

Guía No 3	Álgebra Lineal	UNAD	Grupo: 1
-----------	----------------	------	----------

Escuela de Ciencias Básicas Tecnologías e Ingeniería

MATRICES Y DETERMINANTES

Matriz Transpuesta:

La transpuesta de A^t de matriz $A_{m \times n}$ es la matriz $n \times m$ cuyas columnas son los renglones de A en el mismo orden

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Una matriz que es igual a su transpuesta se denomina simétrica. Por lo tanto B es simétrica.

PROPIEDADES DE LA TRASPUUESTA

$$i) (A^t)^t = A$$

$$ii) (A + B)^t = A^t + B^t$$

$$iii) (CA)^t = CA^t$$

$$iv) \quad (AB)^t = B^t A^t$$

$$v) \text{ Si } A \text{ es inversible también lo es } A^t. \text{ En este caso } (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

DETERMINANTES

Usaremos sólo matrices cuadradas

Determinantes y desarrollo de cofactores

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ El determinante de A es el número

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Ejemplo

$$\det = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = 1$$

Ejemplo

La notación $\begin{vmatrix} \end{vmatrix}$ (no confundir con valor absoluto)

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - (-3) \cdot 4 = 10 + 12 = 22$$

Definición: El menor (ij) de una matriz A se representa por M_{ij} y es el determinante que se obtiene eliminando el i -ésimo renglón y la j -ésima columna de A

Desarrollo de un determinante por factores

Sea A una matriz cuadrada. Primero asignamos un signo a cada elemento de A , siguiendo una distribución de tablero de ajedrez, con signos más y menos.

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$
 Enseguida se elige cualquier renglón o columna y se multiplica cada elemento con su signo que da la tabla por el menor correspondiente. Por último, se suman todos los productos

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \det(A) = 0 \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - 1 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Actividades reconocimiento

Taller No 1

Terminar los cálculos del determinante anterior

$$\text{Verificar } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -10 \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ -4 & 7 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -80$$

Actividades reconocimiento

Taller No 2

Despeje el valor de x

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 2 \\ 0 & x-3 & -1 \\ 2 & 0 & x-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ -2 & x-7 & 0 \\ 3 & 0 & x-2 \end{vmatrix}$$

Calcule todos los valores de λ tales que el determinante sea cero

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} \text{ Rta/ } \lambda=0 \quad \lambda=3$$

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

1. Si un renglón o columna de una matriz A contiene sólo ceros, entonces el determinante de A es igual a cero $|A|=0$

2. $\det A = \det (A^t)$

3. Si B se obtiene de A multiplicando uno de sus renglones (o columnas) por una constante distinta de cero, entonces $\det(B) = K \det(A)$

4. $\det(KA) = K^n \det(A)$

5. Si B se obtiene de A intercambiando dos renglones (o columnas) cualesquiera, en este caso $\det(B) = -\det(A)$

6. Si B se obtiene de A sumando un múltiplo de un renglón (o columnas) a otro renglón o (columnas), entonces $\det(B) = \det(A)$

7. Si A tiene dos renglones o (columnas) que son iguales, entonces $\det(A) = 0$

Actividades reconocimiento

Taller No 3

1. Elabore los determinantes sólo por inspección:

$$a) \begin{vmatrix} 5 & 1 & 14 \\ 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad Rta / -50$$

$$b) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad Rta / -1$$

$$c) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad Rta / 1$$

$$d) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 6 & 4 & 5 \\ -1 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \quad Rta / 24$$

Actividades reconocimiento

Taller No 4

Explique sin hacer cálculos, por qué las sustituciones $x=0,2$ hacen que los determinantes sean iguales.

$$a) \begin{vmatrix} x & x & 2x \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} x & x & 2 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 8 & 8 & x^3 \end{vmatrix}$$

Actividades reconocimiento

Taller No 5

Explique sin hacer cálculos por qué son iguales los determinantes siguientes

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -b & c \\ -d & e & -f \\ g & -h & i \end{vmatrix}$$

Evalue el determinante con ecuaciones de renglón

$$\begin{vmatrix} 2 & 9 & 2 & 8 \\ -2 & 3 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 28$$