

Guía No 3	Calculo Diferencial	Grupo: 1	UNAD
-----------	---------------------	----------	------

Facultad de Ciencias Básicas Tecnología e Ingeniería

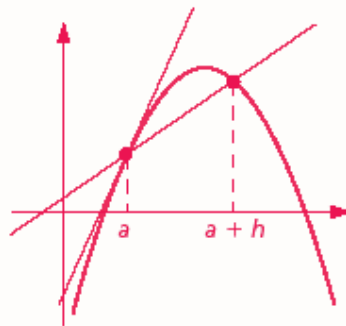
DERIVADA DE UNA FUNCION EN UN PUNTO

Dada una función $f(x)$, y considerado un punto a de su **dominio**, se llama **derivada** de la función en ese punto, denotada como $f'(a)$, al siguiente **límite**:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Este límite también puede expresarse de las dos formas alternativas siguientes:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$



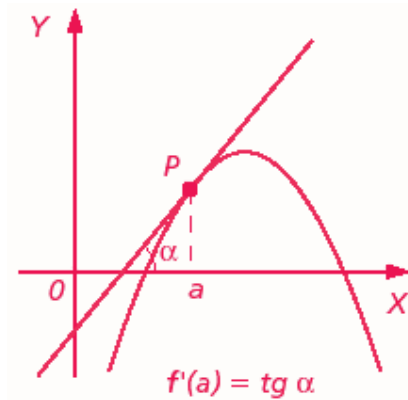
Interpretación geométrica de la derivada

La definición de derivada tiene mucho que ver con el concepto de variación instantánea. Teniendo en cuenta que el cociente: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ expresa la pendiente

de la recta que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, es lógico pensar que si b y a están muy

próximos entre sí, separados por un valor h que tiende a cero, esta recta se aproximará a la recta tangente a la función en el punto $x = a$.

Tal es la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto: coincide con la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto.



La derivada de una función en un punto coincide con la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto.

Ejemplo

Encuentre una ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto $(1,1)$.

Solución

$$\begin{aligned} m &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 2 + h = 2 \end{aligned}$$

La ecuación de recta $y - y_1 = m (x - x_1)$

$$x_1, y_1 = (1, 1) \quad m = 2$$

$$y - 1 = 2(x - 1)$$

$$y = 2x - 2 + 1$$

$$y = 2x - 1$$

Ecuación de la recta tangente

Dibuje la parábola y muestre un segmento de la recta tangente en $(1, 1)$.

No olvide que en el ejercicio anterior, la derivada de la función en un punto, es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto

DEFINICIÓN DE LA RECTA NORMAL A UNA GRÁFICA

La recta normal a una gráfica en un punto dado es la recta perpendicular a la recta tangente en ese punto.

Ejemplo

Encuentre una ecuación de la recta normal a la parábola $y = x^2$ en el punto $(1, 1)$.

Dibuje la parábola y muestre un segmento de la recta tangente y otro de la recta normal en el punto $(1, 1)$.

La recta normal a la gráfica de f en un punto, es perpendicular a la recta tangente en ese punto.

Como la pendiente de la recta en $(1, 1)$ es 2 entonces la pendiente de la recta normal en $(1, 1)$ es $-\frac{1}{2}$

(Rectas perpendiculares: $m_1 m_2 = -1$) y una ecuación de la recta normal es:

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Ejemplo

Sea $f(x) = 2x + 1$. Encontrar $f'(3)$

$$f'(3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(3+h) + 1 - (2(3) + 1)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{6 + 2h + 1 - 6 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h} = 2 \Rightarrow f'(3) = 2$$

Nota

Si hacemos $x = c + h$ en la diferenciación anterior, vemos que

si $h \rightarrow 0$, $x \rightarrow c$ Luego podemos escribir

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Ejemplo

Sea $f(x) = 2x + 1$. Encuentre $f'(3)$

$$f'(3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x + 1 - (2(3) + 1)}{x - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 6}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} 2 = 2 \Rightarrow f'(3) = 2$$

Actividad profundización

TALLER No 1

Usando la definición calcula las derivadas de las funciones dadas; después halla los valores de las derivadas como se pide

1. $f(x) = 4 - x^2$; $f'(-3)$, $f'(0)$, $f'(1)$

2. $f(x) = (x - 1)^2 + 1$; $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'(2)$

FORMULAS DE DERIVADAS

Ejemplo

$$f(x) = c \quad c = \text{constante}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$(c') = 0 \quad \text{Derivada de una constante} = 0$$

Ejemplo

$$\text{sea } f(x) = mx + b$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(x+h) + b - mx - b}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{mx + mh + b - mx - b}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{mh}{h} = m \quad \Rightarrow (mx + b)' = m$$

Ejemplo

$$f(x) = x^n,$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + nx^{n-1}h^n - x^n}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \dots + nx^{n-1}h^{n-1} \right]}{h}$$

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Ejemplo

$$f(x) = \sin x,$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\sin x \cos h - \sin x) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \sin h}{h}$$

$$\sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = \cos x$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$\text{De igual forma } (\cos x)' = -\sin x$$

Ejemplo

Dado $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ah)}{h} = a$, determinar la derivada de

$$f(x) = \ln x$$

$$f'(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{(x+h)}{x}}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln x \left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} \text{ hacemos } a = \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ah)}{h} = a = \frac{1}{x}$$

$$\text{Así } (\ln)' = \frac{1}{x}$$

Ejemplo

Dado $\lim_{h \rightarrow 0} e^h - 1 = h$, determinar la derivada de

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x * 1 = e^x$$

$$\text{Así } (e^x)' = e^x$$

Caso particular

$$\text{Si } f(x) = e^{rx}, \quad r \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = re^{rx}$$

Ejemplo

sea $f(x) = a^x$, como $a^x = e^{x \ln a}$ tenemos

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = \ln a e^{x \ln a} = a^x \ln a$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

Ejemplo

$$\text{Dado } f(x) = \log_a x = n = \frac{1}{\ln a} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}$$

$$= n \frac{1}{\ln a} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}$$

$$\text{Así } (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

Actividad profundización

TALLER No 2

1. $(x^{1/3})' =$

2. $(\sqrt[3]{x})' =$

3. $(\log_2 x)' =$

4. $(e^{5x})' =$

5. $(\ln x)' =$

6. $(\log_4 x)' =$

7. $(\sqrt[5]{x})' =$

TEOREMA

Sean f y g funciones definidas en el intervalo $[a, b]$. Supongamos que f y g son derivables en $x \in [a, b]$. Entonces,

1.

$f + g$, $f \times g$ también son derivables

a) $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

b) $[k f(x)]' = k f'(x)$

c) $[f(x) * g(x)]' = f'(x) g'(x) + f'(x) g'(x)$

2.

Si $g(x) \neq 0$ entonces $\frac{f}{g}$ también es derivable

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \text{ *en particular}$$

$$\left(\frac{1}{g} \right)' = \frac{-g'}{g^2}$$

Demostremos

$$(f' + g')(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f + g)(x + h) - (f + g)(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) + g(x + h) - f(x) - g(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} =$$

$$f'(x) + g'(x)$$

Ejemplo

$$1. \quad \left[(3x^2 - 5)(2x^4 - x) \right]'' = 36x^5 - 40x^3 - 9x^2 + 5$$

$$2. \quad D_x \left[\frac{3x - 5}{x^2 + 7} \right] = \frac{-3x^2 + 10x + 21}{(x^2 + 7)^2}$$

$$3. \quad \left[\frac{2}{x^4 + 1} + \frac{3}{2} \right]' = \frac{-8x^3}{x^4} - \frac{3}{x^2}$$

$$4. \quad D_x (3 \operatorname{sen} x - 2 \cos x) = 3 \cos x + 2 \operatorname{sen} x$$

$$5. \quad D_x (3 \operatorname{sen} 2x) = D_x (6 \operatorname{sen} x \cos x) = 6 \cos 2x$$

$$D_x (\operatorname{sen} x) = \cos x$$

Si $f(x) = \cos x$ entonces

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x + h) - \cos x}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h - \cos x}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \cos x}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} h}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \cos x * \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \operatorname{sen} x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = -\operatorname{sen} x$$

$$(\cos x)' - \operatorname{sen} x$$

$$\begin{aligned}
 D_x(\tan x) &= D_x\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) = \\
 &= \frac{(\operatorname{sen} x)' - \cos x - \operatorname{sen} x(\cos x)'}{\cos^2 x} \\
 &= \frac{\cos x - \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} \\
 &= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \\
 (\tan x)' &= \sec^2 x
 \end{aligned}$$

Actividad profundización

TALLER No 3

Ejercicios

1. $(\cot x)' =$
2. $(\sec x)' =$
3. $(\csc x)' =$
4. $(\cot 7x)' =$
5. $(\operatorname{sen}^2 x) =$
6. $(\tan x \sec x)' =$
7. $D_x\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1 - 2\cos x}\right) =$
8. $D_x\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x}\right) =$
10. $D_x\left(\frac{\sec x}{x^2}\right)$
11. $D_x\left(\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}\right)$
12. $D_x\left(\frac{\cot x}{1 - \operatorname{sen} x}\right)$

REGLA DE LA CADENA

DERIVADA DE UNA FUNCION COMPUESTA (REGLA DE LA CADENA)

NOTACIÓN PARA LA REGLA DE LA CADENA

Sean $y = f(u)$ y $u = g(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$$

Sea $y = f(x)$ y $u = g(x)$ que determinan una función compuesta

$$y = f(g(x)) = (f \circ g)(x).$$

Si g es diferenciable en x y f es difernciable en

$u = g(x)$, entonces $f \circ g$ es derivable en x , y

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Esto es

$$D_x y = D_u y D_x u$$

Ejemplo

$$\text{Sea } y = (2x^2 - 4x + 1)^{60}$$

$$D_x y = 60(2x^2 - 4x + 1)^{59} (4x - 4)$$

$$((f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x))$$

Ahora consideremos la otra notación: $y = u^{60}$ y $u = 2x^2 - 4x + 1$

$$D_y y = D_u y * D_x u$$

$$= 60u^{59} (4x - 4) = 60(2x^2 - 4x + 1)(4x - 4)$$

Ejemplo

$$D_x (\cos 3x) = -\text{sen} 3x(3) = -3\text{sen} 3x$$

$$D_x (x^3 + \text{sen} x)^6 = 6(x^3 + \text{sen} x)(3x^2 + \cos x)$$

$$D_x (\tan^2 x) = 2 \tan x * \sec^2$$

$$D_x (\text{sen}^3(4x)) = \text{sen}^2(4x) \cos(4x) - 4 = 12\text{sen}^2(4x) \cos 4x$$

Nota: En el ejemplo anterior se hicieron mentalmente las sustituciones y se escribió de inmediato la respuesta.

Actividad profundización

TALLER N° 4

$$\begin{array}{ll}
1. \frac{d}{dx} = \left(\frac{2x}{x+3} \right) & 2. \frac{d}{dx} = \left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 1} \right) \\
3. \frac{d}{dx} = (4x^2 + 3)^2 & 4. \frac{d}{dx} [(x^2 - 3x + 2)(2x^3 + 1)] \\
5. \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{x-1} \right) & 6. \frac{d}{dx} [3(x^2 - 5)(2x^4 - x)] \\
7. \frac{d}{dx} \frac{1}{3} \sec^3 2t - \sec 2t & 8. \frac{d}{dx} (\sec^2 x \tan^2 x) \\
9. \frac{d}{dx} (\cot^4 t - \csc^4 t) & 10. \frac{d}{dx} [(3x^2 - 5)(2x^4 - x)] \\
11. 2t \cot
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
12. \frac{d}{dx} = \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} & 13. \frac{d}{dx} = \tan x \operatorname{sen} 2x \\
14. \frac{d}{dx} = 2 \tan x \cos^2 x & 15. \frac{d}{dx} = (\log_2 x) \\
16. \frac{d}{dx} = \frac{1}{3} \sec^3 2t - \sec 2t & 17. \frac{d}{dx} = \left(\frac{x-7}{x+2} \right)^2 \\
18. \frac{d}{dx} = \operatorname{sen}^2(3t^2 - 1) & 19. \frac{d}{dx} = (\tan^2 x - x^2)^3 \\
20. \frac{d}{dx} = 4 \cos(\operatorname{sen} 3x)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
21. f(x) = (x^2 + 4)^{-2} & 22. f(x) = 4 \cos 3x - 3 \operatorname{sen} 4x \\
23. f(x) = (\sec^2 x \tan^2 x) & 24. f(x) = \operatorname{sen}^2(\cos 2x)
\end{array}$$

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Ejemplo

$$y = x^2 + \cot x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (x^2 \cot x) = \frac{d}{dx} (x^2) + \frac{d}{dx} (\cot x) = 2x - \csc^2 x$$

$$\frac{d}{dt} (5t^4 - \sec t) = \frac{d}{dt} (5t^4) - \frac{d}{dt} (\sec t) = 20t^3 - \sec t \tan t$$

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

<i>Derivada</i>	f''	y'	D	<i>leibniz</i>
<i>Primera</i>	f'	y'	$D_x y$	$\frac{dy}{dx}$
<i>Segunda</i>	f''	y''	$D_x^2 y$	$\frac{d^2 y}{dx^2}$
<i>Tercera</i>	f'''	y'''	$D_x^3 y$	$\frac{d^3 y}{dx^3}$
<i>cuarta</i>	$f^{(4)}(x)$	$y^{(4)}$	$D_x^4 y$	$\frac{d^4 y}{dx^4}$
<i>enesima</i>	$f^{(n)}(x)$	$y^{(n)}$	$D_x^n y$	$\frac{d^n y}{dx^n}$

$$\text{Si } y = e^x$$

$$D_x y = e^x$$

$$D_x^2 y = e^x$$

$$D_x^3 y = e^x$$

$$D_x^4 y = e^x$$

DERIVACION IMPLICITA

Frecuentemente una función $y = f(x)$ *satisface una relación* (1)

$$F(x, y) = 0 \quad (2)$$

La expresión (2) nos da en forma implícita como función de x

Se trata de encontrar $\frac{dy}{dx}$ son necesidad de expresar a, y como función de x .

Es decir como en la ecuación (1). Esto porque a veces es muy difícil despejar o casi imposible de hacerlo.

Los ejemplos que siguen ilustran el procedimiento conociendo como: Derivación Implícita.

Ejemplo

Calcular y' sabiendo que satisface la ecuación.

$$x^2 y + xy = \operatorname{sen} y + 1$$

Soclución:

$$2xy + x^2 y' + y + xy' = y' \cos y$$

$$x^2 y' + xy' = y' \cos y = -2xy - y$$

$$y'(x^2 + x - \cos y) = -2xy - y$$

$$y' = \frac{-2xy - y}{x^2 + x - \cos y} \quad x^2 + x - \cos y \neq$$

Ejemplo

$$\frac{dy}{dx} \text{ si } x^2 + 5y^3 = x + 9$$

Soclución:

$$2x + 15y^2 \frac{dy}{dx} = 1$$

$$15y^2 \frac{dy}{dx} = 1 - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2x}{15y^2}$$

Ejemplo

Encuentre la ecuación de la tan gente a la curva $y^3 - xy^2 + \cos(xy) = 2$ en el punto $(0,1)$

$$3y^2 y' - (y^2 + 2xyy') - \operatorname{sen}(xy)[y + xy'] = 0$$

$$\text{En } (x, y) = (0,1)$$

$$3y^2 y' - y^2 - 2xyy' - y \operatorname{sen}(xy) - xy' \operatorname{sen}(xy) = 0$$

$$3(1)^2 y' - 1^2 - 2(0)(1)y' - 1 \operatorname{sen}(0) - 0y' \operatorname{sen}(0) = 0$$

$$3y' - 1 = 0 \Rightarrow 3y' = 1$$

$$(x_1, y_1) = (0,1) \quad y' = \frac{1}{3}$$

$$y - 1 = \frac{1}{3}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + 1$$

Actividad profundización

TALLER No 5

Hallar $\frac{dy}{dx}$

1. $y = (2x + 1)^2$

2. $y = \left(1 - \frac{x}{7}\right)^{-7}$

3. $y = \left(\frac{x^2}{8} + x\frac{1}{x}\right)^4$

4. $y = \sec(\tan x)$

5. $y = \operatorname{sen}^3 x$