

Guía No 1	Calculo Diferencial	Grupo: 1	unad
-----------	---------------------	----------	------

Ciencias Básicas Tecnología e Ingeniería Facultad de

SUCESIONES DE NUMEROS REALES

una sucesión infinita (o sucesión) de números es una función cuyo dominio es el conjunto de enteros mayores o iguales que un entero n_0 .

En general, n_0 es 1 y el dominio de la sucesión es el conjunto de los enteros positivos.

Notación:

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \rightarrow f(n)$$

$$f(n) = a_n$$

Algunos ejemplos de sucesiones:

1. $f(n) = a_n = \frac{1}{n}$ Otra forma de escribir esta sucesión

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\}$$

2. $f(n) = \sqrt{n}$

3. $f(n) = (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n} \right)$

La mayoría de las reglas usuales para el cálculo de límite de funciones de una variable real son aplicables a los límites de sucesiones, como se enuncia en el siguiente resultado.

TEOREMA.

Si las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son convergentes, entonces.

$$i. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$ii. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$iii. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$iv. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \left(\text{supuesto que } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0 \right)$$

Propiedades Importantes

Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = L$

Lo anterior permite aplicar reglas de límites de funciones reales de variable real, a límites de sucesiones.

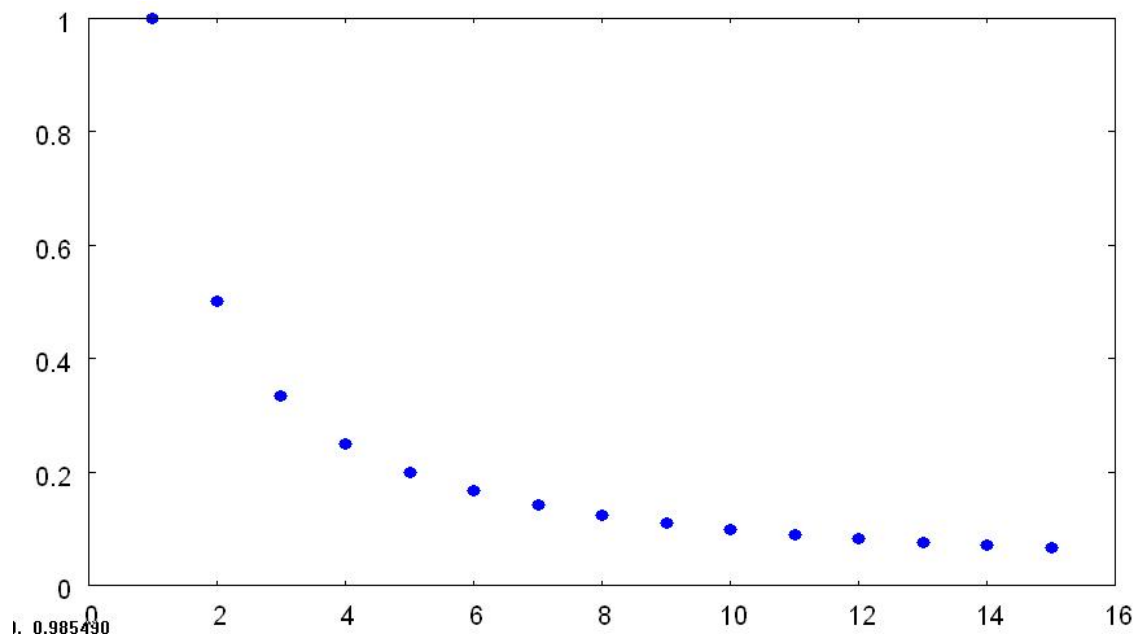
EJEMPLOS DE SUCESIONES

Ejemplo 1

$$a_n = \frac{1}{n}$$

Los 15 primeros términos de la sucesión:

$1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1$
 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \frac{1}{15}$
 $2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15$



Observando la grafica parece que la sucesión converge a cero.

Verifiquemos que el limite si es igual a cero $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ (Recuerde que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$)

Observando la gráfica parece que la sucesión es decreciente.

Definición: Una sucesión $\{a_n\}$ es decreciente si:

$$a_n > a_{n+1}$$

En esta caso $a_n = \frac{1}{n}$ y $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$

$$a_n > a_{n+1}$$

$$\frac{1}{n} > \frac{n}{n+1} \Rightarrow n+1 > n$$

Esta desigualdad es verdadera para todos $n \geq 1$

Así $a_n = \frac{1}{n}$ es decreciente.

Otra alternativa para determinar si una sucesión de números reales es creciente o decreciente.

Propiedad de Monotonía

Sea f continua en un intervalo $[a, b]$ y derivable en (a, b)

- i. Si $f'(x) > 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces f es creciente en (a, b)
- ii. Si $f'(x) < 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces f es decreciente en (a, b)

Si consideramos $a_n = \frac{1}{n}$ y $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ para toda x por tanto

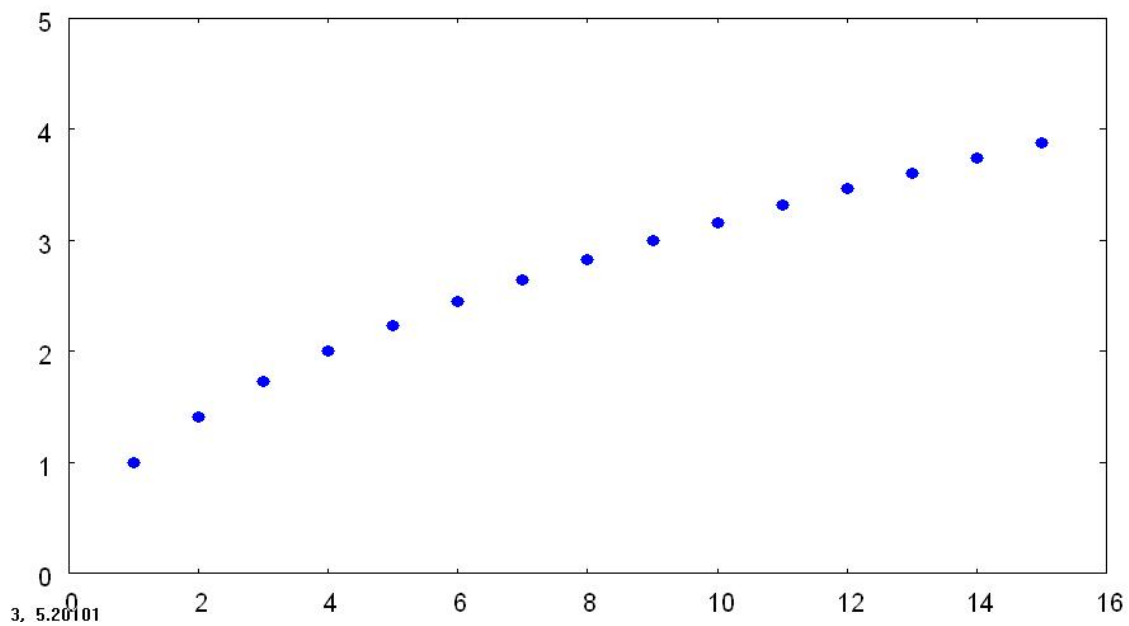
$a_n = \frac{1}{n}$ es decreciente.

Ejemplo 2

$$a_n = \sqrt{n}$$

Los 15 primeros términos de la sucesión:

$$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, 3, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}$$



Halleemos el límite de la sucesión cuando $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty, \text{ (La sucesión diverge)}$$

Determinemos la sucesión es creciente o decreciente (recuerde que tiene dos alternativas)

Con la derivada

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \text{ para toda } x \geq 1$$

Por tanto $f(x) = \sqrt{x}$ es creciente y así $a_n = \sqrt{n}$ también es creciente.

Nota.

Cuando una sucesión es creciente o decreciente, se dice que es monótona

Actividad profundización

Taller N°1

1. En los ejemplos del 3 al 8

a. Hallar $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

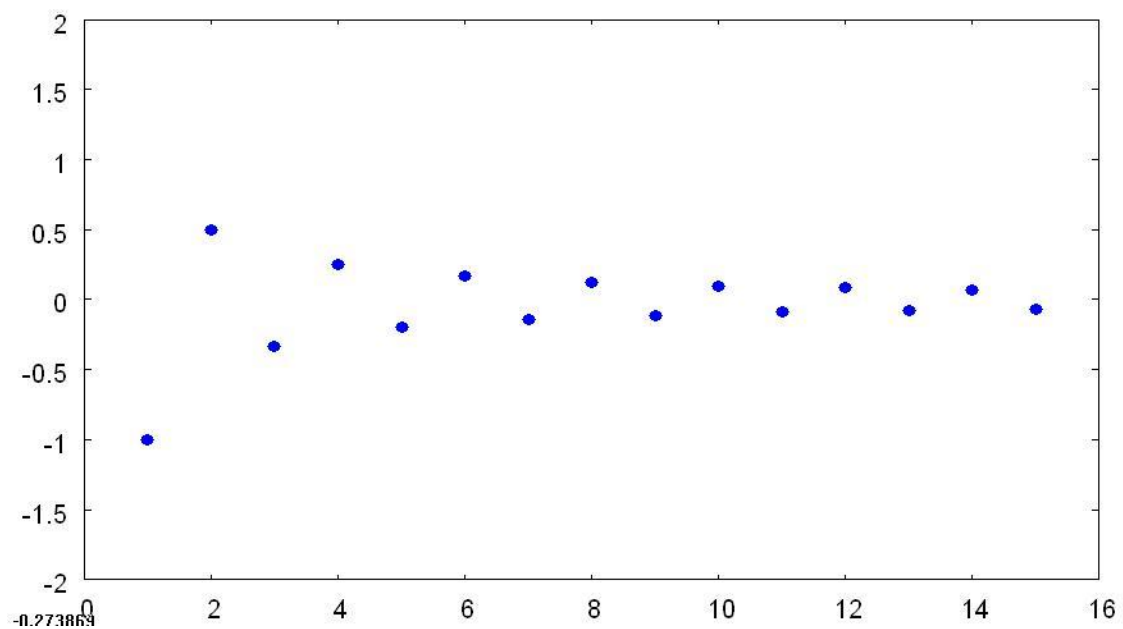
b. Determinar si la sucesión es creciente o decreciente o ninguna de las dos.

Ejemplo 3

$$a_n = (-1)^n (1/n)$$

Los 15 primeros términos de la sucesión:

$1 \ 1/2 \ 1/3 \ 1/4 \ 1/5 \ 1/6 \ 1/7 \ 1/8 \ 1/9 \ 1/10$
 $-1, -1/2, -1/3, -1/4, -1/5, -1/6, -1/7, -1/8, -1/9, -1/10, -1/11, -1/12, -1/13, -1/14, -1/15$
 $2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15$

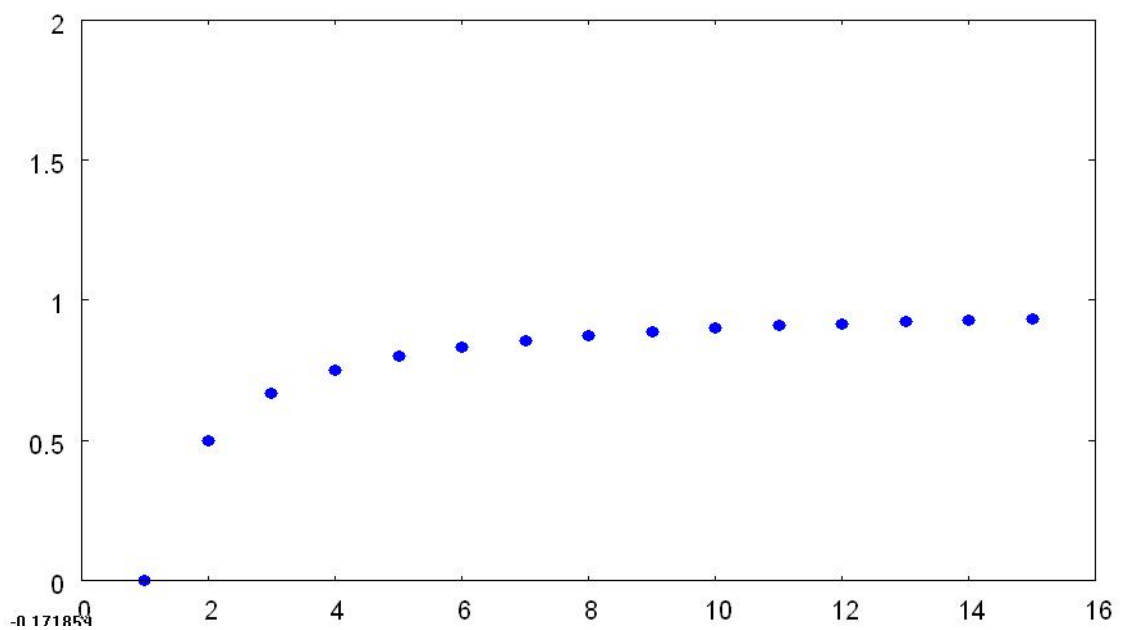


Ejemplo 4

$$a_n = \frac{n-1}{n}$$

Los 15 primeros términos de la sucesión:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
0,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	

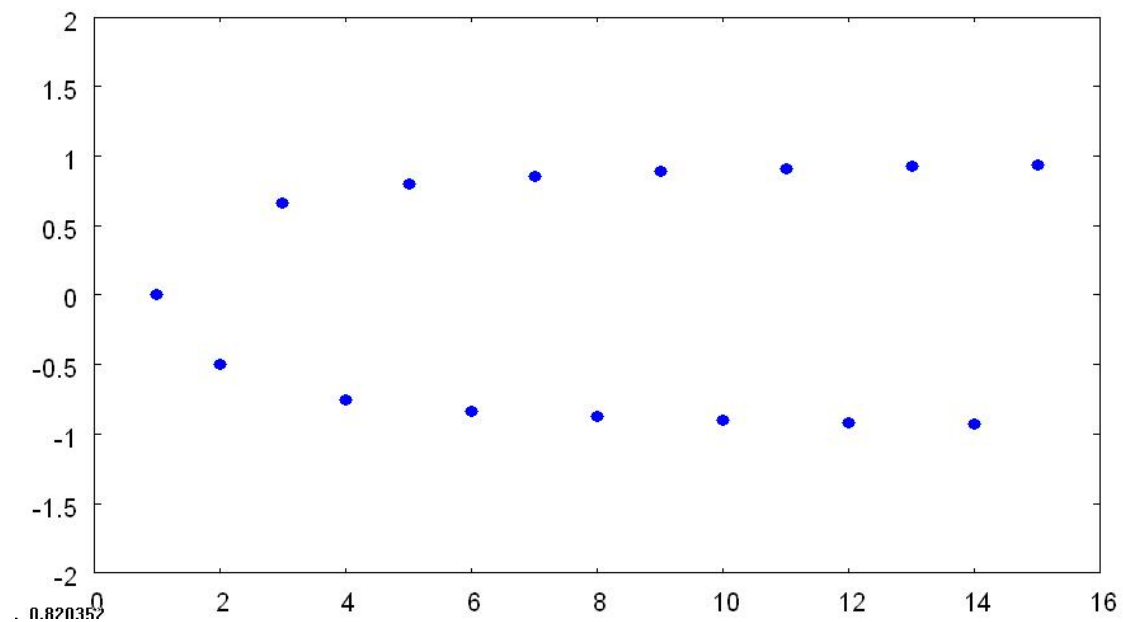


Ejemplo 5

$$a_n = (-1)^n \frac{n-1}{n}$$

Los 15 primeros términos de la sucesión:

$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 14$
 $0, \ -\frac{1}{2}, \ \frac{2}{3}, \ -\frac{3}{4}, \ \frac{4}{5}, \ -\frac{5}{6}, \ \frac{6}{7}, \ -\frac{7}{8}, \ \frac{8}{9}, \ -\frac{9}{10}, \ \frac{10}{11}, \ -\frac{11}{12}, \ \frac{12}{13}, \ -\frac{13}{14}, \ \frac{14}{15}$

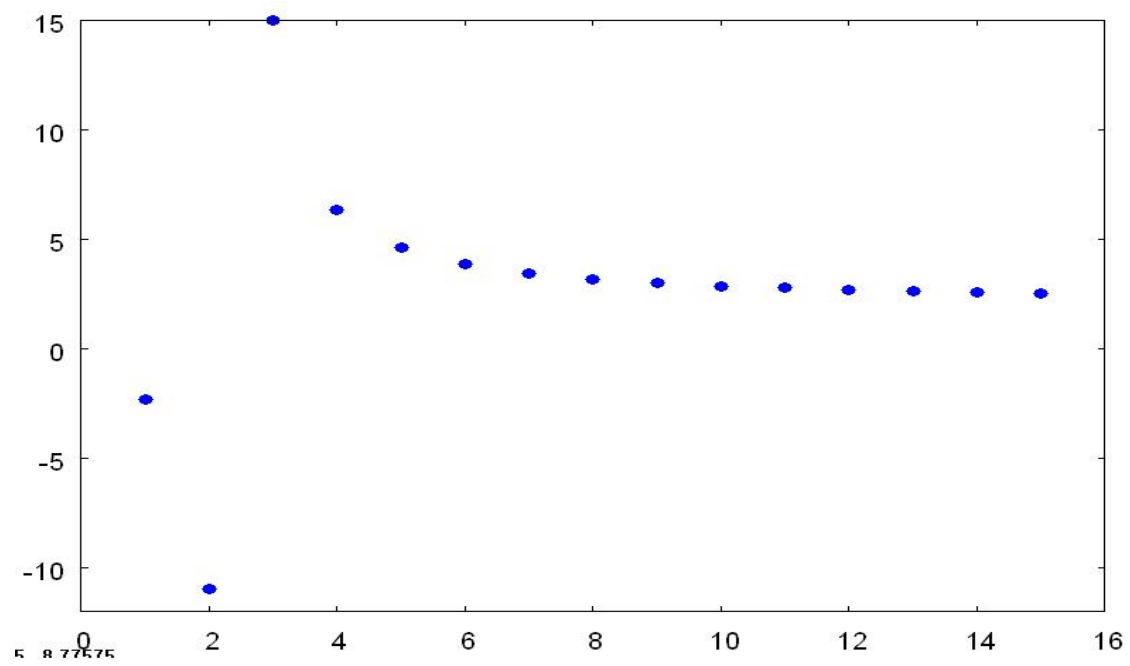


Ejemplo 6

$$a_n = \frac{4n+3}{2n-5}$$

Los 15 primeros términos de la sucesión:

7 19 23 27 31 35 43 47 51 55 59 63
 $-\infty$, -11 , 15 , ∞ , ∞ , ∞ , ∞ , ∞ , 3 , ∞ , ∞ , ∞ , ∞ , ∞ , ∞
 3 3 5 7 9 11 15 17 19 21 23 25

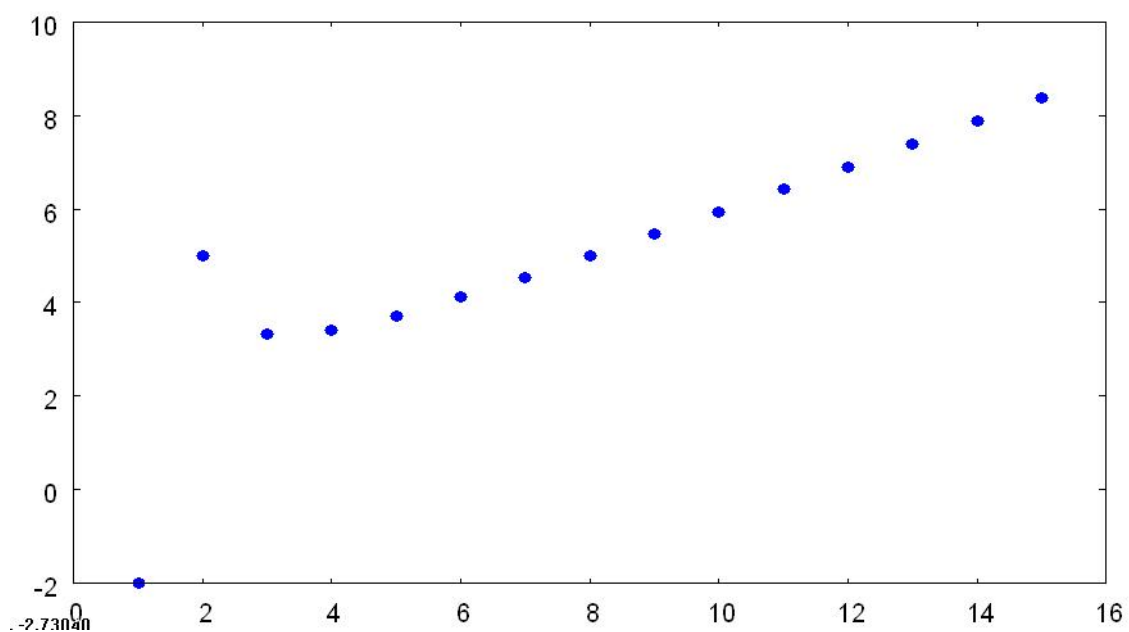


Ejemplo 7

$$a_n = \frac{n^2 + 1}{2n - 3}$$

Los 15 primeros términos de la sucesión:

10 17 26 37 50 82 101 122 145 170 197 226
 -2, 5, ..., ..., ..., ..., 5, ..., ..., ..., ..., ..., ...
 3 5 7 9 11 15 17 19 21 23 25 27



SUCESIONES ACOTADAS

Definición

Se dice que una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada si existe un número $M > 0$ (una cota) tal que $|a_n| \leq M$, para todo n

Ejemplo

una sucesión acotada

Demostrar que la sucesión $\left\{ \frac{3-4n^2}{n^2+1} \right\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada

Solución

Teniendo en cuenta que $4n^2 - 3 > 0$, para todo $n \geq 1$, se tiene

$$|a| = \left| \frac{3-4n^2}{n^2+1} \right| = \frac{|3-4n^2|}{|n^2+1|} = \frac{|4n^2-3|}{|n^2+1|} = \frac{4n^2-3}{n^2+1}; n \geq 1$$

$$\frac{4n^2-3}{n^2+1} < \frac{4n^2}{n^2+1} < \frac{4n^2}{n^2} = 4$$

Por tanto esta sucesión esta acotada por 4

Actividad Reconocimiento

Taller N° 3

Verificar que las sucesiones son acotadas

1. $a_n = \frac{3n^2-2}{n^2+1}$

2. $a_n = \frac{6n-1}{n+3}$

Comandos de máxima (Versión 5.14) para graficar una sucesión.

```
j[n]:=n;
```

```
xx:makelist(j[k],k,1,15);
```

```
a[n]:=(4*n+3)/(2*n-5);
```

```
yy:makelist(a[k],k,1,15);
```

```
plot2d([discrete,xx,yy],[style,points],[y,-12,15])$
```

Máxima en su versión mejorada (5.14) se puede descargar de:

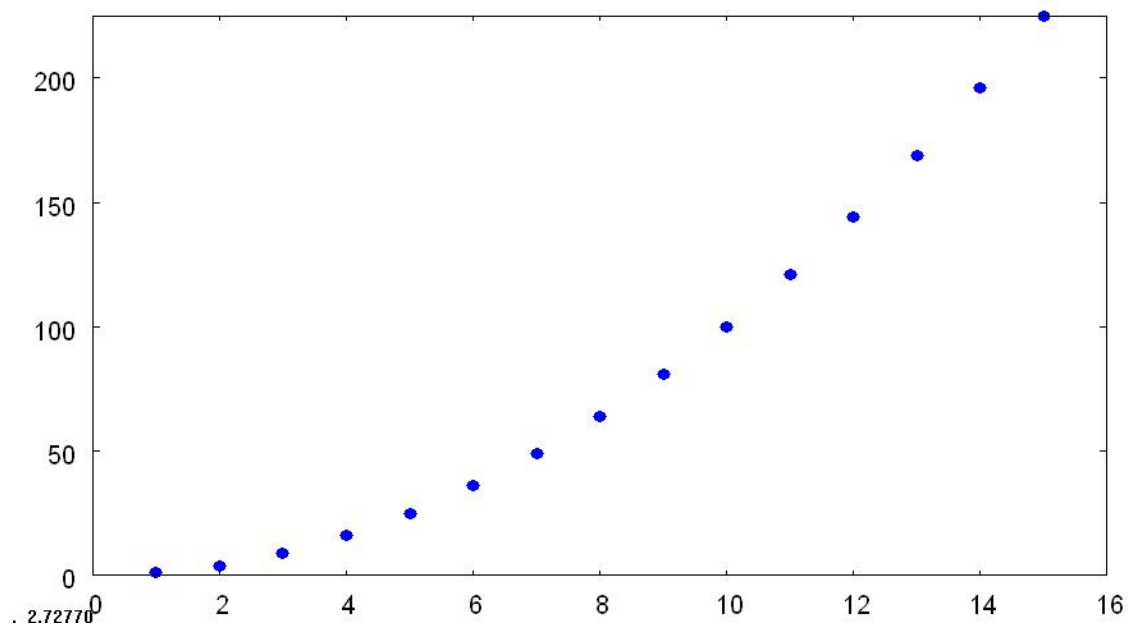
<http://rbytes.org/descargar/cat/educativos/ciencias/maxima/>

Ejemplo 8

$$a_n = n^2$$

Los 15 primeros términos de la sucesión:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225



Actividad profundización

Taller N° 2

Para las sucesiones que se dan a continuación hacer lo siguiente.

1.

- Escribir los 15 primeros términos
- Trazar la grafica de la sucesión (15 puntos)
- Hallar $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

2. Determinar si la sucesión es creciente, decreciente o ninguna de las dos

a. $a_n = \frac{3n^2 + 1}{2n^2 + 1}$

b. $a_n = \frac{1}{n+1}$

c. $a_n = \frac{1}{n^2}$

d. $a_n = \frac{n+2}{3n-1}$

Comandos de máxima (Versión 5.14) para graficar una sucesión.

```
j[n]:=n;
```

```
xx:makelist(j[k],k,1,15);
```

```
a[n]:=(4*n+3)/(2*n-5);
```

```
yy:makelist(a[k],k,1,15);
```

```
plot2d([discrete,xx,yy],[style,points],[y,-12,15])$
```

Máxima en su versión mejorada (5.14) se puede descargar de:

<http://rbytes.org/descargar/cat/educativos/ciencias/maxima/>