Guía No 1	Algebra Lineal	UNAD	Grupo: 1

Escuela de Ciencias Básicas Tecnologías e Ingeniería

ALGEBRA VECTORIAL

Introducción al Algebra Vectorial: modos Geométrico y Analítico.

Vectores en $\mathbb{R}^n$ $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots a_n)$, n-pla en $\mathbb{R}^n$

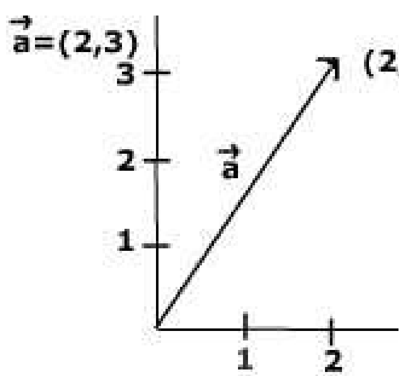
$\vec{a}$ Vector

$a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$ Se llaman componentes o coordenadas del vector.

Ejemplos de vectores en $\mathbb{R}^n$

$\vec{a} = (3,1)$, $\vec{b} = (1,0,-1)$, $\vec{c} = (1,0,-1,2,1,3,0)$, $\vec{d} = (0,0,0)$

Ejemplos de vectores en $\mathbb{R}^2$



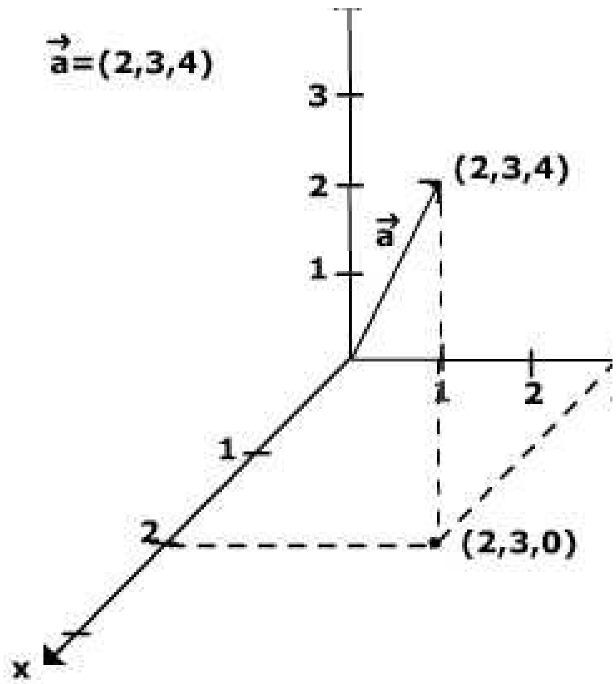
Actividad de reconocimiento

Taller No 1.

Represente geométricamente en $\mathbb{R}^2$

a) (-2,1), b) (0,-3) c) (-3,-3) d) (-1,3) e) (3,-1)

Ejemplos de vectores en $\mathbb{R}^3$



Nota: Los vectores de $\mathbb{R}^n$ para n>3 no pueden representarse geométricamente.

Actividad de reconocimiento

Taller No 2.

1. Represente geométricamente en $\mathbb{R}^3$

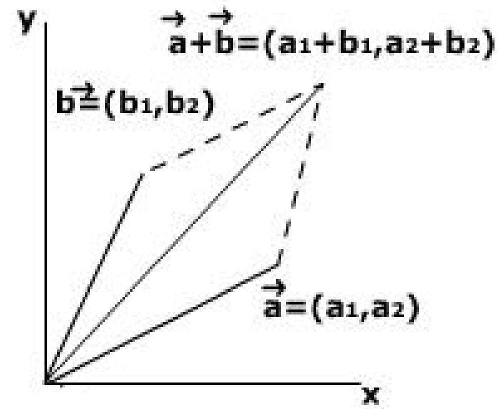
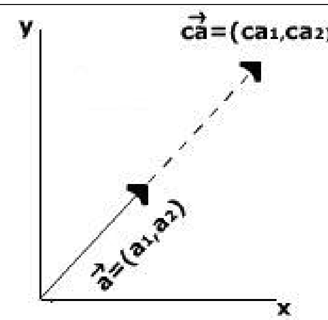
   a) (2, 1,3), **b)** (0, 0,3) **c)** (-1, 2,-3) **d)** (-2,-4, 2) **e)** ((5,-2,3) **f)** (3,-1,3)
   g) (1,1, -4) **h)** (-3,-4,-4) **i)** (3,-1,-3)

Actividad de reconocimiento

Taller No 3.

1. Indicar el número del octante en que termina cada uno de los vectores del taller 2.

Suma de Vectores

Suma	$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)$ $b = (b_1, b_2, b_3, \ldots b_n)$ $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_2, \cdots a_n + b_n)$	
Multiplicación por escalar	$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)$ c€ℝ c $\vec{a} = (ca_1, ca_2, \ldots, ca_n)$	

Actividad de reconocimiento

Taller No 4.

1. Sean $\vec{a}$ = (-1,3) y $\vec{b}$ = (2,-3). Grafique en un mismo sistema de coordenadas

a) $3\vec{a}$ y $-3\vec{a}$ b) $2\vec{b}$ y $-2\vec{b}$ c) $3\vec{a}$ y $-6\vec{a}$ d) $6\vec{a}$ y $-3\vec{a}$

2. Sean $\vec{a}$ =(2,2) y $\vec{b}$ =(3,1). Graficar

a) $\vec{a}+\vec{b}$ b) $\vec{a}-\vec{b}$ c) $3\vec{a}+2\vec{b}$ d) $\vec{a}+4\vec{b}$

Propiedades

$\vec{b}$ =t$\vec{a}$	t positivo	$\vec{a}$ y $\vec{b}$ tiene la misma dirección
$\vec{b}$ = t$\vec{a}$	t negativo	$\vec{a}$ y $\vec{b}$ tiene dirección opuesta
$\vec{b}$ = t$\vec{a}$	t cualquiera t €ℝ	$\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelas

Actividad de profundización

Taller No 5.

1. Dibuja los vectores geométricos que une el origen con los puntos a=(2,1)y b= (1.3).
En la misma figura traza el vector geométrico que une el origen con el punto $\vec{d} = \vec{a} + t\vec{b}$ para cada uno de los siguientes valores del punto t:
$t = \frac{1}{3}; t = \frac{1}{2}; t = \frac{3}{4}; t = 1; t = 2; t = -1; t = -2$

Actividad de profundización
2. Resolver el ejercicio anterior si $\vec{d} = t\vec{a} + \vec{b}$

PRODUCTO ESCALAR

Definición: Si $\vec{a} = (a_{1,} a_2, a_3 \ldots, a_n)$ y $\vec{b}\ (b_1, b_2, b_3, \ldots b_n)$ su producto escalar se representa por $\vec{a}.\vec{b}$ y se define con la igualdad.

$$\vec{a}\,.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i$$

Propiedades del vector

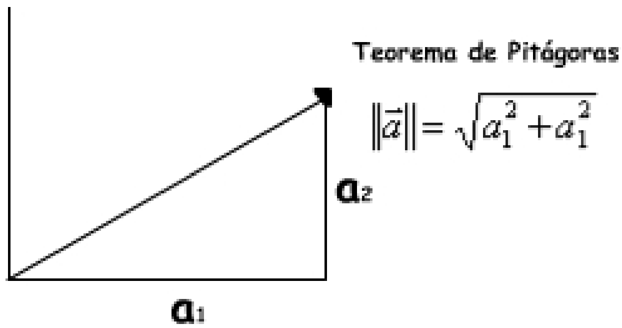
Sean $\vec{a}, \vec{b}\ y\, \vec{c}$ vectores de $\mathbb{R}^n$ 'y' k escalar

i. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}\,(Ley\ conmutativa)$
ii. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})\ \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}\,(Ley\ distributiva)$
iii. $k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = k\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot k\vec{b}$
iv. $\vec{a} \cdot \vec{a} > 0, si\ \vec{a} \neq \vec{0}$
v. $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{0}, si\ \vec{a} = \vec{0}$

Longitud o norma de un vector

Definición: Si $\vec{a}$ es un vector en $\mathbb{R}^n$ su longitud o norma se designa por $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots a_n^2} = (\vec{a} \cdot \vec{a})^{1/2}$

Ejemplo. Si $\vec{a} = (a_1, a_2)$

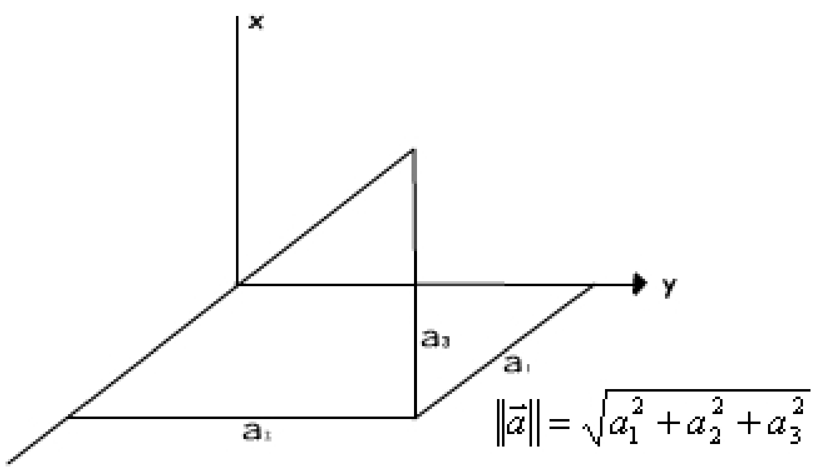


Propiedades de la norma

i. $\|\vec{a}\| \neq 0, \quad si \quad \vec{a} \neq \vec{0}$

ii. $\|\vec{a}\| = 0, \quad si \quad \vec{a} = \vec{0}$

iii. $\|k\,\vec{a}\| = |k|\,\|\vec{a}\| \qquad (k, escalar)$



Ejemplo

Sean $\vec{a} = (2,1,-2)$ y $\vec{b}(-2,1,1)$. Hallar

a) $\vec{a}.\vec{b}$ b) $\|\vec{a}\|$ c) $\|\vec{b}\|$ d) $5\,\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|^2 - \vec{a}.\vec{b}$

a) $\vec{a}.\vec{b} = 2.(-2) + (1)(1) + (-2)(1) = -5$

b) $\|\vec{a}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$

Continúe con el ejemplo

Actividad de reconocimiento

Taller No 6.

Sean $\vec{a} = (0,-3,1)$ $y\,\vec{b} = (-2,1,5)$ .Calcular

a) $\vec{b}.\vec{a}$ b) $\|\vec{a}\|$ c) $\|\vec{b}\|$

d) $3\|\vec{a}\| + 5\|\vec{b}\|^2 - 2\vec{a}.\vec{b}$

Propiedad: Dos vectores $\vec{a}\ y\ \vec{b}\ de\ \mathbb{R}^n$ son ortogonales (perpendiculares) si y solo si $\vec{a}.\vec{b} = 0$

Actividad de reconocimiento

Taller No 7.

Dar ejemplos de de parejas de vectores en $\mathbb{R}^3$ que sean perpendiculares.

Actividad de profundización

i. ¿Que es normalizar un vector?
ii. Graficar y normalizar los vectores siguientes.

$\vec{a} = (1,2)$; $\vec{b}$ (-1,1,0); $\vec{c} = (1,1,1)$; $= \vec{d} = (1,2,3)$

Actividad de reconocimiento

Taller No 8.

Sean $\vec{a} = (1,2,3,4), \vec{b} = (-1,2,-3,0)\ y\,\vec{c} = (0,1,0,1)$ *tres vectores de* R^4

Calcular cada uno de los siguientes productos de vectores.

$a)\,\vec{a}.\vec{b};\quad b)\,\vec{b}.\vec{c}\quad c)\,\vec{a}.\vec{c};\quad d)\ \vec{a}.(\vec{b}+\vec{c});\quad e)\ (\vec{a}-\vec{b}).\vec{c}$

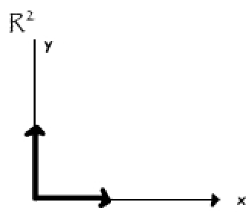
Dados tres vectores $\vec{a} = (2,4,-7)\,\vec{b} = (2,6,3)\ \ y\,\vec{c} = (3,4,-5)$.

En cada una de las expresiones siguientes se pueden introducir paréntesis de una sola manera para obtener una expresión que tenga sentido. Introducir dichos paréntesis y efectuar las operaciones.

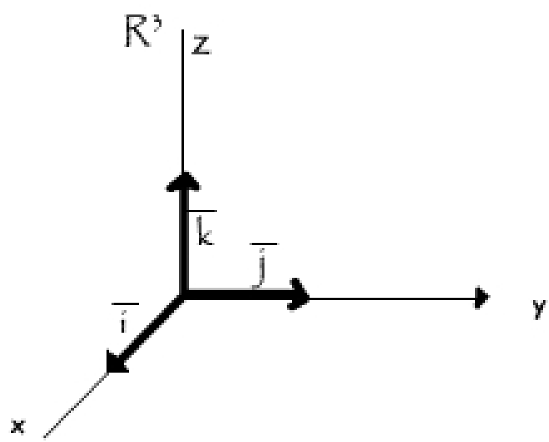
$a)\ \vec{a}.\vec{b}\,\vec{c}$; $\quad b)\ \vec{a}.\vec{b}+\vec{c} \quad c)\ \vec{a}\vec{b}.\vec{c}$

PRODUCTO VECTORIAL

Antes de dar la definición, hablemos de los vectores coordenados unitarios i, j, k



$$i=(1,0) \quad \|i\|=1$$
$$j=(0,1) \quad \|j\|=1$$
$$(a,b)=ai+bj$$



$$i=(1,0,0), \quad \|i\|=1$$
$$j=(0,1,0), \quad \|j\|=1$$
$$k=(0,0,1), \quad \|k\|=1$$
$$(a,b,c)=ai+bj+ck$$

Ejemplos: (2,3,4)=2i+3j+4k ;(-2,4,-5)= -2i+4j -5k

Definición del producto vectorial

Sean $\vec{a} = (a_1 a_2 a_3),\ y\, \vec{b} = (b_1 b_2 b_3)$ *dos vectores de* R^3 su producto vectorial $\vec{a}\times\vec{b}$ (en este orden) se define como el vector

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = i - \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + j \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\, i - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\, j + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, k$$

Ejemplo:

Sean $\vec{a} = (1,1,0)\ \ y\ \ \vec{b} = (0,-1,2).$ *Calcular* $\vec{a}\times\vec{b}$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = i - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + j \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2i - 2j - k = (2,-2,-1)$$

Propiedades

a) $\vec{a}\times\vec{b} = -\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$ (Simetría alternada)

b) $\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$ (Ley distributiva)

c) $k\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = k\vec{a}\times\vec{b}$ $\quad k\ \ escalar$

d) $\vec{a}.\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = 0$ (Ortogonalidad respecto a $\vec{a}$)

e) $\vec{b}.\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = 0$ (Ortogonal dad respecto a $\vec{b}$)

Actividad de profundización

Taller No 9.

1.Sean $\vec{a} = -i + 2k,\quad \vec{b} = -2i + j - k,\quad \vec{c} = i + 2j + 2k.$ *Calcular*

$a)\,\vec{a}\times\vec{b} \qquad b)\,\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) \qquad c)\ (\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b}) \qquad d)\ (\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{a}\times\vec{c})$

Actividad de profundización

Taller No 10.

1. Que representa $\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|$?.

2. Cuál es la diferencia entre $\vec{a}\times\vec{b}$ y $\vec{b}\times\vec{a}$?.

3. En cada caso hallar un vector de longitud 1 en R^3 ortogonal a la vez a $\vec{a}$ y $\vec{b}$

a) $\vec{a} = i + j + k \quad \vec{b} = 2i + 3j - k$ Rta/ $\pm\frac{1}{\sqrt{26}}(-4,3,1)$

b) $\vec{a} = 2i - 3j + 4k \quad \vec{b} = -i + 5j + 7k$ Rta/ $\pm\frac{1}{\sqrt{7054}}(-44,-18,7)$

c) $\vec{a} = i - 2j + 3k \quad \vec{b} = -3i + 2j - k$ Rta/ $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)$

Actividad de profundización

Taller No 11.

El ángulo θ entre dos vectores es único, está entre 0 y π y se define como $\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}$

1. Graficar los dos vectores y calcular el ángulo θ entre ellos.

$\vec{a} = (1,0)$ y $\vec{b}(0,1)$
$\vec{a} = (1,0)$ y $\vec{b}(1,1)$
$\vec{a} = (1,0)$ y $\vec{b}(-1,1)$
$\vec{a} = (2,2)$ y $\vec{b}(-2,-2)$

2. Calcular el ángulo θ entre los vectores.

$\vec{a} = (1,0,0)$ y $\vec{b}(0,1,0)$

$\vec{a} = (0,1,0)\ y\ \vec{b}(0,0,1)$

$\vec{a} = (1,1,1)\ y\ \vec{b}(2,3,4)$