Guía No 3	Calculo Integral	Grupo 1	UNAD

Escuela de Ciencias Básicas Tecnologías e Ingeniería

MÉTODO POR FRACCIONES PARCIALES

Una fracción es un número de la forma $\frac{a}{b}$ donde a, y b son números reales, con b ≠ 0

por ejemplo $\frac{5}{9},\frac{2}{3},\frac{2}{8},\frac{1}{4},\frac{10}{5}\cdots$

En estas fracciones anteriores observamos dos clases de fracciones; Propias e Impropias, propias son las que tienen el numerador menor que el denominador como $\frac{5}{9},\frac{2}{3},\frac{1}{4}$, e impropias son las que tienen el numerador mayor que el denominador como $\frac{7}{2},\frac{10}{5}$, estas se convierten en un entero más, una fracción propia $\left(\frac{7}{2}=3+\frac{1}{2}\right)$

Esto lo anterior lo podemos llevar al algebra así:

Una fracción algebraica PROPIA es cuando el polinomio del numerador es de grado menor que el polinomio del denominador, por ejemplo:

$$\frac{x^2+3x+1}{x^5+2x^4+x-2}$$

Existen unas fracciones propias cuyo denominador se puede factorizar en diferentes formas así:

Dada una fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}\ con\ Q(x)\neq 0$

CASO I

Cuando el denominador Q (x) se puede factorizar en factores Lineales (de primer grado) diferentes de (x + a) (x + b) (x + c) ....

$$\frac{P(x)}{(x+a)(x+b.)(x+c)\ldots(x+z)}=\frac{A}{x+a}+\frac{B}{x+b}+\cdots+\frac{Z}{x+z}$$

Lo anterior por un teorema de Algebra Superior

Ejemplo:

$$\int\frac{(x-1)dx}{x^2-2x-3}=$$

$$\int\frac{(x-1)dx}{(x-3)(x+1)}=\int\frac{A\,dx}{x-3}+\int\frac{B\,dx}{x+1}$$

Debemos hallar las contantes A y B así:

$$\frac{x-1}{(x-3)(x-1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+1}$$

$$x-1=A(x+1)+B(x-3)$$

$$x-1=Ax+A+Bx-3B$$

$$1x-1=x(A+B)+A-3B$$

$$1=A+B$$

$$-1=A-3B$$

$$A=\frac{1}{2}$$

$$B=\frac{1}{2}$$

Multiplicamos por $(x-3)(x+1)$ cada término y simplificamos su primer paréntesis, factorizo x comparo coeficientes y términos independientes.

La integral queda así:

$$\int \frac{(x-1)dx}{x^2-2x-3} =$$

$$\int \frac{(x-1)dx}{(x-3)(x+1)} = \int \frac{\frac{1}{2}dx}{x-3} + \int \frac{\frac{1}{2}dx}{x+1}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-3} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} =$$

$$\frac{1}{2}lu|x-3| + \frac{1}{2}lu|x+1| + c$$

CASO II

Cuando el denominador Q(x)se puede factorizar en factores lineales

(de primer grado) repetidos $(x+a)^2 \quad (x+b)^3 \cdots$

$$\frac{P(x)}{(x+a)^2 \quad (x+b)^3 \cdots (x+z)^n} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{(x+a)^2} + \frac{C}{x+b} + \frac{D}{(x+b)^2} + \frac{E}{(x+b)^3} + \cdots$$

Ejemplo:

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+2x^2+1} =$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x+1)^2} = \int \frac{A\,dx}{x+1} + \int \frac{B\,dx}{(x+1)^2}$$

$$\frac{x}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} \qquad multiplico \;\; cada \;\; ter\min o \;\; por \;\; (x+1)^2$$

$$x = A(x+1) + B \qquad \sup rimo \;\; parentesis$$

$$1x = AX + A + B \qquad compararo \; coeficientes \; y \; tér\min os \; independientes$$

$$1 = A$$

$$O = A + B$$

$$A = 1$$

$$B = -1$$

La integral queda así:

$$\int \frac{x\,dx}{x^2 + 2x^2 + 1} =$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x+1)^2} = \int \frac{A\,dx}{x+1} + \int \frac{B\,dx}{(x+1)^2} \quad =$$

$$\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{-\,dx}{(x+1)^2} =$$

$$Ln|x+1| - \int \frac{dx}{(x+1)^2} =$$

$$\ln|x+1| - \int (x+1)^{-2}\,dx =$$

$$\ln|x| + (x+1)^{-1} + c$$