

Guía No 3	CONTINUIDAD	UNAD	Grupo: 1
-----------	-------------	------	----------

*Escuela de Ciencias Básicas Tecnologías e Ingeniería*

## *CONTINUIDAD*

### *Idea Intuitiva de Continuidad*

*El concepto de continuidad es una de las ideas más importantes y más fascinantes de todas las matemáticas. Antes de dar una definición rigurosa de continuidad, comentaremos este concepto brevemente en forma intuitiva.*

*Prescindiendo del rigor podemos presentar el asunto así:*

*Supongamos una función  $f$  que tiene el valor  $f(x)$  en un cierto punto  $a$ . Se dice que  $f$  es continua en  $a$  si en todo punto  $x$  próximo a  $a$  el valor de la función  $f(x)$  es próximo a  $f(a)$ .*

### *Definición de Continuidad de una Función*

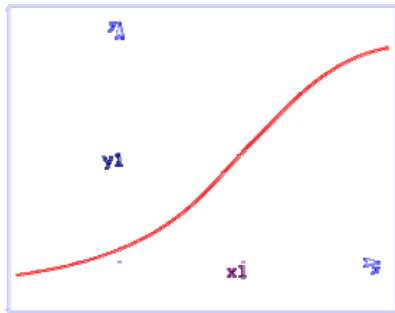
*Decimos que una función es continua en un punto si*

*a)  $f$  está definida en  $a$ , y*

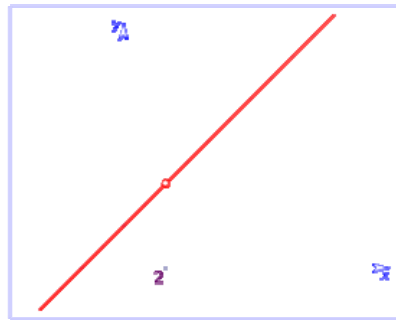
*b)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$*

## Graficas de funciones

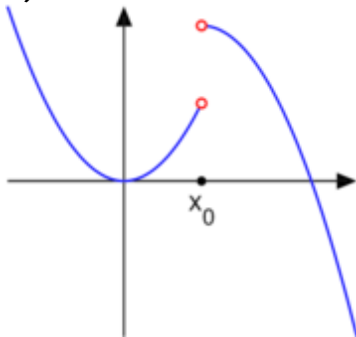
a)



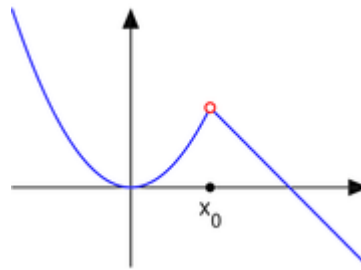
b)



c)



b)



### Comentario de las graficas de las funciones anteriores.

a)  $f$  función continua,  $\lim_{x \rightarrow x_1} f(x) = f(x_1)$

b)  $f$  discontinua en 2: Existe el  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  pero  $f(2)$  no está definida. Esta discontinuidad es removible (o eliminable) porque si  $f$  se redefine en 2 de modo que  $f(2)$  es igual a  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  la nueva función es continua en 2.

c)  $f$  discontinua en  $x_0$ : como  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  no existe, la discontinuidad recibe el nombre de esencial.

d)  $f$  discontinua en  $x_0$ : discontinuidad removible o eliminable porque si  $f$  se redefine en  $x_0$  de modo que

$f(x)$  es igual  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  la nueva función es continua en  $x_0$ .

### Definición

1.

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe y  $f(a)$  no está definida o si

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$  se dice que  $f$  tiene una discontinuidad evitable en  $x = a$

Se pueden usar las palabras: removible, eliminable o evitable

2.

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  no existe, decimos que  $f$  tiene una discontinuidad esencial o no evitable en  $x = a$

### Nota

Lo interesante de lo anterior es que si una función tiene una discontinuidad evitable en  $x = a$  la función puede redefinirse de tal forma que la función resultante sea continua en  $x = a$ .

### Ejemplos de funciones continuas

1. La función Constante

$$f(x) = c$$

$$f(a) = c$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

con lo cual  $f$  es continua para todo  $x$

2. La función Idéntica

$$f(x) = x$$

$$f(a) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x = a \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

luego es continua para todo valor de  $x$

3. Sean  $f$  y  $g$  dos funciones continuas en un punto  $a$  la suma  $f + g$  la diferencia  $f - g$  y el producto  $f * g$  son

también continuas en  $a$ .

Si  $g(a) \neq 0$ , también el cociente es continua  $\frac{f}{g}$

4. Las funciones polinómicas son continuas para todos los valores de  $x$   $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a)$

5. Continuidad de las funciones racionales. El cociente de los polinomios se llama función racional.

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

$p$  y  $q$  polinomios funciones continuas

Como el cociente de funciones continuas es continuo, la función racional es continua en todos los puntos en que está definida.

### Ejemplo

Considere la función  $f(x) = \begin{cases} |x-2|, & \text{si } x \neq 2 \\ 3, & \text{si } x = 2 \end{cases}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$$

$$f(2) = 3$$

por tanto  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$  y así  $f$  es discontinua en 2.

discontinuidad removible

### Ejemplo

$$\text{Sea } f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \geq 2 \\ -1, & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ no existe}$$

por tanto  $f$  es discontinua en  $x = 0$

### Actividad profundización

### TALLER N.º 1

Calcula cada uno de los siguientes límites laterales si existen

$$a) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 2|x-1| - 1}{x-1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - x - 2}{|x-2|}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x\sqrt{x^2+1}}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - x - 2}{|x-2|}$$

Actividad profundización

TALLER N.º 2

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 5x}{\text{sen } 7x}$$

b) Estudiar ejemplo del módulo página 164 #5

Actividad profundización

TALLER N.º 3

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} e^{\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)} = e$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} e^{\left(\frac{x^2-x-2}{x-2}\right)} = e^2$$

Actividad profundización

TALLER N.º 4

1. Muestre que en  $x=1$  la función  $\frac{x^3-1}{x-1}$  tiene una discontinuidad removible y redefinirla.

2. Estudiar los dos ejemplos de continuidad, página 242 del módulo.

LIMITES INFINITOS

Estudiaremos las funciones cuyos valores crecen o decrecen conforme a la variable independiente se acerca cada vez más a un número fijo.

Consideremos la función definida por

$$f(x) = \frac{3}{x^2}$$

- $f(x)$  crece sin límite conforme  $x$  tiende a 0 mediante valores mayores que 0, lo cual se escribe  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{x^2} = +\infty$
- $f(x)$  crece sin límite conforme  $x$  tiende a 0 mediante valores menores que 0, lo cual se escribe  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{x^2} = +\infty$
- $+\infty$  no es un símbolo para representar un número real; en consecuencia, se escribe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ , no tiene el mismo significado que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , donde  $L$  es un número real. En tal caso, el límite no existe, pero el símbolo  $+\infty$  indica el comportamiento de  $f$  cuando  $x$  se aproxima cada vez más a  $a$ .

### TALLER N.º 5

De manera análoga se puede indicar el comportamiento de la función  $f(x) = \frac{-3}{x^2}$ , los valores decrecen sin límite.

### TEOREMA

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^r} = +\infty$ <p><math>r</math> entero positivo</p>	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^4} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^r} = +\infty$ <p><math>r</math> entero positivo</p>	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^r} = +\infty$ <p><i>r entero positivo</i></p>	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^4} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$
--	--	--

**TEOREMA**

Sean  $a$  ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c = \text{constante} \neq 0$

*Ejemplo:*

*Calcular.*

i.  $c > 0$  y  $f(x) \rightarrow 0$  con valores positivos  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x^2 + 7}}{2x - 6} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x^2 + 7}}{2(x - 3)} = \frac{\sqrt{16}}{2(0) \rightarrow \text{con positivos}} = +\infty$$

ii.  $c > 0$  y  $f(x) \rightarrow 0$  con valores negativos,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$

*Calcular.*

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\sqrt{(4 - x)(4 + x)}}{-(x - 4)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\sqrt{(4 - x)(4 + x)} \sqrt{(4 - x)(4 + x)}}{-(4 - x)\sqrt{(4 - x)(4 + x)}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{(4 - x)(4 + x)}{-(4 - x)\sqrt{(4 - x)(4 + x)}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{(4 + x)}{-\sqrt{16 - x^2}} = \frac{8}{0} = -\infty$$

iii.  $c < 0$  y  $f(x) \rightarrow 0$  con valores positivos, enteros,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$

iv.  $c < 0$  y  $f(x) \rightarrow 0$  con valores negativos, enteros,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$

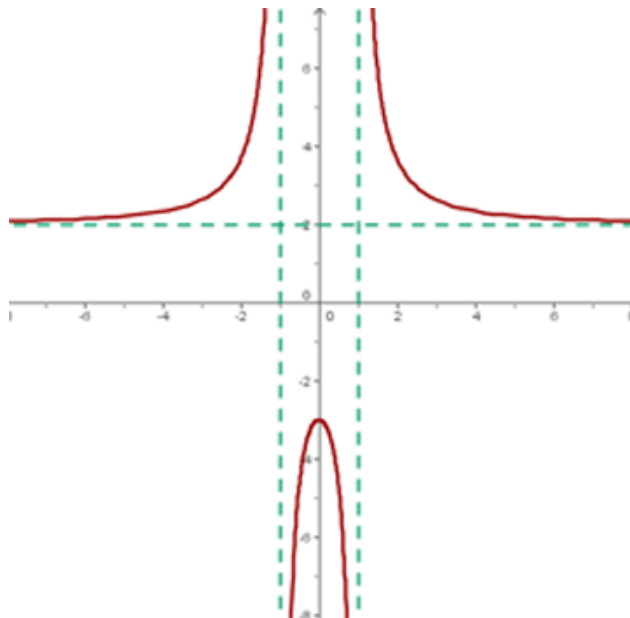
*Calcular.*

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2(x-1) - 4(x-1)}{(x-1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x^2 - 4)}{(x-1)(x-1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 4}{x-1} = \frac{1^2 - 4}{1-1} = \frac{-3}{-0} \rightarrow \text{con valores negativos} +\infty$$

## ASINTOTAS VERTICALES

La recta  $x=a$  es una asíntota vertical de la gráfica de la función  $f$  si al menos uno de los siguientes enunciados es verdadero



### Ejemplo

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3}{x-3} = \frac{3}{0} \rightarrow \text{Con positivos} = +\infty$$

$x = 3$  Asíntota vertical

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3}{x-3} = \frac{3}{0} \rightarrow \text{con negativos} = -\infty$$

$x = 3$  Asíntota vertical

### Operaciones con $\pm\infty$

$c \in \mathbb{R}$	$c \in \mathbb{R}$	$c > 0$	$c < 0$
$c + \infty = +\infty$	$c - \infty = -\infty$	$c \cdot (+\infty) = +\infty$	$c \cdot (+\infty) = -\infty$
$c > 0$	$c < 0$		
$c \cdot (-\infty) = -\infty$	$c \cdot (-\infty) = +\infty$		
$\frac{\infty}{\infty} = \text{indeterminado}$	$\infty - \infty = \text{indeterminado}$		

## LIMITES AL INFINITO

Estudiamos los límites infinitos donde los valores de la función crecían o decrecían su límite conforme la variable independiente se aproximaba a un número real. Ahora consideraremos límites de función cuando una variable independiente crece o decrece sin límite.

Consideraremos inicialmente la función  $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$

con sus tablas de algunos valores

$x$	$f(x)$	$x$	$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$
0	0	-1	0
1	1	-2	1.6
2	1.6	-3	1.8
3	1.8	-4	1.882353
4	1.882353	-100	
100		-1000	
1000			

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

## TEOREMA SEA $r \in \mathbb{Z}^+$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

## ASINTOTAS HORIZONTALES

La recta  $y = b$  es una asíntota horizontal de la gráfica

$y = f(x)$  si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$  o  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$