

1ª QUESTÃO**Valor: 1,0**

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, e seja P

uma matriz inversível tal que $B = P^{-1}AP$. Sendo n um número natural, calcule o determinante da matriz A^n .

2ª QUESTÃO**Valor: 1,0**

Considere uma seqüência de triângulos retângulos cuja lei de formação é dada por

$$a_{K+1} = \frac{2}{3}a_K$$

$$b_{K+1} = \frac{4}{5}b_K$$

onde a_K e b_K , para $K \geq 1$, são os comprimentos dos catetos do K -ésimo triângulo retângulo. Se $a_1 = 30$ cm e $b_1 = 42$ cm, determine o valor da soma das áreas de todos os triângulos quando $K \rightarrow \infty$.

3ª QUESTÃO**Valor: 1,0**

Considere o sistema de equações dado por

$$\begin{cases} 3 \log_3 \alpha + \log_9 \beta = 10 \\ \log_9 \alpha - 2 \log_3 \beta = 10 \end{cases}$$

onde α e β são números reais positivos. Determine o valor de $P = \alpha\beta$.

4ª QUESTÃO**Valor: 1,0**

Sejam C e C^* dois círculos tangentes exteriores de raios r e r^* e centros O e O^* , respectivamente, e seja t uma reta tangente comum a C e C^* nos pontos não coincidentes A e A^* . Considere o sólido de revolução gerado a partir da rotação do segmento AA^* em torno do eixo OO^* , e seja S a sua correspondente área lateral. Determine S em função de r e r^* .

5ª QUESTÃO**Valor: 1,0**

Resolva a equação

$$\log_{(\sin x + \cos x)}(1 + \sin 2x) = 2, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

6ª QUESTÃO**Valor: 1,0**

O quadrilátero $BRAS$, de coordenadas $A(1,0)$, $B(-2,0)$, $R(x_1, y_1)$ e $S(x_2, y_2)$ é construído tal que $\widehat{RAS} = \widehat{RBS} = 90^\circ$. Sabendo que o ponto R pertence à reta t de equação $y=x+1$, determine a equação algébrica do lugar geométrico descrito pelo ponto S ao se deslocar R sobre t .

7ª QUESTÃO**Valor: 1,0**

Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação $x^2 + (m-15)x + m = 0$. Sabendo que x_1 e x_2 são números inteiros, determine o conjunto de valores possíveis para m .

8ª QUESTÃO**Valor: 1,0**

Considere o conjunto formado por m bolas pretas e n bolas brancas. Determine o número de seqüências simétricas que podem ser formadas utilizando-se todas as $m+n$ bolas.

Observação: uma seqüência é dita *simétrica* quando ela possui a mesma ordem de cores ao ser percorrida da direita para a esquerda e da esquerda para a direita.

9ª QUESTÃO**Valor: 1,0**

Sejam a , b e c números reais não nulos. Sabendo que $\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{a+c}{b}$, determine o valor numérico de $\frac{a+b}{c}$.

10ª QUESTÃO**Valor: 1,0**

Seja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $\sum_{k=0}^n f(k) = 2008 \frac{(n+1)}{(n+2)}$, onde $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$ são, respectivamente, o conjunto dos números naturais e o dos números reais. Determine o valor numérico de $\frac{1}{f(2006)}$.