

Guía No 1	Algebra y Trigonometría	Grupo: 1	UNAD
-----------	-------------------------	----------	------

Escuela de Ciencias Básicas Tecnologías e Ingeniería

Algebra Trigonometría y Geometría Analítica

ECUACIONES DE PRIMER GRADO EN UNA VARIABLE

Ecuación

Una ecuación es la afirmación simbólica de una igualdad.

Nuestro objetivo es determinar la solución de una ecuación dada. Por solución entendemos el valor o valores de la variable que hacen verdadera a la proposición algebraica.

Definición

Una ecuación de primer grado en una variable, es una ecuación que se puede escribir de la forma $ax+b=0$, donde a y b son constantes y $a \neq 0$.

En otras palabras, una ecuación de primer grado es una ecuación en la que el máximo grado de la variable es 1.

Ejemplo 1

Resuélvase:

$$2x-4=0$$

$$2x=4$$

$$x=4/2$$

$$x=2$$

Ejemplo 2

Resuélvase

$$\frac{3x}{x-2} = 1 + \frac{6}{x-2}$$

$$\frac{3x}{x-2} = \frac{x-2+6}{x-2}$$

$$\frac{3x}{x-2} = \frac{x+4}{x-2}$$

$$3x = x + 4$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

Como $x=2$ anula el denominador, no sirve como solución. Tenemos entonces que el conjunto solución es el conjunto vacío.

Problema

Un niño tiene 40 monedas que consisten en monedas de uno y cinco centavos. Si la cantidad total es 72 centavos, ¿Cuántas monedas de cada tipo tiene?

Solución

Monedas de 1: x

Monedas de 5: $40-x$

Ecuación

$$1x + 5(40-x) = 72$$

$$x + 200 - 5x = 72$$

$$-4x = 72 - 200$$

$$-4x = -128$$

$$x = -128 / -4$$

$$x = 32$$

Monedas de un centavo: 32

Monedas de cinco centavos: $40 - 32 = 8$

Prueba

$$1 \cdot 32 + 5 \cdot 8 = 32 + 40 = 72$$

Actividad de reconocimiento

Taller N° 1

1. Despejar x

a) $820x = 10x + 30(50 - x)$

b) $\frac{3}{x-1} + 5 = \frac{4-x}{x-1}$

c) $\frac{8}{x-5} - \frac{5}{x+3} = \frac{3x+49}{x^2-2x-15}$

d) $\frac{2}{x+3} + 4 = \frac{5-x}{x+3}$

e) $\frac{6}{x^2-3x} = \frac{12}{x} + \frac{1}{x-3}$

f) $\frac{3}{3x-4} + \frac{5}{9x^2-16} = \frac{4}{3x+4}$

g) $\frac{6}{3x+5} - \frac{2}{x-4} = \frac{10}{3x^2-7x-20}$

h) $\frac{7}{x-1} + 4 = \frac{a+6}{a-1}$

2. Encuéntrese tres números pares consecutivos cuya suma es 234

ECUACIONES CUADRATICAS

Una ecuación de segundo grado es una ecuación polinomial en la que el máximo grado de la variable es 2. En particular, una ecuación de segundo grado de una sola variable recibe el nombre de ecuación cuadrática.

Definición

La forma canónica de una ecuación cuadrática es:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{donde } a \neq 0$$

Importante.

$$\text{Si } ab = 0, \text{ entonces } a = 0 \text{ o } b = 0$$

Como en todas las ecuaciones, las soluciones de las ecuaciones cuadráticas son valores de la variable que hacen que la ecuación sea una proposición verdadera.

Las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$ también se llaman las raíces de la ecuación polinomial $ax^2 + bx + c = 0$.

Métodos de solución

Factorizando

Ejemplo

$$\text{Resolver } x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 3)(x - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 3 = 0 \text{ o } x - 2 = 0$$

$$x = 3 \text{ o } x = 2$$

Ejemplo

$$\text{Resolver } 2x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$\frac{2(2x^2 + 5x - 3)}{2} = 0$$

$$\frac{(2x)^2 + 5(2x) - 6}{2} = 0$$

$$\frac{(2x + 6)(2x - 1)}{2} = 0$$

$$(x + 3)(2x - 1) = 0$$

$$x + 3 = 0 \quad \vee \quad 2x - 1 = 0$$

$$x = -3 \quad \vee \quad x = 1/2$$

La formula cuadrática

si $ax^2 + bx + c = 0$ y $a \neq 0$, entonces

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dada una ecuación de la forma anterior, las soluciones pueden determinarse sustituyendo los coeficientes a, b, c en la formula cuadrática.

Ejemplo

Resolver $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$a=1 \quad b=-5 \quad c=6$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(6)}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Entonces las soluciones son:

$$\left\{ \frac{5+1}{2}, \frac{5-1}{2} \right\}$$

$$\{3, 2\}$$

Nota

$b^2 - 4ac$ Recibe el nombre de discriminante de la ecuación cuadrática. Puede usarse para determinar la naturaleza de las raíces de la ecuación.

Específicamente,

- Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene una raíz doble
- Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales y diferentes
- Si $b^2 - 4ac < 0$ la ecuación no tiene soluciones reales.
las soluciones son complejas (conjugadas).

Ejemplo

Resolver $2x^2 + x + 1 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{4} = \frac{-1}{4} \pm \frac{\sqrt{7}i}{4}$$

$$x_1 = \frac{-1}{4} + \frac{\sqrt{7}i}{4}$$

$$x_2 = \frac{-1}{4} - \frac{\sqrt{7}i}{4}$$

Actividad de reconocimiento

Taller N° 2

Resolver.

1. Por factorización

- ❖ $2x^2 - x - 3 = 0$
- ❖ $3x^2 - 10x - 8 = 0$
- ❖ $4a^2 = 4a - 1$
- ❖ $x^2 - 2x + 1 = 0$
- ❖ $16y^2 + 24y + 9 = 0$

2. Con la formula general

- ❖ $4x^2 + x - 3 = 0$
- ❖ $2x^2 - 6x + 3 = 0$
- ❖ $2x^2 + 2x + 8 = 0$
- ❖ $3x^2 - 2x + 1$

$$\diamond \quad x^2 - 4x - 1$$

Completar cuadrado

Ecuación cuadrática: $ax^2 + bx + c = 0$

Como obtener las soluciones: $ax^2 + bx = -c$

$$ax^2 + bx = -c$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a}$$

Completar cuadrado

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -c + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -c + \frac{b^2}{4a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo

Resolver completando cuadrado.

$$2x^2 - x - 3 = 0$$

$$2\left(x^2 - \frac{x}{2}\right) - 3 = 0$$

$$2\left(x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16}\right) = 3 + 2\left(\frac{1}{16}\right)$$

$$2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = 3 + \frac{1}{8}$$

$$2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{25}{8}$$

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$$

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{4} - \frac{5}{4}\right)\left(x - \frac{1}{4} + \frac{5}{4}\right) = 0$$

$$\left(x - \frac{6}{4}\right)(x + 1)$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$x = -1$$

Actividad de profundización

Taller N° 3

Resolver completando cuadrado.

1. $2x^2 - x - 3 = 0$
2. $3x^2 - 10x - 8 = 0$
3. $4a^2 = 4a - 1$
4. $x^2 - 2x + 1 = 0$
5. $16y^2 + 24y + 9 = 0$

Ecuaciones con Radicales

En el proceso de solución de ecuaciones con radicales se requiere elevar a cierta potencia los miembros de una igualdad y en este proceso pueden introducirse raíces extrañas. (Raíces en la ecuación final que no lo son de la ecuación original). Por tanto, los valores de x encontrados deben probarse en la ecuación original.

Ejemplo

Resolver para x.

$$\sqrt{x+7} + x = 13$$

$$\sqrt{x+7} = 13 - x$$

$$(\sqrt{x+7})^2 = (13 - x)^2$$

$$x + 7 = 169 - 26x + x^2$$

$$x^2 - 26x + 169 - x - 7 = 0$$

$$x^2 - 27x + 162 = 0$$

$$(x - 18)(x - 9) = 0$$

$$x - 18 = 0 \quad \text{o} \quad x - 9 = 0$$

$$x = 18 \qquad x = 9$$

Prueba

($x=9$)

$$\sqrt{9+7} = 13-9$$

$$\sqrt{16} = 4$$

$$4 = 4$$

Sirve $x=9$ (es solución)

Actividad de reconocimiento

Taller N° 4

Resolver para x .

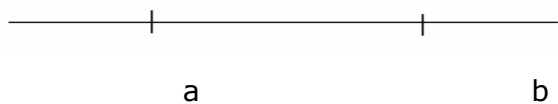
1. $\sqrt{x^2+2} - x = 1$

2. $\sqrt{x+1} = \sqrt{x-1} + 1$

3. $x + \sqrt{x-2} = 2$

DESIGUALDADES ELEMENTALES DE UNA VARIABLE

La posición relativa de dos puntos sobre una recta numérica, se usa para definir una relación de desigualdad en el conjunto de los números reales. Se dice que a es menor que b , y se escribe $a < b$, cuando el número real a está situado a la izquierda del número real b en la recta numérica. Esto equivale a decir que b es mayor que a , lo que se escribe $b > a$, como se muestra en la figura.



$a < b$ ó $b > a$

La notación $a \leq b$, o $b \geq a$, se usa para expresar que a es menor o igual que b .

NOTACION DE INTERVALOS

Si a y b son reales y $a < b$, se denomina INTERVALO al conjunto de los reales entre a y b (incluyendo posiblemente a a y posiblemente a b).

Existen cuatro tipos de intervalos.

INTERVALO CERRADO, denotado $[a, b]$

INTERVALO ABIERTO, denotado (a, b)

INTERVALO SEMIABIERTO (O SEMICERRADO), denotado $(a, b]$ en un caso $[a, b)$ y en otro.

Definiciones

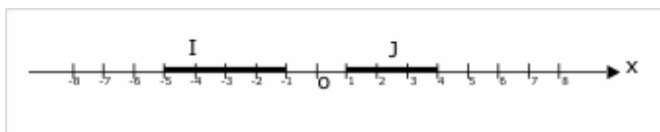
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

Los intervalos pueden representarse en la recta real:



En la figura se destacan los intervalos I y J:

$$I = [-5, -1] \quad ; \quad J = [1, 4]$$

Existen además los intervalos infinitos. Si a y b son reales, entonces:

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$$

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$$

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} / x < b\}$$

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq b\}$$

$$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

Nótese que estos cinco intervalos no tienen longitud finita.

Propiedades de las desigualdades:

- i) Para a, b, c solamente puede cumplirse una opción de las siguientes $a < b$, $b < a$, $a = b$.
- ii) Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$.
- iii) Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$.
- iv) Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $ac < bc$.

Ejemplo:

Determine todos los números reales que satisfacen $2x - 1 < 4x + 3$

$$2x - 1 < 4x + 3$$

$$-1 - 3 < 4x - 2x$$

$$-4 < 2x$$

$$-4/2 < x$$

$$-2 < x \text{ o } x > -2$$



Ejemplo:

Determine todos los números reales x que satisfacen $-1 < 2x + 3 \leq 5$

Solución:

Esta relación de desigualdad es una forma compacta de expresar las relaciones.

$$\text{a) } -1 < 2x + 3$$

$$-1 - 3 < 2x$$

$$-4 < 2x$$

$$-2 < x$$

$$\text{b) } 2x + 3 \leq 5$$

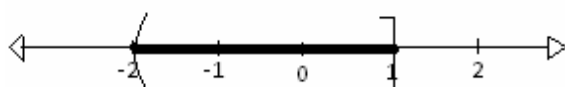
$$2x \leq 5 - 3$$

$$2x \leq 2$$

$$x \leq 1$$

Este último conjunto de desigualdades se puede expresar en la forma compacta

$$-2 < x \leq 1.$$

**Actividad de reconocimiento****TALLER No 5**

Emplee la notación de intervalos para expresar los valores de x que satisfacen las desigualdades.

1. $x + 4 < 7$

2. $x - 4 < 9$

3. $2x - 2 \geq 8$

4. $3x + 2 \geq 8$

5. $-3x + 4 < 5$

6. $-2x - 3 \geq 7$

7. $2x+9\leq 5+x$

8. $-3x-2<3-x$

VALOR ABSOLUTO

IGUALDADES Y DESIGUALDADES CON VALOR ABSOLUTO

VALOR ABSOLUTO:

El valor absoluto de un número real x , que se denota $|x|$ es la distancia en la recta numérica, del número real x al número 0. Se define como sigue:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Un número y su negativo tienen el mismo valor absoluto.

Por ejemplo, $|2| = 2$ y $|-2| = -(-2) = 2$

Ejemplo:

Determine todos los valores de x para los cuales:

$$\left| \frac{x-2}{2x+1} \right| = 3$$

Solución:

Necesitamos determinar todos los valores de x que satisfagan:

$$\frac{x-2}{2x+1} = 3$$

o

$$\frac{x-2}{2x+1} = -3$$

$$x-2 = 3(2x+1)$$

$$x-2 = -3(2x+1)$$

$$x-2 = 6x+3$$

$$x-2 = -6x-3$$

$$-2-3 = 6x-x$$

$$x+6x = -3+2$$

$$-5 = 5x$$

$$7x = -1$$

$$x = 5/-5$$

$$x = -1/7$$

$$x = -1$$

Ya que para todo número real x se cumple que $|x| = |-x|$, el valor absoluto de un número es una medida de su distancia al 0.

PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO:

DESIGUALDADES CUADRATICAS Y RACIONALES

Ejemplo:

Resolver la desigualdad $x^2 - 4x + 3 > 0$

Solución:

Iniciamos factorizando el lado izquierdo:

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1).$$

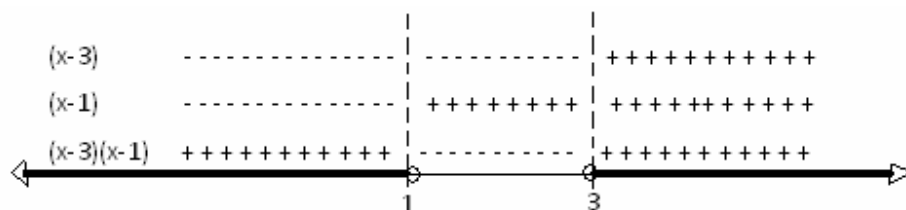
$$\text{Entonces } (x - 3)(x - 1) > 0$$

Elaboramos una gráfica de signos a la tabla de signos de la desigualdad

$$(x - 3)(x - 1) > 0.$$

Se usa para determinar donde es positiva y donde es negativa la desigualdad.

Para trazar la gráfica de signos primero se determina donde es igual a 0 cada uno de los factores, en este caso es en $x = 3$ y $x = 1$. El factor lineal $x - 3$ es positivo a la derecha de 3 y negativo a la izquierda. En forma similar el factor $x - 1$ es positivo a la derecha de 1 y negativo a la izquierda.



El producto $(x - 3)(x - 1)$ es positivo cuando ambos factores tienen el mismo signo, y negativo cuando sus signos son distintos. Así,

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1) > 0$$

Solamente cuando $x < 1$ o $x > 3$. O sea que el conjunto solución S es:

$$S = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty).$$

Ejemplo:

Determine los valores de x para los que: $(5-x)(x-1)(x-3) \leq 0$

Solución:

El factor $5-x$ es positivo si $x < 5$. Los demás factores son los mismos del ejemplo anterior y la tabla de signos es:

$(5-x)$	+++++	+++++	+++++	-----
$(x-1)$	-----	+++++	+++++	+++++
$(x-3)$	-----	-----	+++++	+++++
$(5-x)(x-1)(x-3)$	+++++	-----	+++++	-----



$$S = [1, 3] \cup [5, +\infty)$$

Ejemplo:

Determine todos los valores de x para los que:

$$\frac{x^2 - 1}{x(2 - x)} \geq 0$$

Solución:

$$\frac{x^2 - 1}{x(2 - x)} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x(2 - x)}$$

Este cociente es cero cuando el numerador $x^2 - 1 = 0$, y esto sucede cuando $x=1$ o $x=-1$. El cociente es indefinido cuando el denominador es 0, lo cual ocurre cuando $x=0$ o $x=2$.

$(x-1)$	-----	-----	-----	+++++	+++++
$(x+1)$	-----	+++++	+++++	+++++	+++++
(x)	-----	-----	+++++	+++++	+++++
$(2-x)$	+++++	+++++	+++++	+++++	-----
$(x+1)(x-1)$	-----	+++++	-----	+++++	-----
$x(2-x)$					
	-1	0	1	2	

$$S = [-1, 0) \cup [1, 2)$$

Actividad de reconocimiento

TALLER No. 6

Resolver las desigualdades siguientes:

1. $x^2 - 3x + 2 \leq 0$
2. $(x-1)(x-2)(x+1) \leq 0$
3. $x^3 - 2x^2 - 3x < 0$
4. $\frac{x+2}{x-1} \geq 0$
5. $\frac{x-2}{x+1} \geq 0$