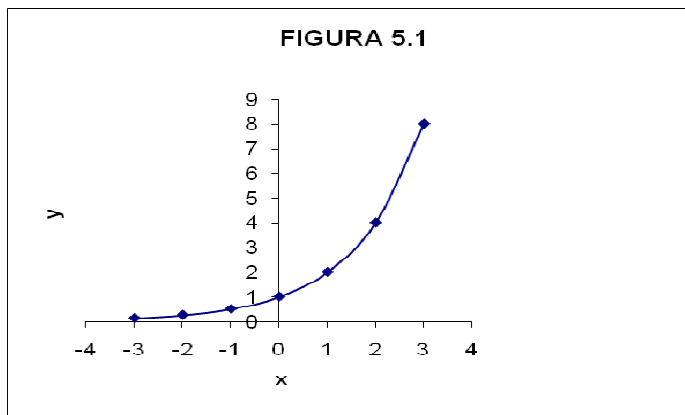
FUNCIONES EXPONENCIALES

Introducción

Trazar la gráfica de la función $y = 2^x$

x	$y = f(x) = 2^x$	y
-3	$y = 2^{-3}$	$\frac{1}{8}$
-2	$y = 2^{-2}$	$\frac{1}{4}$
-1	$y = 2^{-1}$	$\frac{1}{2}$
0	$y = 2^0$	1
1	$y = 2^1$	2
2	$y = 2^2$	4
3	$y = 2^3$	8

$$y = f(x) = 2^x$$



Características de la gráfica

1. Cuando $x \rightarrow \infty$ los valores aumentan con rapidez.
2. Cuando $x \Rightarrow -\infty$ los valores de y se acercan cada vez mas a cero.
3. No existen intersecciones con el eje x .
4. La intersección con el eje y es igual a 1.
5. Dominio $Df(x) = \mathbb{R}$ y rango $Rf(x) = (0, +\infty)$

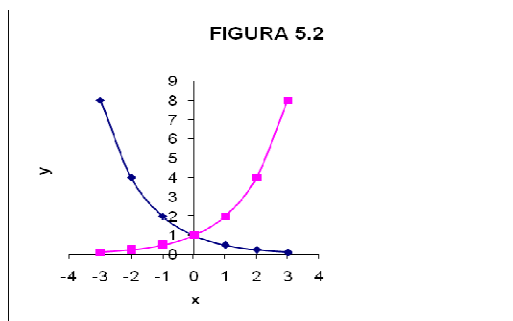
Ejemplo:

Trazar la gráfica de $y = f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Utilizaremos un método diferente a calcular una tabla de valores.

$$y = f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x} = 2^{-x}$$

Si $f(x) = 2^x$, entonces $f(-x) = 2^{-x}$. Así, por el principio de graficación para $f(-x)$, podemos obtener la grafica de $y = 2^{-x}$ reflejando la grafica de $y = 2^x$ con respecto al eje y .



$$y = (1/2)^x$$

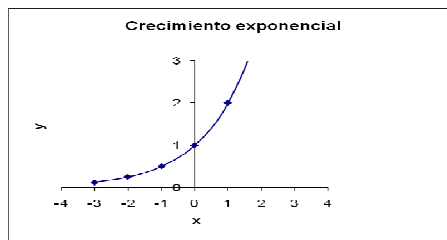
$$y = 2^x$$

Características de la gráfica.

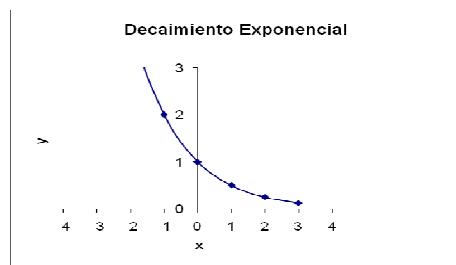
1. No existe intersección con el eje x.
2. 1 es la intersección con el eje y.
3. La gráfica es decreciente.
4. Dominio $Df(x)=\mathbb{R}$ y Rango $Rf(x)=(0,+\infty)$

LA FUNCIÓN EXPONENCIAL $y = f(x) = b^x$

1. El dominio de la función exponencial es el conjunto de todos los números reales.
2. El rango de la función exponencial es el conjunto de todos los números reales positivos.
3. La gráfica de $y = b^x$ exhibe un crecimiento exponencial si $b > 1$ o un decaimiento exponencial si $0 < b < 1$.



La grafica de $y = b^x$ para $b > 1$



La grafica de $y = b^x$ para $0 < b < 1$

4. La intersección con el eje y es 1. No existen intersecciones con el eje x.
5. El eje x es una asíntota horizontal.
6. Como las gráficas de la figura anterior satisfacen la prueba de la línea horizontal, la función exponencial es uno a uno. Algebraicamente, esto significa que si:

$$b^{x_1} = b^{x_2} \text{ entonces } x_1 = x_2$$

ACTIVIDAD DE RECONOCIMIENTO

Trazar la grafica de cada una de las siguientes funciones. Determinar el dominio, el rango, las intersecciones con los ejes y las asíntotas.

a) $y = 3^x + 1$

b) 3^{x+1}

c) $y = -3^x - 1$

d) $y = -3^x + 2$

e) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$

f) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$

g) $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x + 2$

h) $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$

Nota:

El hecho de que todas las funciones exponenciales sean uno a uno nos permite resolver ecuaciones en que la variable aparece en el exponente. Estas ecuaciones reciben el nombre de Ecuaciones Exponenciales.

Ejemplo:

Resolver $8^x = 16$

Como la función exponencial es uno a uno, se tiene:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$2^a = 2^b \Rightarrow a = b$$

Solución:

$$8^x = 16$$

$$(2^3)^x = 2^4$$

$$2^{3x} = 2^4$$

$$3x = 4$$

$$x = \frac{4}{3}$$

Reglas para exponentes racionales.

$$1. \quad x^m x^n = x^{m+n}$$

$$2. \quad (xy)^n = x^n y^n$$

$$3. \quad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} \quad y \neq 0$$

$$4. \quad (x^n)^m = x^{nm}$$

$$5. \quad \frac{x^n}{x^m} = x^{n-m} \quad x \neq 0$$

FUNCIONES LOGARITMICAS

La función exponencial $y = f(x) = b^x$ ($b > 0$ y $b \neq 1$) es uno a uno, por tanto la función exponencial tiene una función inversa.

Definición.

Para $b > 0$ y $b \neq 1$, escribimos $y = \log_b x$ para indicar que y es el exponente al que debe elevarse b para obtener x .

$$x = b^y \Leftrightarrow y = \log_b x$$

El logaritmo es el exponente

Equivalencias de las formas exponenciales y logarítmicas.

Forma exponencial	Forma logarítmica
$4^2 = 16$	$\log_4 16 = 2$
$2^4 = 16$	$\log_2 16 = 4$
$5^{-3} = \frac{1}{125}$	$\log_5 \frac{1}{125} = -3$
$6^{1/2} = \sqrt{6}$	$\log_6 \sqrt{16} = \frac{1}{2}$
$7^0 = 1$	$\log_7 1 = 0$
$b^m = u$	$\log_b u = m$

Ejemplo.

Resolver la ecuación logarítmica $\log_8\left(\frac{1}{2}\right) = x$

Resulta útil reescribir la ecuación logarítmica en forma exponencial.

$$\log_8\left(\frac{1}{2}\right) = x$$

$$8^x = 1/2$$

$$(2^3)^x = 2^{-1}$$

$$2^{3x} = 2^{-1}$$

$$3x = -1$$

$$x = -1/3$$

Nota

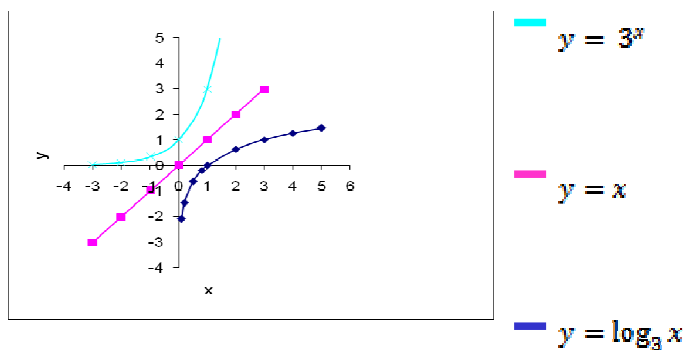
Si reconocemos que las funciones logarítmica y exponencial son inversas, podemos deducir una gran cantidad de información acerca de la función logarítmica y su gráfica a partir de la función exponencial y su gráfica.

Ejemplo.

Trazar la gráfica de:

a) $y = \log_3 x$

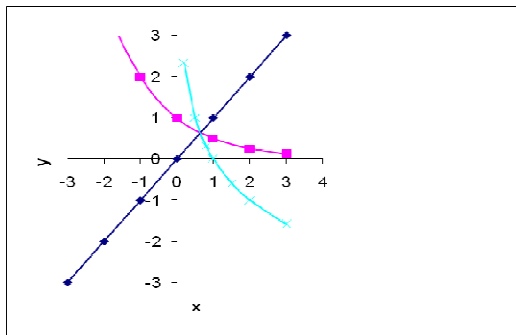
Como $y = \log_3 x$ es la inversa de $y = 3^x$, podemos obtener la gráfica de $y = \log_3 x$ reflejando la gráfica de $y = 3^x$ con respecto de la recta $y=x$



Características de la grafica

1. Como las graficas de $y = b^x$ pasan todas por el punto $(0, 1)$, las graficas de $y = \log_b x$ pasa por el punto $(1, 0)$.
2. Dominio $Df = (0, +\infty)$ y rango $Rf = \mathbb{R}$

Para obtener la grafica de $y = \log_{1/2} x$, reflejamos la grafica de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ con respecto de la recta $y=x$.



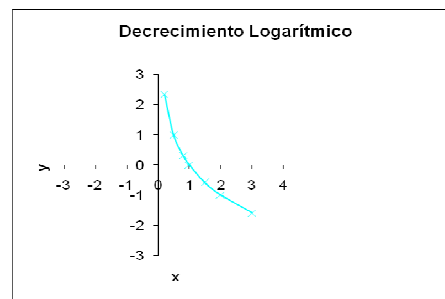
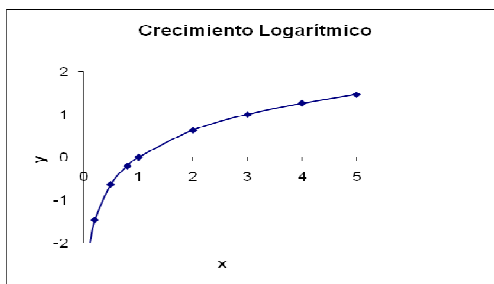
$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$y = x$$

$$y = \log_{1/2} x$$

LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA $y = \log_b x$

1. El dominio de la función logarítmica es el conjunto de números reales positivos.
2. El rango de la función logarítmica es el conjunto de todos los números reales.
3. La grafica de $y = \log_b x$ exhibe un crecimiento logarítmico si $b > 1$ o un decaimiento logarítmico si $0 < b < 1$



$$y = \log_b x \text{ para } b > 1$$

$$y = \log_b x \text{ para } 0 < b < 1$$

4. La intersección con el eje x es 1. No existe intersección con el eje y.
5. El eje y es una asíntota vertical.

Propiedad.

Compuesta de funciones inversas es igual a la función idéntica.

$$\log_b b^x = x$$

$$b \log_b x = x$$

Propiedades de los logaritmos

Las siguientes propiedades suponen que b , u y v son positivos ($b \neq 1$).

1. $\log_b(uv) = \log_b u + \log_b v$

En palabras, el logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

2. $\log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b u - \log_b v$

En palabras, el logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.

3. $\log_b(u^r) = r \log_b u$

En palabras, el logaritmo de una potencia es el exponente por el logaritmo.

4. $\log_b b^x = x$

5. $b^{\log_b x} = x$

Ecuaciones Logarítmicas

Resolver: $\log_2 x + \log_2(x + 2) = 3$

Reescribimos la ecuación de modo que implique un único logaritmo.

$$\log_2 x + \log_2(x + 2) = 3$$

$$\log_2 x(x + 2) = 3$$

$$2^{\log_2 x(x+2)} = 2^3$$

$$x(x + 2) = 8$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$(x + 4)(x - 2) = 0$$

$$x = -4 \quad \text{o} \quad x = 2$$

$x = -4$ no es una solución, puesto que $\log_2(-4)$ no está definido.

Recuerde: El argumento de una función logarítmica no puede ser negativo. Así, la única solución de la ecuación es $x = 2$.

Nota

Es importante reconocer lo que no dicen las propiedades del logaritmo.

Correcto	Incorrecto
$\log_b(uv) = \log_b u + \log_b v$ $\log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b u - \log_b v$ $\log_b(u^r) = r \log_b u$	$\log_b(u + v) = \log_b u + \log_b v$ $\frac{\log_b u}{\log_b v} = \log_b u - \log_b v$ $(\log_r u)^r = r \log_b u$

Ejemplo

Resolver la ecuación: $3^{(x^2+x-2)} = 1$

$$\log_3 3^{(x^2+x-2)} = \log_3 1$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x + 2)(x - 1) = 0$$

$$x = -2 \text{ o } x = 1$$

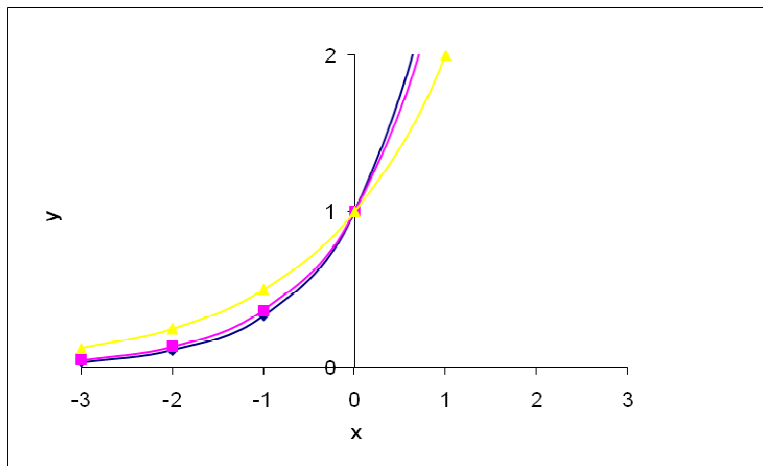
LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

Una base especial y muy importante para el trabajo en Matemáticas es el número irracional denotado por la letra **e**.

$$e = 2.7182818...$$

La función $y = f(x) = e^x$ es la función **exponencial natural**.

Como e es un número entre 2 y 3, la gráfica de $y = f(x) = e^x$ muestra un crecimiento exponencial y está entre las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$.



$$y = e^x$$

$$y = 2^x$$

$$y = 3^x$$

LOGARITMOS NATURALES

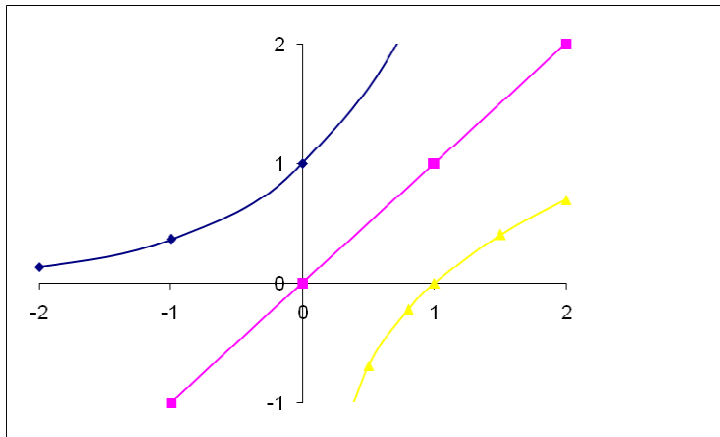
$f(x) = \log_e x$ es la función **logaritmo natural**.

Escribimos $\log_e x = \ln x$

$$\ln 1 = 0$$

$$\ln e = 1$$

Gráficas de $y = e^x$ y su inversa $y = \ln x$



 $y = x$

 $y = \ln x$

 $y = e^x$