

Guía No 2	Calculo Diferencial	Grupo: 1	UNAD
-----------	---------------------	----------	------

Ciencias Básicas Tecnología e Ingeniería Facultad de

INTRODUCCIÓN A LÍMITES

Comenzamos con una idea intuitiva de una función con una interpretación gráfica.

Consideramos la función:

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$$

Observe que esta función no está definida cuando $x=1$; Esto es $f(x)$ no existe. Sin embargo la función está definida para cualquier otro número real. Se investigará los valores de la función cuando x aproxima a 1; pero sin llegar a ser 1.

Tabla de valores $f(x)$ cercanos a 1, pero menores que 1

x	0	0.25	0.5	0.75	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999
$F(x)$	3	3.5	4	4.5	4.8	4.98	4.998	4.9998	4.99998

Tabla de valores $f(x)$ cercanos a 1 pero mayores que 1

x	2	1.75	1.5	1.25	1.1	1.01	1.001	1.0001	1.00001
$F(x)$	7	6.5	6	5.5	5.2	5.02	5.025	5.0002	5.00002

Observe que la tabla conforme a x se aproxima cada vez más a 1, $f(x)$ se acerca más y más a 5.

$$\text{Cuando } x \rightarrow 1, \quad f(x) \rightarrow 5$$

Esto es $|f(x) - 5|$ puede hacerse tan pequeño como se desee haciendo $|x - 1|$ lo suficientemente pequeño. Pero tenga presente que x nunca es 1.

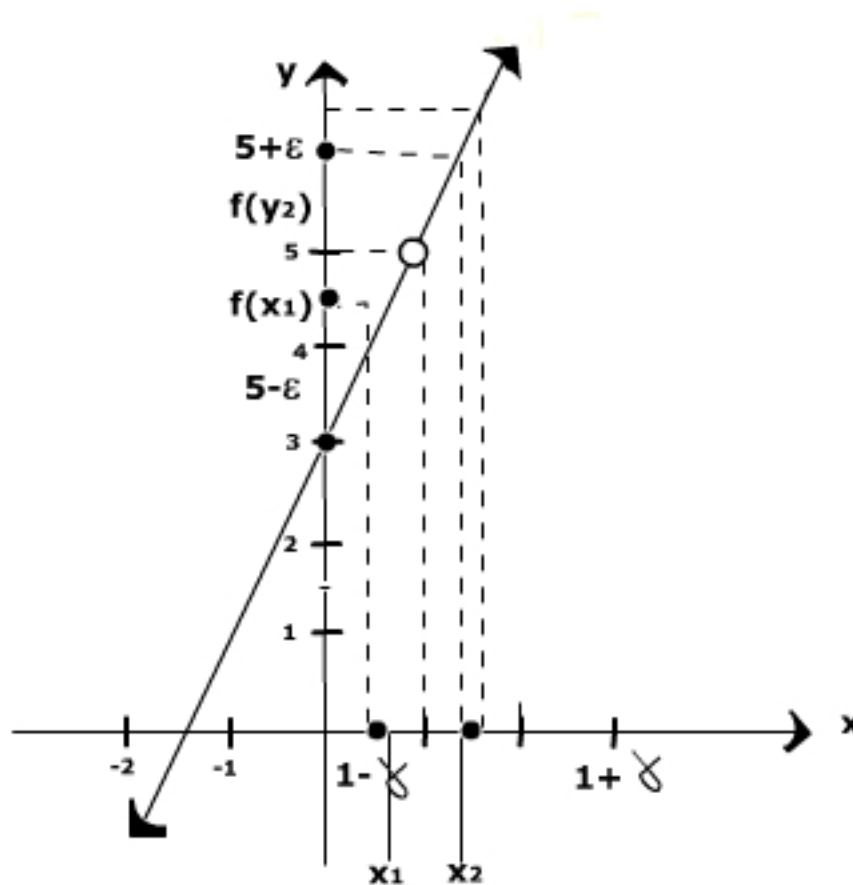
Esta condición puede escribirse en forma más precisa empleando dos símbolos para las diferencias pequeñas.

Los símbolos empleados usualmente son de letras griegas ε (épsilon) y δ (delta). De modo que se establece que para cualquier número ε existen un número δ positivo.

Seleccionada adecuadamente, tal que si $|x - 1|$ es menor que δ y $|x - 1| \neq 0$ o (esto es $x \neq 1$), entonces $|f(x) - 5|$ es menor que ε . Es importante señalar que primero se elige ε y que el valor δ depende del valor ε .

Otra forma de expresar esto es:

Para todo $\varepsilon > 0$, existen $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-1| < \delta$
entonces



Significado geométrico de ε y δ :

Los valores de ε se eligen arbitrariamente y pueden ser tan pequeño como se desee, y el valor de δ depende del valor elegido de ε .

Como para cualquier $\varepsilon > 0$ puede determinarse un $\delta > 0$ tal que la proposición:

Si $0 < |x-1| < \delta$ entonces $|f(x)-5| < \varepsilon$ se cumpla se establece que el límite $f(x)$ conforme x tiende a ser aproximada a 1, es igual a 5, o expresado con el símbolo:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$$

Observe que esta ecuación se tiene un nuevo uso del símbolo “igual”; aquí ningún valor de x hace que $f(x)$ tenga valor 5. El símbolo “igual” es apropiado debido a que el lado izquierdo está escrito como $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$

Ejemplo Sea $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$

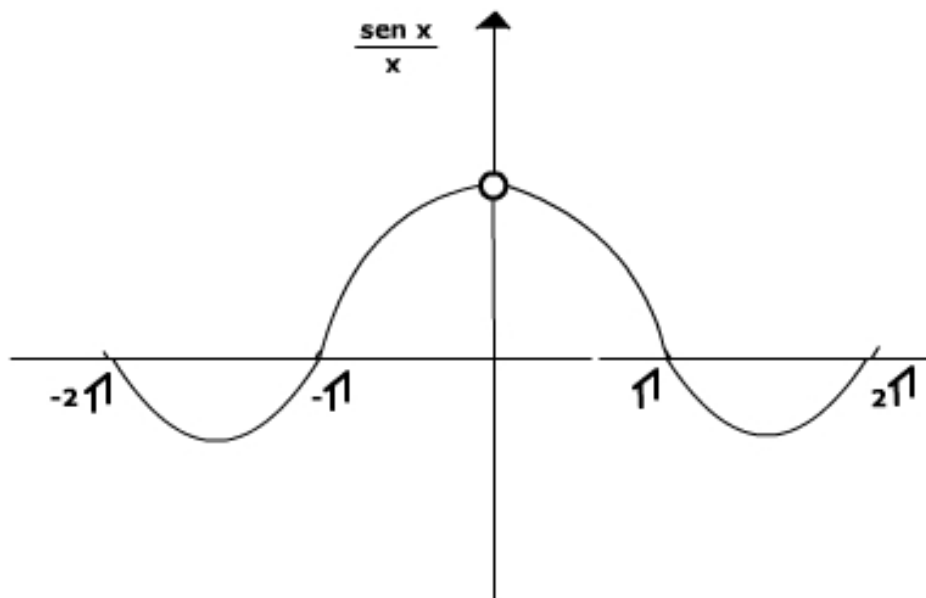


Tabla de valores cercanos a 0, pero mayores que 0.

x	1	0.5	0.1	0.01	0.001
$\frac{\text{sen}x}{x}$	0.84	0.95	0.999	0.9999	0.999998

Tabla de valores cercanos a 0, pero menores que 0.

x	-1	-0.5	-0.1	-0.01	-0.001
$\frac{\text{sen}x}{x}$	0.84	0.95	0.999	0.9999	0.999998

TEOREMAS SOBRE LÍMITES

Sea n un entero positivo c una constante, f y g funciones con límites en a . Entonces.

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c$$

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a$$

$$\lim_{x \rightarrow a} c f(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) * g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) * \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \text{ dado que } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}, \text{ dado que } \lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0 \text{ cuando } n \text{ es par}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

Ejemplo Calcular:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x^2 + 3}{x + 8}} = \sqrt{\frac{1^2 + 3}{1 + 8}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

Nota: $\frac{0}{0}$ indeterminado

Ejemplo Calcular:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} \text{ , no puede aplicarse el teorema del límite de}$$

un cociente, debido a que $\lim_{x \rightarrow 5} (x - 5) = 0$.

Sin embargo, al factorizar el numerador se obtiene

$$\frac{x^2 - 25}{x - 5} = \frac{(x - 5)(x + 5)}{x - 5}, \text{ como en el límite, se consideran los}$$

valores de x cercanos a 5, pero sin tomar este valor, es posible dividir el numerador y el denominador entre $x - 5$.

$$\text{Así } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x + 5)(x - 5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} x + 5 = 10$$

Ejemplo Calcular:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminado debido que } \lim_{x \rightarrow 4} x - 4 = 0. \text{ No se}$$

puede aplicar límite de un cociente.

Para simplificar el cociente

$$\frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4}$$

Ejemplo Calcular:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - x - 2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{2^2 + 2(2) + 4}{2 + 1} = \frac{12}{3} = 4$$

Ejemplo Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} * \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = 1^2 * \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} * \frac{1}{1 + \cos x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} * \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 1 * \frac{0}{1 + 1} = 1 * \frac{0}{2} = 1 * 0 = 0$$

LÍMITES LATERALES

Cuando una función salta como lo hace $\|x\|$ en cada entero el límite no existe en los puntos dados salta para todas las funciones, resulta natural introducir límites laterales.

El símbolo $x \rightarrow a^+$ significa que x se aproxima a a por la derecha y $x \rightarrow a^-$ significa que x se aproxima a a por la izquierda.

DEFINICIONES:

Decir que el $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$ significa que cuando x está cerca

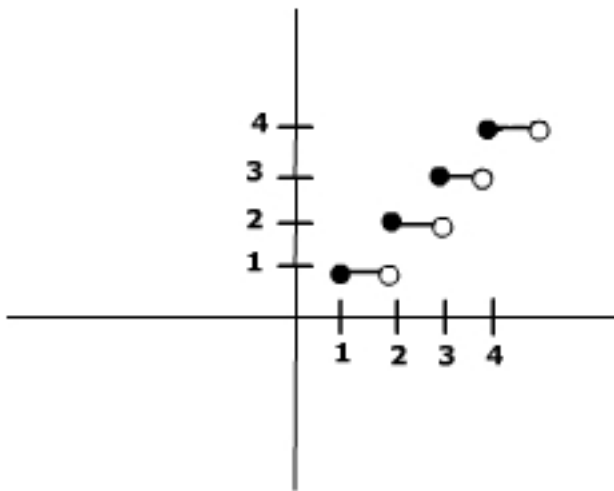
pero a la derecha de a , entonces $f(x)$ está cerca de L

Decir que el $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$ significa que cuando x está cerca

pero a la izquierda de a , entonces $f(x)$ está cerca de L

Ejemplo

Considere la función $f(x) = \|x\|$



$\lim_{x \rightarrow 2} \|x\|$ no existe pero $\lim_{x \rightarrow 2^-} \|x\| = 1$ y $\lim_{x \rightarrow 2^+} \|x\| = 2$

TEOREMA

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \text{ si y solo si } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l \text{ y } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$$

Ejemplo

Hallar el valor de a para que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ exista si } f(x) = \begin{cases} x^3 - 4, & x > 1 \\ 3ax + 2, & x \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{Debe ser que } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow -3 = 3a + 2 \Rightarrow a = -\frac{5}{3}$$

TALLER N.º 1

Calcular cada uno de los siguientes límites laterales, si existen.

$$\lim_{x \rightarrow 5} (3x - 7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x - 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x - 5}{5x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$$

$$\lim_{s \rightarrow 4} \frac{3s^2 - 8s - 16}{2s^2 - 9s + 4}$$

$$\lim_{y \rightarrow -2} \frac{y^3 + 8}{y + 2}$$

$$\lim_{r \rightarrow 1} \sqrt{\frac{8r + 1}{r + 3}}$$

$$\lim_{y \rightarrow -3} \sqrt{\frac{y^2 - 9}{2y^2 + 7y + 3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

$$\lim_{z \rightarrow 5} \frac{z^2 - 25}{z + 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{3x - 1}{9x^2 - 1}$$

$$\lim_{r \rightarrow 4} \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 4}{2x^2 - x - 1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

Nota

Este taller debe ser incluido dentro del portafolio el cual será revisado al final del semestre.