

1ª QUESTÃO**Valor 1,0**

Seja z um número complexo de módulo unitário que satisfaz a condição $z^{2n} \neq -1$, onde n é um número inteiro positivo.

Demonstre que $\frac{z^n}{1+z^{2n}}$ é um número real.

2ª QUESTÃO**Valor 1,0**

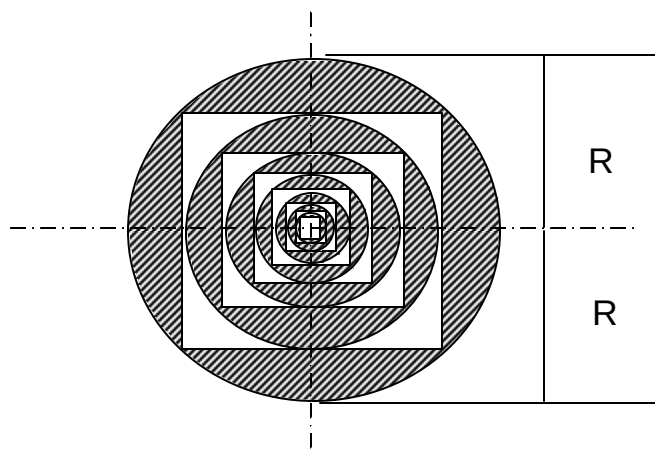
Determine todos os valores reais de x que satisfazem a equação:

$$\left| \log(12x^3 - 19x^2 + 8x) \right| = \log(12x^3 - 19x^2 + 8x),$$

onde $\log(y)$ e $|y|$ representam, respectivamente, o logaritmo na base 10 e o módulo de y .

3ª QUESTÃO**Valor 1,0**

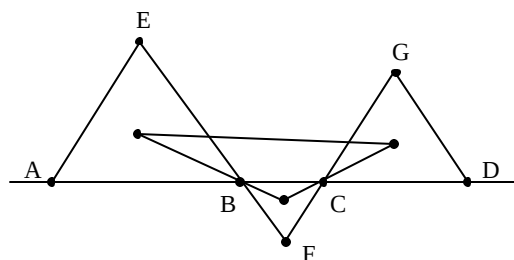
Dada numa circunferência de raio R , inscreve-se nela um quadrado. A seguir, inscreve-se uma circunferência neste quadrado. Este processo se repete indefinidamente para o interior da figura de maneira que cada quadrado estará sempre inscrito em uma circunferência e simultaneamente circunscrito por outra. Calcule, em função de R , a soma das áreas delimitadas pelos lados dos quadrados e pelas circunferências que os circunscrevem, conforme mostra a figura.

**4ª QUESTÃO****Valor 1,0**

Resolva a equação $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} (2 a) = 2 \operatorname{tg} (3 a)$, sabendo-se que $a \in [0, \pi/2)$.

5ª QUESTÃO**Valor 1,0**

Sobre uma reta r são marcados os pontos A, B, C e D. São construídos os triângulos equiláteros ABE, BCF e CDG, de forma que os pontos E e G encontram-se do mesmo lado da reta r , enquanto que o ponto F encontra-se do lado oposto, conforme mostra a figura. Calcule a área do triângulo formado pelos baricentros de ABE, BCF e CDG, em função dos comprimentos dos segmentos AB, BC e CD.

**6ª QUESTÃO****Valor 1,0**

Considere um hexágono regular de 6 cm de lado. Determine o valor máximo da área de um triângulo XYZ, sabendo-se que:

- a) os pontos X, Y e Z estão situados sobre lados do hexágono;
- b) a reta que une os pontos X e Y é paralela a um dos lados do hexágono.

7ª QUESTÃO**Valor 1,0**

Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbf{N}$. Por definição, uma função $f: A \rightarrow B$ é crescente se $a_1 > a_2 \Rightarrow f(a_1) \geq f(a_2)$, para quaisquer a_1 e $a_2 \in A$.

a) Para $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$, quantas funções de A para B são crescentes?

b) Para $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, \dots, n\}$, quantas funções de A para B são crescentes, onde n é um número inteiro maior que zero?

8ª QUESTÃO**Valor 1,0**

Seja uma pirâmide regular de vértice V e base quadrangular $ABCD$. O lado da base da pirâmide mede l e a aresta lateral $l\sqrt{2}$. Corta-se a essa pirâmide por um plano que contém o vértice A , é paralelo à reta BD , e contém o ponto médio da aresta VC . Calcule a área da seção determinada pela interseção do plano com a pirâmide.

9ª QUESTÃO**Valor 1,0**

Demonstre que $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ é um número inteiro múltiplo de quatro.

10ª QUESTÃO**Valor 1,0**

Considere uma matriz A , $n \times n$, de coeficientes reais, e k um número real diferente de 1. Sabendo-se que $A^3 = k A$, prove que a matriz $A+I$ é invertível, onde I é a matriz identidade $n \times n$.