

Guía No 1	Calculo Integral	Grupo 1	UNAD
-----------	------------------	---------	------

Escuela de Ciencias Básicas Tecnologías e Ingeniería

CALCULO INTEGRAL

TALLER DE REPASO

Este taller es un pequeño repaso el cual le puede servir para recordar algunos conceptos necesarios para enfrentarse al Calculo Integral

Ejercicios

Derivar:

1) Si $y = x^5$

2) Si $y = 4x^2$

3) Si $y = x^{12}$

4) Si $y = -3x^{-4}$

5) Si $y = 2x^{-2}$

6) Si $y = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$

7) Si $y = \frac{3 - 2x}{3 + 2x}$

8) Si $y = \sqrt[3]{3x^2} - \frac{1}{\sqrt{5x}}$

9) Si $y = \ln x$

10) Si $y = \ln(x + 3)$

11) Si $y = \ln^2 x + 3$

12) Si $y = e^{2x}$

13) Si $y = e^{x^2}$

14) Si $y = a^{3x^2}$

15) Si $y = x^2 * \operatorname{sen} x + 2x * \cos x - 2 \operatorname{sen} x$

16) Si $y = \operatorname{tag} x * \operatorname{sen} x$

LA INTEGRAL

OPERACIONES OPUESTAS

Suma $\Rightarrow \Leftarrow$ *Resta*
Producto $\Rightarrow \Leftarrow$ *Cociente*
Integración $\Rightarrow \Leftarrow$ *Diferenciación*

Nota:

Para calcular integrales se necesitan principios de Álgebra, Geometría, Trigonometría y cálculo diferencial.

ANTIDERIVADA

Dada $f(x)$ encuentra otra función, digamos $F(x)$ tal que:

$F'(x) = f(x)$ Este proceso recibe el nombre de integración.

Ejemplo

Sea $f(x) = 2x$. ¿Cuál será la función $F(x)$ tal que $F'(x) = 2x$, por el cálculo diferencial es claro que la función $F(x) = x^2$ por que $F'(x) = 2x$

Ejemplo

Sea $f(x) = \cos x$. ¿Cuál es la función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$, con el cálculo diferencial es claro que la función $F(x) = \sin x$ por que $F'(x) = \cos x$

NOTACIÓN PARA LA ANTIDERIVADA (INTEGRAL)

(Matemático Leibniz)

En el ejemplo 1 y en ejemplo 2 con la notación de Leibniz se tiene.

$$\int (2x) dx = x^2 + c \qquad \int \cos x dx = \operatorname{sen} x + c$$

Pregunta: ¿Cuál es el significado de la c en las expresiones anteriores?

Usaremos el término integral definida en vez de antiderivada.

Antiderivar es también integrar

El símbolo $\int f(x) dx$, $\int$ se llama signo de integral y $f(x)$ se llama integrando.

En resumen:

$$\text{La integral indefinida } \int f(x) dx = F(x) + c$$

Donde:

$\int$: *símbolo de integración*

$f(x)$: *integrando*

dx : *diferencial de la variable*

$F(x)$: *la integración de $f(x)$*

c : *constante de integración*

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

1. Si r es un número racional cualquiera

$$\frac{p}{q}, p \text{ y } q \text{ entero } q \neq 0 \text{ entonces } \int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$$

$$2. \int dx = x + c$$

$$3. \int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

$$4. \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx =$$

Actividad de reconocimiento

Taller No 1.

Encuentre la antiderivada general $F(x)+c$ para cada una de las siguientes funciones

a) $f(x) = 4$

b) $f(x) = 2x - 4$

c) $f(x) = 7x^2 + \sqrt{2}$

d) $f(x) = 5x^4 + \pi$

e) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

f) $f(x) = x^{-\frac{3}{4}}$

g) $f(x) = 6x^2 - 6x + 1$

h) $f(x) = 3x^2 + 10x - 7$

i) $f(x) = 18x^8 - 25x^4 + 3x^2$

j) $f(x) = \frac{4}{x^5} - \frac{3}{x^4}$

Actividad de Profundización

Ejercicios de antiderivadas

Taller No 2

1) $\int (x+1)dx$

2) $\int (5-6x)dx$

3) $\int \left(3t^2 + \frac{t}{2}\right)dt$

4) $\int (2x^3 - 5x + 7)dx$

5) $\int \left(\frac{t^2}{2} + 4t^3\right)dt$

6) $\int (1-x^2-3x^5)dx$

7) $\int \left(\frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3}\right)dx$

8) $\int \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{x^3} + 2x\right)dx$

$$9) \int 3x^4 dx$$

$$10) \int 2x^7 dx$$

$$11) \int x^{\frac{-1}{3}} dx$$

$$12) \int x^{\frac{-5}{4}} dx$$

$$13) \int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx$$

$$14) \int \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$15) \int \frac{t\sqrt{t} + \sqrt{t}}{t^2} dt$$

$$16) \int \frac{4 + \sqrt{t}}{t^3} dt$$

$$17) \int \left(8y - \frac{2}{y^4} \right) dy$$

$$18) \int \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{y^5} \right) dy$$

$$19) \int 2x(1 - x^3) dx$$

$$20) \int x^{-3}(x - 1) dx$$

$$21) \int 10\sqrt{x^2} dx$$

$$22) \int y^3(2y^2 - 3) dy$$

$$23) \int 6t^2 \sqrt[3]{t} dt$$

$$24) \int (8x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 5) dx$$

$$25) \int (3t^5 - 2t^3) dt$$

$$26) \int \frac{2dx}{\sqrt[3]{x}}$$

$$27) \int \frac{8dt}{t^5}$$

$$28) \int (3 + 3u^2 - 8u^3) du$$

$$29) \int \frac{27t^3 - 1}{\sqrt[3]{t}} dt$$

$$30) \int (3 \sin t - 2 \cos t) dt$$

$$31) \int (3 \csc^2 x - 5 \sec x \tan x) dx$$

$$32) \int (3 \csc x \cot x + 2 \sec^2 x) dx$$

$$33) \int \frac{\operatorname{sen} x \, dx}{\cos^2 x} \quad 34) \int \frac{\cos x \, dx}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$35) \int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx \quad 36) \int \left(\frac{y^4 + 2y^2 - 1}{\sqrt{y}} \right) dy$$

$$38) \int \left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx \quad 39) \int 6t^2 \sqrt[3]{t} \, dt$$

Nota

Este taller debe ser incluido dentro del portafolio el cual será revisado al final del semestre.

Actividad de reconocimiento

Taller No 3.

Completar.

$$a) \int \sec^2 x \, dx = \operatorname{tg} x + c$$

$$b) \int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + c$$

$$c) \int 3x^2 \, dx =$$

$$d) \int \sec x \operatorname{tg} x \, dx =$$

$$e) \int 4x^3 \, dx =$$

$$f) \int \cos x \, dx =$$

$$g) \int \csc x \operatorname{tg} x \, dx =$$

$$h) \int (3x^2 + 2x + 1) \, dx =$$

$$i) \int -\csc^2 x \, dx =$$

$$j) \int (4x^3 + 2) \, dx =$$

$$k) \int 3 \, dx =$$

$$l) \int (8x^7 + 5x^4 + 3x^2 + 2x + 100) \, dx =$$

Actividad de reconocimiento

Taller No 4.

$$a) \int (x^3 + \sqrt{x}) \, dx$$

$$b) \int (x^2 + 1)^2 x \, dx$$

$$c) \int (y^2 + 4y) \, dy$$

$$d) \int y^2 (y^2 - 3) \, dy$$

$$e) \int \frac{x^4 - 2x^3 + 1}{x^3} \, dx$$

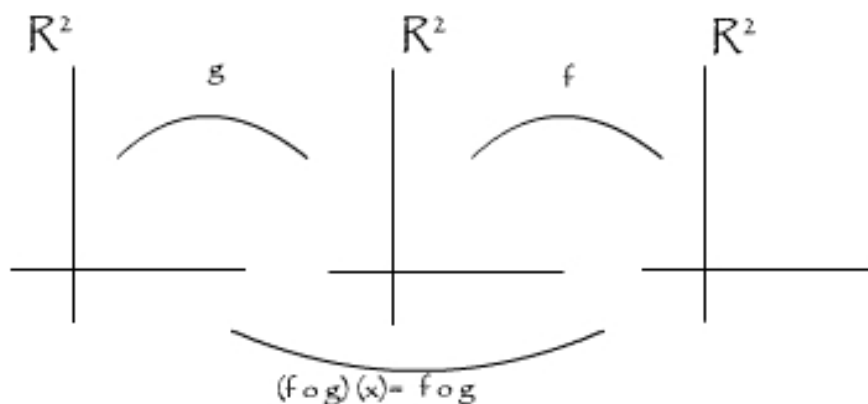
$$f) \int \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{\sqrt{x}} \, dx$$

$$g) \int (3 \operatorname{sen} t - 2 \cos t) \, dt$$

$$h) \int (3t^2 - 2 \operatorname{sen} t) \, dt$$

METODO DE SUSTITUCIÓN

Función compuesta



Derivada de la función compuesta (Regla de la cadena)

$$(f \circ g)'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Sustitución de las integrales indefinidas

Sea g una función derivable (diferenciable) y supongamos que F una antiderivada de f

$$(F'(x) = f(x)). \text{ Entonces si } u = g(x)$$

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + c = f(g(x)) + c$$

Ejemplo

$$\text{Calcular } [\text{sen}(x^2)]'$$

$$[\text{sen}(x^2)]' = \cos(x^2) \cdot 2x = 2x \cos(x^2) =$$

Ejemplo

$$\int 2x \cos(x^2) dx \Rightarrow u = g(x)$$

$$u = x^2$$

$$du = 2x dx$$

$$\int 2x \cos(x^2) dx = \int 2x \cos(x^2) = \int \cos u du = \text{sen } u + c = \text{sen}(x^2) + c$$

Ejemplo

$$\int \sqrt{2x+3} \, dx \Rightarrow u = g(x)$$

$$u = 2x + 3$$

$$du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$$

$$\int \sqrt{u} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int \sqrt{u} \, du = \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} \, du = \frac{1}{2} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$\frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3} (2x+3)^{\frac{3}{2}} + c$$

Actividad de Profundización

Taller No 5

$$\int 7 \operatorname{sen} \frac{\theta}{3} \, d\theta$$

$$\int 3 \cos 5\theta \, d\theta$$

$$\int \cos(3x) \, dx$$

$$\int -3 \csc^2 x \, dx$$

$$\int (x^4 + 3x)^{30} (4x^3 + 3) \, dx$$

$$\int \operatorname{sen}^{10} x \cos x \, dx$$

$$\int x \sqrt{1-x^2} \, dx$$

$$\int \frac{x}{x^2+4} \, dx$$

$$\int 6z \sqrt{4+z^2} \, dz$$

$$\int \frac{\operatorname{sen} \sqrt{t}}{\sqrt{t}} \, dt$$

$$\int \frac{5}{\sqrt{2t+1}} \, dt$$

$$\int \frac{\operatorname{sen} \sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} \, dx$$

$$\int (x^3 + 6x)^5 (6x^2 + 12) \, dx$$

$$\int (x^2 + 4)^{10} x \, dx$$

$$\int (5x^2 + 1)(5x^3 + 3x - 8)^6 \, dx$$

$$\int 3t \sqrt[3]{2t^2 - 11} \, dt$$

$$\int \frac{3y}{\sqrt{2y^2+5}} dy$$

$$\int \frac{\sec^2 x}{3} dx$$

$$\int (\sqrt{2-x}+1)^3 \sqrt{2} dx$$

$$\int (\pi-x^3+1)^4 3\pi-x^2 dx$$

$$\int (5x^2+1)\sqrt{5x^3+3x-2} dx$$

$$\int (4\sec x \operatorname{tg} x - 2\sec^2 x) dx$$

$$\int (7x-2)^3 dx$$

$$\int (3x+5)^{-2} dx$$

$$\int \sec^2 (5x-1) dx$$

$$\int \csc^2 \left(\frac{x-1}{3} \right) dx$$

$$\int \left(\frac{1}{(x+1)^2} \right) dx$$