

Guía No 2	Álgebra Lineal	UNAD	Grupo: 1
-----------	----------------	------	----------

Escuela de Ciencias Básicas Tecnologías e Ingeniería

MATRICES

Una matriz de $m \times n$ es un arreglo rectangular de $m \times n$ números en forma de m renglones horizontales (filas) y n verticales (columnas).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{mj} \end{bmatrix} \quad j - \text{ésima columna}$$

El número a_{ij} es el (i,j) -ésimo elemento de A

$[a_{i1} \ a_{i2} \ a_{in}]$ i ésimo renglón.

Una matriz de $1 \times n$ se llama matriz renglón

Una matriz de $m \times 1$ se denomina matriz columna o vector.

Una matriz de $m \times n$ se llama cuadrada. (Tienen igual cantidades de renglones que de columnas)

Una matriz donde todos sus elementos son cero se llama **matriz cero**.

Ejemplo: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Matriz canónica: Tiene un uno en el lugar i,j y cero en el resto

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Sea una matriz cuadrada A cuyos elementos es a_{ij} su diagonal principal estará formada por a_{ii} . La matriz A triangular superior si todos sus elementos debajo de la diagonal principal son ceros. A

es triangular inferior si todos sus elementos arriba de la diagonal principal son ceros, A es diagonal si todos los elementos arriba y debajo de la diagonal principal son ceros. A es escalar si es diagonal y todos los elementos diagonales son iguales.

Matriz Identidad: Todos los elementos de la diagonal principal son 1 y los restantes son ceros.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

A, C y D son triangulares superiores. B, C y D son triangulares inferiores C y D son diagonales. La diagonal principal de A es 1,5,9, mientras que la de C es 1,-2,2

Operaciones con matrices

Matrices iguales

Dos matrices son iguales si tienen el mismo tamaño y sus elementos correspondientes son iguales.

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} x & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & y \end{bmatrix} \quad \text{sólo si } x=3 \text{ y } y=1$$

Ejemplo de matrices y multiplicación por escalar

La suma de $A+B$ de dos matrices A y B del mismo tamaño se obtiene sumando los elementos de ambas matrices.

Para la diferencia $A-B$ se restan los elementos correspondientes.

Nota

La matriz de distinto tamaño no se puede sumar ni restar.

Sea a cualquier matriz y c cualquier escalar. El producto por escalar cA , es la matriz que se obtiene al multiplicar cada elemento de A por c .

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \quad 5A = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 15 & 5 \\ 25 & 20 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

Ley para suma de matrices y multiplicación por escalar

Sean A, B, C y D matrices $m \times n$ cualesquiera, y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$1. (A+B)+C = A+(B+C)$$

$$2. A+B = B+A$$

$$3. A+0 = 0+A = A$$

$$4. A+(-A) = (-A)+A = 0$$

$$5. \alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$$

$$6. (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$$

$$7. (\alpha \beta)A = \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A)$$

$$8. 1A = A$$

Taller No 1

Verificar las ocho leyes anteriores con ejemplos

MULTIPLICACIONES DE MATRICES

Sea $A \in M_{m,n}$ $B \in M_{n,p}$, es decir número de columnas de A igual al mismo número de filas de B .

Definimos el producto $AB = C \in M_{m,p}$ esto es el resultado de una matriz que tiene el número de filas de A y el número de columnas de B .

Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ entonces los elementos de c_{ij} de C están dados por:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Ejemplo

Sea A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \text{ y } B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \quad AB = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Potencias enteras de una matriz

Sea A de orden n ($An \times n$), la propiedad asociativa del producto nos permite definir A^k siendo k un entero positivo

Así $A^k = A \cdot A \cdot A \cdot A \dots A$ (k veces)

$$A^1 = A$$

$A^0 = I$ donde I es la matriz identidad

$$I = (\delta_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \text{ es decir } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

La matriz identidad I conmuta con toda la matriz A , más exactamente

$$AI = IA = A \text{ con } I \text{ y } A \text{ del mismo orden.}$$

Actividades reconocimiento

Taller No 2

1.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ Calcular } B+C, AB, BA, AC \text{ y } (2B-3C)$$

Actividades de reconocimiento

Taller No 3

2. Hallar en cada caso a, b, c, d para que se satisfaga la ecuación dada

$$a) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 9 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Calcular en cada caso $AB-BA$

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & -5 & 11 \end{pmatrix}$$

Actividades de reconocimiento

Taller No 4

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ compruebe que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ compruebe que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calcule A^3 y A^4

OPERACIONES ELEMENTALES DE FILAS DE UNA MATRIZ

Las operaciones elementales de filas de una matriz implican lo siguiente:

Eliminación: Sume un múltiplo constante de una fila a otra fila
 $cF_i + F_j \rightarrow F_j$

Escalonamiento: Multiplique una fila por una constante distinta de cero
 $cF_i \rightarrow F_j$

Intercambio: Intercambiar dos filas $F_i \rightarrow F_j$

Las tres operaciones elementales citadas anteriormente sirven para hallar la forma escalón reducida de una matriz.

MATRIZ ESCALON REDUCIDA

Una matriz reducida es la forma escalón reducida si cumple las siguientes condiciones.

1. Todas las filas cero están en la parte inferior de la matriz.
2. El elemento delantero de cada fila no **cero** después del primero se presenta a la derecha del elemento delantero de la fila anterior.
3. El elemento delantero de cualquier fila no cero es 1.
4. Todos los elementos en la columna arriba y debajo de 1 delantero son ceros.

Ejemplo de matrices que están de la forma escalón reducida.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo de matrices que no están en la forma escalar reducida.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

MATRICES EQUIVALENTES

Dos matrices son equivalentes (de filas) si una puede obtenerse de la otra mediante una sucesión finita de operaciones elementales de filas. A veces se usa la notación.

$$A \sim B$$

Para indicar "la matriz A es equivalente a B"

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ son equivalentes porque}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad F_1 \leftrightarrow F_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F_1 + F_3 \rightarrow F_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad F_3 - F_2 \rightarrow F_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se dice que una matriz se convierte (o reduce) a la forma escalón reducida si es equivalente a una matriz en la forma escalón reducida.

Actividades de reconocimiento

Taller No 5

1. Verificar en cada caso que la matriz de la derecha es la matriz escalón reducida de la izquierda.

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determine la forma escalón reducida de cada matriz

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 5 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$c) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

INVERSA DE UNA MATRIZ

Matriz inversa: Se dice que la matriz de $n \times n$ es invertible o no singular. Si existe una matriz de \mathbb{B} , llamada la inversa de A tal que:

$$AB=I \text{ y } BA=I \quad B_{n \times n}$$

Ejemplo

Muestre que $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ es la inversa de $\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inversa de una matriz de dos por dos

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es invertible si y solo si $ad - bc \neq 0$. en cuyo caso

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Demuestre que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ es invertible y halle su inversa.

Solución

$$ad - bc = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2 \neq 0 \Rightarrow A \text{ tiene la inversa}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Demuestre que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ no es invertible

$ad - bc = 1 \times 0 - 0 \times 0 = 0$, la división entre cero no está definida por tanto A no es invertible.

Para determinar A^{-1} si existe hago lo siguiente;

1. Obtengo la forma escalón reducida de la matriz **[A:I]** digamos **[B:C]**
2. Si **B** tiene un renglón cero, deténgase. A no es invertible. De contrario pase a 3.
3. La matriz reducida se encuentra ahora en la forma **[I: A⁻¹]**. Anote la inversa de A^{-1}

Ejemplo

Calcule A^{-1} si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
[A:I] &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 & 3/4 & -5/4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 & -4 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 5 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 & -4 \end{pmatrix} \\
A^{-1} &= \begin{pmatrix} -2 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & -4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Actividades de reconocimiento

Taller No 6

1. Determinar la inversa de las siguientes matrices

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -10 & 20 \\ 20 & -40 \end{pmatrix}$

Actividades de reconocimiento

Taller No 7

1. Determinar la inversa de las siguientes matrices.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$