

| | | | |
|-----------|------------------|---------|------|
| Guía No 2 | Calculo Integral | Grupo 1 | UNAD |
|-----------|------------------|---------|------|

Escuela de Ciencias Básicas Tecnologías e Ingeniería

Métodos de Integración

- Integración por partes
- Funciones trigonométricas
- Sustitución trigonométricas
- Fracciones parciales
- Sustituciones especiales

Cuando la antiderivada (integral) de ciertas funciones no son inmediatas o no se pueden hallar por el método de cambio de variable (sustitución) anterior, debemos usar otros métodos.

Integración por partes

Tomemos dos funciones derivables $f(x)$, y , $g(x)$, hallamos la derivada del producto de las dos.

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

Despejemos $f(x) \cdot g'(x)$ tenemos.

$$f(x) \cdot g'(x) = \frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] - g(x) \cdot f'(x) \quad \text{integramos a ambos}$$

lados

$$\int f(x) \cdot g'(x) \, dx = \int \frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] \, dx - \int g(x) \cdot f'(x) \, dx$$

Si el concepto de integral esta bien claro sabemos que la integral de la derivada son operaciones inversas, es decir la integral de la derivada de una función es la función tenemos que.

$$\int \frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] \, dx = f(x) \cdot g(x)$$

Entonces

$$\int f(x) \cdot g'(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int g(x) \cdot f'(x) \, dx$$

Esta es una formula para integrar ciertas funciones que generalmente son el producto de dos funciones, como por ejemplo un polinomio por una trigonométrica, un polinomio por una exponencial, trigonométrica por logarítmica

Simplificando la formula anterior llegamos a la expresión que aparece en todos los libros de calculo.

Sea

$$u = f(x), \quad v = g(x) \quad \text{diferenciando tenemos}$$

$$du = f'(x) \, dx \quad dv = g'(x) \, dx \quad \text{reemplazando}$$

$$\text{Tenemos} \quad \int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du$$

Ejemplo

$$\int x e^x dx$$

Sí hacemos

$$u = x \quad du = dx$$

$$dv = e^x dx$$

$$\int dv = \int e^x dx, v = e^x$$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c$$

2.

$$\int x \sec^2 x dx$$

$$u = x, dv = \sec^2 x dx$$

$$du = dx, v = \int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x \Rightarrow$$

$$\int x \sec^2 x dx = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x dx$$

$$= x \operatorname{tg} x - \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx$$

$$= x \operatorname{tg} x - \ln|\sec x| + c$$

3.

$$\int e^x \cos x dx$$

$$u = \cos x, dv = e^x dx$$

$$du = -\operatorname{sen} x dx, v = e^x$$

$$\int e^x \cos x dx =$$

$$e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x dx \text{ de nuevo por partes}$$

$$e^x \cos x - x + \quad u = \operatorname{sen} x, dv = e^x dx$$

$$e^x \cos x - x + \quad du = \cos x, v = e^x$$

$$e^x \cos x + \left[e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x dx \right]$$

La nueva integral es la inicial, entonces la posamos al lado izquierdo efectuamos la suma y despejamos así:

$$2 \int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x \text{ o sea}$$

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x}{2} + c$$

Método Integración de Funciones Trigonométricas.

Debemos repasar identidades trigonométricas que se usan en este método son:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$$

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$$

$$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$$

$$1 + \cot^2 x = \operatorname{csc}^2 x$$

$$\operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{csc}^2 x - 1$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{\operatorname{csc} x}, \quad \cos x = \frac{1}{\sec x}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

Veamos primero las funciones trigonométricas que tienen antiderivada (integral) inmediata.

Ejercicios

1. $\int \cos x \, dx$, cual es la función que al derivarla da $\cos x$?

Es $\operatorname{sen} x$ entonces

$$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + c$$

$$\text{porque } \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x + c) = \cos x + 0 = \cos x$$

- $$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + c$$
2. $\frac{d}{dx}(-\cos x + c) = -(-\operatorname{sen} x) + 0 = \operatorname{sen} x$
3. $\int \sec^2 x \, dx = \operatorname{tg} x + c$
4. $\int \csc^2 x \, dx = -\operatorname{ctg} x + c$
5. $\int \sec x \operatorname{tg} x \, dx = \sec x + c$
6. $\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \operatorname{tg}^{-1} x + c$ recuerde que tg^{-1} se lee arcotangente x o inverso tangente x
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{sen}^{-1} x + c$
8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x + c$

Ahora veamos unas funciones trigonométricas que se pueden integrar por el método de cambio de variable

Ejercicio:

9. $\int \operatorname{sen} x \cdot \cos x \, dx$ $u = \operatorname{sen} x$
 $du = \cos x \, dx$

$$\int u \, du = \frac{u^2}{2} + c$$

10. $\int \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x \, dx$ $u = \operatorname{sen} x$
 $du = \cos x \, dx$

$$\int u^2 \, du = \frac{u^3}{3} + c \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + c$$

$$\int \text{sen}^3 x \cdot \cos x \, dx \quad u = \text{sen} x$$

$$11. \quad du = \cos x \, dx$$

$$\int u^3 \, du = \frac{u^4}{4} + c \Rightarrow \frac{\text{sen}^4 x}{4} + c$$

Podemos generalizar:

$$\int \text{sen}^n x \cdot \cos x \, dx = \frac{\text{sen}^{n+1} x}{n+1} + c$$

1. También cuando el coseno elevado a cualquier exponente esta multiplicado por sen sería:

$$\int \cos^5 x \cdot \text{sen} x \, dx ; \quad u = \cos x$$

$$du = -\text{sen} x \, dx$$

$$-\int u^5 \, du = -\frac{u^6}{6} + c \Rightarrow -\frac{\cos^6 x}{6} + c$$

Podemos generalizar:

$$\int \cos^n x \cdot \text{sen} x \, dx = \frac{-\cos^{n+1} x}{n+1} + c$$

Cuando la función seno esta elevada a cualquier potencia y la función coseno esta elevada a una potencia IMPAR procedemos así:

$$\int \text{sen}^5 x \cdot \cos^3 x \, dx = \int \text{sen}^5 x \cdot \cos^2 x \cos x \, dx$$

Nota: Rebajamos una unidad al exponente del coseno.

$$\int \text{sen}^5 x \cdot \cos^3 x \, dx = \int \text{sen}^5 x \cdot \cos^2 x \cos x \, dx ; \text{reemplazamos } \cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$$

$$\int \text{sen}^5 x (1 - \text{sen}^2 x) \cos x \, dx ; \text{suprimimos()}$$

$$\int \text{sen}^5 x \cos x \, dx - \int \text{sen}^7 x \cos x \, dx$$

$$\frac{\text{sen}^6 x}{6} - \frac{\text{sen}^8 x}{8} + c$$

Cuando la función coseno esta elevado a cualquier potencia y la función seno esta elevada a una potencia IMPAR procedemos así:

14.

$$\int \cos^4 x \cdot \text{sen}^5 x \, dx$$

Nota: Rebajamos una unidad al exponente del seno.

$$\int \cos^4 x \cdot \text{sen}^4 x \text{ sen} x \, dx \text{ reemplazamos } \text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$$

y elevamos al cuadrado porque tenemos $\text{sen}^4 x$

$$\int \cos^4 x (1 - \cos^2 x)^2 \text{ sen} x \, dx \text{ efectuamos el cuadrado}$$

$$\int \cos^4 x (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \text{ sen} x \, dx \text{ suprimimos()}$$

$$\int \cos^4 x \text{ sen} x \, dx - 2 \int \cos^6 x \text{ sen} x \, dx + \int \cos^8 x \text{ sen} x \, dx$$

$$\frac{-\cos^5 x}{5} - 2 \left(\frac{-\cos^7 x}{7} \right) - \cos c$$

Cuando la función seno o coseno esta elevado a una PAR usamos la IDENTIDAD DE ANGULOS DOBLES.

$$\left(\text{sen}^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \quad \text{o} \quad \text{cos}^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \right)$$

15

$\int \text{sen}^2 x \, dx$ usamos la identidad

$\int \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx$ sacamos $\frac{1}{2}$ de integral y suprimimos ()

$\frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos(2x) dx$, la integral de dx es inmediata

$\frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos(2x) dx$, la integral de dx es inmediata y la de $\cos(2x)$ es $\frac{\text{sen}(2x)}{2}$

$$\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \text{sen}(2x) + c$$

Vamos a la integrales de funciones tangente, cotangente, secante y cosecante.

$\int \text{tg} x \, dx$, usamos la identidad $\text{tg} x = \frac{\text{sen} x}{\text{cos} x}$

$\int \frac{\text{sen} x}{\text{cos} x} dx$, hacemos cambio de variable

$$u = \text{cos} x$$

$$du = -\text{sen} x \, dx$$

16. $-\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + c \Rightarrow -\ln|\text{cos} x| + c$

tambien se puede escribir como

$$-\int \frac{du}{u} = \ln|\text{cos}^{-1}| + c$$

$$\ln\left|\frac{1}{\text{cos} x}\right| + c \Rightarrow \ln|\text{sec} x| + c$$

Usando una de las propiedades de los logaritmos

$$\ln x^n = n \ln x$$

17.

$$\int \operatorname{tg}^2 x \, dx \quad \text{usamos la identidad } \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$$
$$\int (\sec^2 x - 1) \, dx = \int \sec^2 x \, dx - \int dx = \operatorname{tg} x - x + c$$

18.

$$\int \operatorname{tg} x \sec^2 x \, dx$$

$$u = \operatorname{tg} x$$

$$du = \sec^2 x \, dx$$

$$\int u \, du = \frac{u^2}{2} + c \Rightarrow \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + c$$

19.

$$\int \operatorname{tg}^5 x \cdot \sec^2 x \, dx$$

$$u = \operatorname{tg} x$$

$$du = \sec^2 x \, dx$$

$$\int u^5 \, du = \frac{u^6}{6} + c \Rightarrow \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} + c$$

20.

$$\int \operatorname{tg}^{\frac{2}{3}} x \sec^2 x \, dx$$

$$u = \operatorname{tg} x$$

$$du = \sec^2 x \, dx$$

$$\int u^{\frac{2}{3}} \, du = \frac{3}{5} u^{\frac{5}{3}} + c = \frac{3}{5} \operatorname{tg}^{\frac{5}{3}} x + c$$

Cuando tangente esta elevada a cualquier potencia multiplicada por secante elevada a una potencia PAR.

21.

$\int \operatorname{tg}^3 x \sec^4 x \, dx$, rebajamos dos unidades al exponente de la secante.

$$\int \operatorname{tg}^3 x \sec^4 x \, dx$$

Tangente y secante con exponentes IMPARES

22.

$\int \operatorname{tg}^3 x \sec^3 x \, dx$ rebajamos una unidad a ambos exponentes

$\int \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x \operatorname{tg} x \sec x \, dx$ usamos $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$

$\int (\sec^2 x - 1) \sec^2 x \operatorname{tg} x \sec x \, dx$

$\int \sec^4 x \operatorname{tg} x \sec x - \int \sec^2 x \operatorname{tg} x \sec x \, dx$

$$u = \sec x$$

$$du = \sec x \operatorname{tg} x \, dx$$

$$\int u^4 \, du - \int u^2 \, du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + c$$

$$\frac{\sec^5 x}{5} - \frac{\sec^3 x}{3} + c$$

Secante elevada e una potencia PAR

23.

$$\begin{aligned} \int \sec^4 x \, dx & \text{ rebajamos dos unidades al exponente} \\ \int \sec^2 x \sec^2 x \, dx & \text{ usamos la identidad } \sec^2 x = \tan^2 x + 1 \\ \int (\tan^2 x + 1) \sec^2 x \, dx \\ \int \tan^2 x \sec^2 x \, dx + \int \sec^2 x \, dx \\ \frac{\tan^3 x}{3} + \tan x + c \end{aligned}$$

Secante elevado e una potencia IMPAR

24

$$\begin{aligned} \int \sec^3 x \, dx &= \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x \, dx \\ &= \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x \, dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec^3 x \, dx + \ln|\sec x + \tan x| \\ 2 \int \sec^3 x \, dx &= \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| + c \\ \int \sec^3 x \, dx &= \frac{\sec x \tan x}{2} + \frac{\ln|\sec x + \tan x|}{2} + c \end{aligned}$$

Artificio matemático para

$$\begin{aligned} \int \sec x \, dx &= \int \frac{\sec x (\sec x + \tan x) dx}{\sec x \tan x} \\ &= \int \left(\frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \sec x \, dx &= \int \frac{\sec x (\sec x + \tan x) dx}{\sec x \tan x} \\ &= \int \left(\frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} \right) dx \end{aligned}$$

$$u = \sec x + \operatorname{tg} x$$

$$du = (\sec x + \operatorname{tg} x + \sec^2 x) dx$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + c$$

MÉTODO POR SUSTITUCION

TRIGONOMETRICA

Este es un método basado en cambios de variables especiales con funciones trigonométricas, se presentan tres casos:

CASO I

Cuando se presentan integrandos con radicales

$\sqrt{a^2 - b^2}$, se hace $x = a \operatorname{sen} \theta$

$$dx = a \cos \theta d\theta$$

25.

$\int \sqrt{4 - x^2} dx$, se hace $x = 2 \operatorname{sen} \theta$

$$dx = 2 \cos \theta d\theta$$

$$\int \frac{\sqrt{4 - 4 \operatorname{sen}^2 \theta} 2 \cos \theta d\theta}{4 \operatorname{sen}^2 \theta} =$$

$$\int \frac{\sqrt{4(1 - \operatorname{sen}^2 \theta)} \cos \theta d\theta}{2 \operatorname{sen}^2 \theta} =$$

$$\int \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta} \cos \theta d\theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} = \int \frac{\sqrt{\cos^2 \theta} \cos \theta d\theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} =$$

$$\int \frac{\cos^2 \theta d\theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} = \int \operatorname{ctg}^2 \theta d\theta = \int (\operatorname{csc}^2 \theta - 1) d\theta = -\cot \theta - \theta$$

Debemos escribir la respuesta en función de x para la cual usamos un triángulo rectángulo cuyos elementos se obtienen así:

En este triángulo hallamos

$$\operatorname{cog}\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$

$$\operatorname{ctg}\theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

también hallamos el ángulo θ de

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{2} \Rightarrow \theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$$

La respuesta queda así:

$$-\sqrt{\frac{4-x^2}{x}} - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

CASO II

Cuando se tienen integrales con un radical de la forma

$\sqrt{a^2+x^2}$ el cambio de variable es

$$x = a \operatorname{tg}\theta, \quad dx = a \operatorname{sec}^2\theta \, d\theta$$

26.

$$\int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 + 9}} \quad x = 3 \operatorname{tg} \theta$$

$$dx = 3 \sec^2 \theta \, d\theta$$

reemplazamos en la integral

$$\int \frac{3 \operatorname{tg} \theta \cdot 3 \sec^2 \theta}{9 \operatorname{tg}^2 \theta + 9} = 9 \int \frac{\operatorname{tg} \theta \sec^2 \theta \, d\theta}{\sqrt{9(\operatorname{tg}^2 \theta + 1)}}$$

$$9 \int \frac{\operatorname{tg} \theta \sec^2 \theta \, d\theta}{\sqrt{9 \sec^2 \theta}} = \frac{9}{3} \int \frac{\operatorname{tg} \theta \sec^2 \theta \, d\theta}{\sec \theta}$$

$$3 \int \operatorname{tg} \theta \sec \theta \, d\theta = 3 \sec \theta + c$$

Despejamos

$$\operatorname{tg} \theta \text{ en } x = 3 \operatorname{tg} \theta \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = \frac{x}{3} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

En este triángulo rectángulo

$$\operatorname{tg} \theta \text{ en } x = 3 \operatorname{tg} \theta \Rightarrow \sec \theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\frac{\sqrt{9 + x^2}}{3} = 3 \sec \theta + c = \frac{3\sqrt{9 + x^2}}{3} + c = \sqrt{9 + x^2} + c$$

CASO III

Cuando se tienen integrales con radicales de la forma

$\sqrt{x^2 - a^2}$ el cambio de variable

$$x = a \sec \theta$$

$$dx = a \sec \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta$$

27.

$$\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2 - 3}} \text{ como la constante } a^2 \text{ es } 3 \Rightarrow a = \sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{3} \sec \theta$$

$$dx = \sqrt{3} \sec \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta$$

$$\int \frac{\sqrt{3} \sec \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta}{(\sqrt{3})^4 \sec^4 \theta \sqrt{3 \sec^2 \theta - 3}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{9} \int \frac{\sec \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta}{\sec^4 \theta \sqrt{3(\sec^2 \theta - 1)}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{9} \int \frac{\sec \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta}{\sec^4 \theta \sqrt{3} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \theta}} \quad \frac{1}{9} \int \frac{\sec \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta}{\sec^4 \theta \operatorname{tg} \theta}$$

$$\frac{1}{9} \int \frac{d\theta}{\sec^3 \theta} = \frac{1}{9} \int \cos^3 \theta \, d\theta = \frac{1}{9} \int \cos^2 \theta \cos \theta \, d\theta$$

$$\frac{1}{9} \int (1 - \operatorname{sen}^2 \theta) \cos \theta \, d\theta = \frac{1}{9} \int \cos \theta \, d\theta$$

$$\frac{1}{9} \int \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta \, d\theta$$

$$\frac{1}{9} \operatorname{sen} \theta - \frac{1}{9} \frac{\operatorname{sen}^3 \theta}{3} + c$$

$$\frac{1}{9} \operatorname{sen} \theta - \frac{1}{27} \operatorname{sen}^3 \theta + c$$

como

$$x = \sqrt{3} \sec \theta \Rightarrow \sec \theta = \frac{x}{\sqrt{3}} \quad \begin{array}{l} \text{hipotenusa} \\ \text{adyacente} \end{array}$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{x} \text{ la respuesta queda}$$

$$-\frac{1}{9} \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{x} - \frac{1}{9} \left(\frac{\sqrt{x^2 - 3}}{x} \right)^3 + c$$

$$-\frac{1}{9} \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{x} - \frac{1}{9} \frac{(x^2 - 3)\sqrt{x^2 - 3}}{x^3} + c$$