

Guía No 3	Álgebra y Trigonometría	Grupo: 1	UNAD
-----------	-------------------------	----------	------

Ciencias Básicas Tecnología e Ingeniería

RELACIONES Y FUNCIONES

Relaciones

Nuestra vida cotidiana tiene muchas situaciones en la que encontramos relaciones entre los conjuntos.

Ejemplo.

- A cada automóvil le corresponde un número de placa
- A cada círculo le corresponde un circunferencia
- A cada número le corresponde su cuadrado

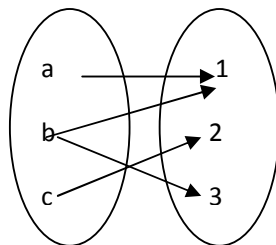
Definición. Una relación es una correspondencia entre dos conjuntos de modo que a cada miembro del primer conjunto (llamado dominio) le corresponde uno o más miembros del segundo.

Como Expresar una Relación

Existen varias maneras de expresar una relación:

Aquí presentamos dos de ellas

1. Mediante diagrama de flechas



2. Con parejas ordenadas $A: \{(a, 1), (b, 1), (b, 3), (c, 2)\}$

Funciones

Matemáticamente es importante para nosotros distinguir entre relaciones que asignan un único elemento del rango a cada elemento del dominio y aquellas que no.

Definición: Una función es una relación tal que a cada elemento del dominio le corresponda exactamente un elemento del rango.

Definición: El dominio natural de una función es el conjunto de números reales para el cual la ecuación o fórmula está definida y que produce valores de números reales en el rango. A esta función se le llama una función real de una variable real. En otras palabras, la función debe tener una entrada real y una salida real.

Definición: Dominio natural de una función es el conjunto de números reales para el cual la ecuación o formula está definida y que produce valores de números reales en el rango. A esta función se le llama una función real de una variable real. En otras palabras, la función debe tener una entrada real y una salida real.

Ejemplo.

Determine el dominio

1. $y = \frac{5}{x^2 - 4}$

2. $y = \sqrt{4 - 3x}$

3. $4 - 3x \geq 0$

4. $4 \geq 3x$

5. $x \leq \frac{3}{4}, D_f = \left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$

Actividad de Reconocimiento

Taller No 1

Determine el dominio de cada una de las siguientes funciones

1. $y = 3x + 4$

2. $y = \frac{5}{x^2 - 25}$

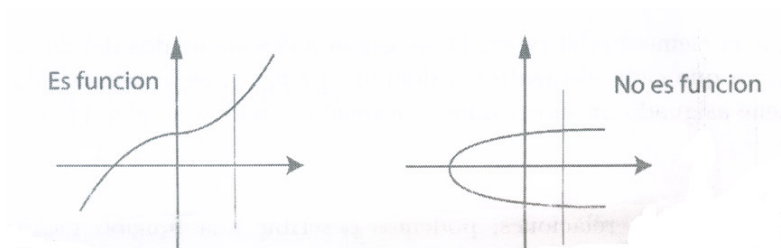
3. $y = \sqrt{3x - 12}$

4. $y = 3x + 4$

5. $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$

LA PRUEBA DE LA RECTA VERTICAL

Definición: Si alguna recta vertical interseca una grafica en más de un punto, entonces la grafica no es la grafica de una fracción.



NOTACION FUNCIONAL

Definición: $f(x)$ es el valor que la función f asigna a x .

Cuando queremos indicar que y es una función de x , escribimos:

$$y = f(x)$$

$f(x)$ se lee f de x

x : variable independiente

$y = f(x)$: Variable independiente

$f(x)$ no es más que otro nombre para la variable dependiente. Es útil pensar en x como la entrada, y $f(x)$ como la salida. Así:

$$f(x) = x + 3 \text{ entonces } f(5) = 5 + 3 = 8$$

5 es la entrada y $f(5) = 8$ es la salida.

Ejemplo

Dada la función $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - 4$, determinar lo siguiente:

a) $g(-3)$

b) $g\left(\frac{1}{2}\right)$

Solución a) para determinar $g(-3)$, reemplazamos todas las ocurrencias de x con -3 .

$$g(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - 4$$

$$g(-3) = \frac{1}{3}(-3)^3 + 2(-3) - 4$$

$$= -9 - 6 - 4$$

$$g(-3) = -19$$

Solución b) Para determinar $g\left(\frac{1}{2}\right)$, reemplazamos todas las ocurrencias de x con $\frac{1}{2}$.

$$g(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - 4$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{2}\right) - 4$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}\right) + 1 - 4 = \left(\frac{1}{24}\right) - 3$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{71}{24}$$

Actividad de Reconocimiento

Taller No 2

1. Dada $f(x) = 2x - 1$, determine:

- | | |
|---------------|--------------------------------------|
| a) $f(3)$ | f) $f(2x)$ |
| b) $f(-2)$ | g) $2f(x)$ |
| c) $f(0)$ | h) $f(x + h)$ |
| d) $f(a + 1)$ | i) $f(x)$ |
| e) $f(x + 1)$ | j) $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, h \neq 0$ |

COMPOSICION DE FUNCIONES

Existe otra manera de combinar dos funciones para obtener una nueva función. Por ejemplo, suponga que $y = f(u) = \sqrt{u}$ y $u = g(x) = x^2 + 1$, como y es una función de u y, a su vez, u es una función x , se concluye que, y es una función de x . Calculamos esto por sustitución:

$$y = f(u) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$x \xrightarrow{g} x^2 + 1 \rightarrow \sqrt{x^2 + 1}$$

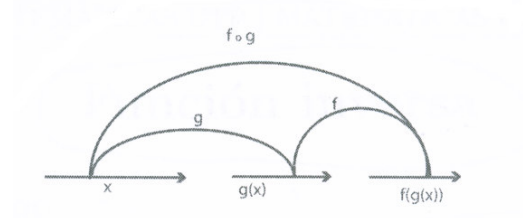
El procedimiento se llama composición porque la nueva función se compone de las dos funciones dadas f y g .

En general, dadas dos funciones cualquiera f y g , partimos de un número x en el dominio de g y encontramos su imagen $g(x)$. Si este número $g(x)$ está en el dominio de f , entonces podemos calcular el valor de $f(g(x))$. El resultado es una nueva función $h(x) = f(g(x))$

obtenida al sustituir g en f . Esta se conoce como la composición (o la compuesta) de f y g y se denota con $f \circ g$ (f círculo g).

Dadas dos funciones f y g , la función **compuesta** $f \circ g$ (también llamada la composición de f y g) esta definida por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todos los x en el dominio de g tales que $g(x)$ este en el dominio de f . En otras palabras, $(f \circ g)(x)$ está definida siempre que $g(x)$ y $f(g(x))$ lo están.



Ejemplo Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x - 3$, encuentre las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$

Solución : Tenemos

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 3) = (x - 3)^2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 3$$

En general $f \circ g \neq g \circ f$

2. Defina las siguientes funciones

a) $f \circ g$ b) $g \circ f$

- $f(x) = x - 2$ $g(x) = x + 7$
- $f(x) = 3 - 2x$ $g(x) = 6 - 3x$
- $f(x) = x - 5$ $g(x) = x^2 - 1$
- $f(x) = \sqrt{x - 2}$ $g(x) = x^2 - 2$
- $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ $g(x) = x + 1$

FUNCION INVERSA

FUNCIONES UNO A UNO

Una función $f(x)$ es uno a uno si y solo si para cada dos valores distintos del dominio, $x_1 \neq x_2$, implica que $f(x_1) \neq f(x_2)$. En otras palabras, esta condición dice que valores diferentes de x necesariamente proporcionan valores diferentes de y .

Para que una función sea uno a uno, cualquier recta horizontal puede intersectar la grafica a lo más en un punto.

INTERPRETACION ALGEBRAICA.

$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

Ejemplo Determinar si $f(x) = 2x + 3$ es uno a uno.

$$\text{Solución} \quad f(x_1) = f(x_2)$$

$$2x_1 + 3 = 2x_2 + 3$$

$$2x_1 = 2x_2$$

$$x_1 = x_2$$

Por lo tanto f es uno a uno

FUNCIONES INVERSAS

Definición Se dice que dos funciones f y g son funciones inversas si y solo si:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x \text{ para todo } x \text{ en el dominio de } g$$

Y

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x \text{ para todo } x \text{ en el dominio de } f$$

Es decir: la compuesta de funciones inversas es igual a la función idéntica.

COMO DETERMINAR LA FUNCION INVERSA

Para determinar la inversa de una función uno a uno $y = f(x)$

1. Intercambiamos x y y en la ecuación $y = f(x)$
2. Despejamos x en la ecuación resultante, con lo que obtenemos la función inversa.
3. El dominio de la función inversa es el rango de la función original y el rango de la función inversa es el dominio de la función original.

Ejemplo:

$$y = x^2 \Rightarrow \text{la inversa es } x = \sqrt{y}$$

$$y = \operatorname{sen} x \Rightarrow \text{la inversa es } x = \operatorname{sen}^{-1} y$$

$$y = x^2 \Rightarrow \text{la inversa es } x = \sqrt{y}$$

$$y = 2x + 1 \Rightarrow \text{la inversa es } x = \frac{y-1}{2}$$

Actividad de Reconocimiento

Taller No 3

Dada $y = f(x) = 2x - 1$

1. Verificar que f es uno a uno

2. Intercambiar x y y en la ecuación $y = 2x - 1$
3. Obtener la función inversa despejando y en la ecuación resultante.
4. Verificar que $(f \circ f^{-1})(x) = x$ y $(f^{-1} \circ f)(x) = x$
5. Trazar las graficas de $f(x)$, $f^{-1}(x)$ y $y = x$ en el mismo conjunto de coordenadas.

Actividad de Reconocimiento

Taller No 4

1. Verificar que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones inversas.
 - a) $f(x) = x - 1$, $g(x) = x + 1$
 - b) $f(x) = x^3$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$
2. Determine la inversa de la función dada.
 - a) $y = f(x) = 5x - 9$
 - b) $y = f(x) = 3x + 1$
 - c) $y = f(x) = \frac{1}{x+4}$