

PME2443 Microprocessadores e Controle Digital

Raul Gonzalez Lima

September 21, 2006

Contents

1	Representação no espaço de estados	5
1.1	Introdução	5
1.2	De tempo contínuo para discreto C2D	5
1.2.1	Fator de integração	6
1.2.2	Definição de e^{At}	6
1.2.3	Integral do sistema de kT a $(k + 1)T$	7
1.3	Determinação de e^{At} a partir de A	8
1.4	Algumas representações canônicas	9
1.4.1	Forma canônica controlável	9
1.4.2	Forma canônica observável	9
1.4.3	Forma canônica diagonal	10
1.4.4	Forma canônica de Jordan	10
1.5	Solução de equações no espaço de estados discreto	10
1.5.1	Matriz de transição	11
1.5.2	Solução do sistema discreto via Transformada z	11
1.5.3	Método para calcular $(zI - G)^{-1}$	12
1.6	Estabilidade de Liapunov	13
1.6.1	Função positiva definida	13
1.6.2	Critério de Sylvester para determinar se uma matriz é positiva	13
1.6.3	A Função de Liapunov	13
1.6.4	Estabilidade segundo Lyapunov	14
1.6.5	Estabilidade assintótica	14
1.6.6	Instabilidade	14
1.6.7	Teorema sobre estabilidade assintótica	14
1.6.8	Teorema sobre estabilidade no tempo discreto	15
1.6.9	Estabilidade de um sistema discreto invariante no tempo	15
1.7	Teorema de Cayley-Hamilton	16
1.8	Controlabilidade de sistema discreto	17
1.9	Observabilidade de sistema discreto	17

1.10	Controle por locação de pólos	19
1.11	Observador de estado completo	19
1.12	Fórmula de Ackerman para a matriz de ganho do controlador	20
1.13	Fórmula de Ackerman para a matriz de ganho do observador	21
1.14	Controle Ótimo Quadrático	22
1.15	Exercícios Recomendados	25
1.15.1	Formas canônicas	25
1.15.2	Solução de Equações de Diferenças	25
1.15.3	Estabilidade de Lyapunov	26
1.15.4	Alocação de Pólos e Observadores	26
2	A Transformada de Laplace e a Transformada Z	27
2.1	A Transformada de Laplace bilateral	28
2.1.1	Introdução	29
2.1.2	Definição	29
2.1.3	Condições de existência da transformada	29
2.1.4	A transformada de algumas funções	29
2.1.5	Superposição	32
2.1.6	Translação de uma função	32
2.1.7	Multiplicação por $e^{-\alpha t}$	33
2.1.8	Limite inferior da transformada de Laplace	33
2.1.9	Teorema da Diferenciação	33
2.1.10	Teorema do valor final	34
2.1.11	Teorema do valor inicial	34
2.1.12	Teorema da Integral	35
2.1.13	Transformada Inversa de Laplace	35
2.1.14	Solução de Equações Lineares Invariantes no Tempo	36
2.2	A Transformada Z	37
2.2.1	A transformada z bilateral	37
2.2.2	Transformada z lateral	39
2.2.3	Propriedades da transformada z	39
2.2.4	Teorema do valor inicial	41
2.2.5	A transformada z inversa	42
3	Planta contínua no tempo com controlador de tempo discreto	47
3.1	Transformada de Laplace do 'Sampler and Hold'	47
4	Propriedades básicas da realimentação	51
4.1	Tipos de sistemas e erro de seguimento em regime permanente	51

Chapter 1

Representação no espaço de estados

Referência

Ogata, K. *Discrete-Time Control Systems*, Prentice Hall, 2. ed., 1995, cap. 5 e 6.

1.1 Introdução

Os métodos convencionais, como lugar-das-raízes e métodos no domínio da frequência, são úteis quando estamos tratando de sistemas *siso*. São métodos para sistemas invariantes no tempo.

O método no espaço de estados descreve o sistema através n equações diferenciais de primeira ordem. Permite o projeto de controladores que minimizam um índice de performance, permitem o projeto para uma classe de sinais de entrada e permitem a inclusão de condições iniciais no projeto do controlador.

O estado é definido como o menor conjunto de variáveis tais que o conhecimento destas variáveis em $t = t_0$, junto com o conhecimento do sinal de entrada de $t = t_0$ até $t > t_0$, determina completamente o comportamento do sistema em qualquer $t > t_0$

1.2 De tempo contínuo para discreto C2D

No controle digital de plantas que são contínuas no tempo é necessário converter modelos de tempo contínuo em modelos de tempo discreto. Do ponto

de vista físico admite-se a existência de um amostrador e de um segurador de ordem zero no sistema. Do ponto de vista matemático trata-se de uma operação de integração de t a $t+T$, onde T denota o intervalo de amostragem.

1.2.1 Fator de integração

Para integrar um sistema do tipo $\dot{x} = Ax + Bu$ é conveniente agrupar os termos \dot{x} e Ax no diferencial de um único termo. Multiplica-se a equação do sistema por um fator de integração M

$$M\dot{x} = MAx + MBu \quad (1.1)$$

ou ainda

$$M\dot{x} - MAx = MBu \quad (1.2)$$

Deja-se determinar M tal que

$$\frac{dMx}{dt} = M\dot{x} - MAx \quad (1.3)$$

pois neste caso os sistema

$$d(Mx) = MBu dt \quad (1.4)$$

pode ser integrado

$$Mx(t+T) - Mx(t) = \int_t^{t+T} M(\tau)Bu(\tau)d\tau \quad (1.5)$$

1.2.2 Definição de e^{At}

Na busca do fator de integração convém lembrar da definição de e^{At}

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \dots + \frac{1}{k!}A^k t^k + \dots \quad (1.6)$$

Esta série é convergente e pode ser diferenciada termo a termo

$$\frac{d(e^{At})}{dt} = A + A^2t + \frac{1}{2!}A^3t^2 + \dots + \frac{1}{(k-1)!}A^k t^{k-1} + \dots \quad (1.7)$$

e pela propriedade associativa

$$\frac{d(e^{At})}{dt} = A[I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \dots + \frac{1}{k!}A^k t^k + \dots] \quad (1.8)$$

que resulta

$$\frac{d(e^{At})}{dt} = Ae^{At} \quad (1.9)$$

Esta propriedade de e^{AT} é a propriedade necessária para o fator de integração.

1.2.3 Integral do sistema de kT a $(k+1)T$

Vamos utilizar $M = e^{-At}$ como fator de integração. Decorre da eq. 1.5,

$$e^{-A(k+1)T}x((k+1)T) - e^{-A(kT)}x(kT) = \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \quad (1.10)$$

Pré-multiplicando por $e^{A(k+1)T}$,

$$x((k+1)T) - e^{AT}x(kT) = e^{A(k+1)T} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \quad (1.11)$$

ou

$$x((k+1)T) - e^{AT}x(kT) = \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (1.12)$$

Uma mudança de variável de integração simplifica o integrando. Seja $\lambda = t - kT$,

$$x((k+1)T) - e^{AT}x(kT) = \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A(T-\lambda)}Bu(\lambda+kT)d\lambda \quad (1.13)$$

Ao considerar a excitação $u(\lambda+kT)$ constante no intervalo $t \rightarrow t+T$, resulta

$$x((k+1)T) - e^{AT}x(kT) = u(kT) \left(\int_0^T e^{A(T-\lambda)}Bd\lambda \right) \quad (1.14)$$

Tomando a liberdade de retirar da notação o intervalo de discretização T e isolando $x(k+1)$,

$$x(k+1) = (e^{AT})x(k) + \left(\int_{kT}^{(k+1)T} e^{A(T-\lambda)}Bd\lambda \right) * u(k) \quad (1.15)$$

É possível ainda, neste caso, mudar o intervalo de integração,

$$x(k+1) = (e^{AT})x(k) + \left(\int_0^T e^{A(T-\lambda)}Bd\lambda \right) * u(k) \quad (1.16)$$

E, finalmente, da eq. 1.16, observa-se claramente a expressão que relaciona a matriz do sistema no tempo contínuo A com a matriz do sistema no tempo discreto G ,

$$G = e^{AT} \quad (1.17)$$

decorre também a expressão que relaciona a matriz de atuação no tempo contínuo B com a matriz de atuação no tempo discreto H ,

$$H = \left(\int_0^T e^{A(T-\lambda)} B d\lambda \right) \quad (1.18)$$

No Scilab o comando que calcula G e H em função de A , B e T é *dscr*. No Octave o comando que calcula G e H em função de A , B e T é *c2d*.

1.3 Determinação de e^{At} a partir de A

Já foi demonstrado que

$$\frac{d(e^{At})}{dt} = Ae^{At}. \quad (1.19)$$

e decorre da expansão em série de e^{At} que

$$e^{A0} = I \quad (1.20)$$

Seja $F(t) = e^{At}$. Desta forma $F(t)$ satisfaz $\dot{F} = AF$ e podemos aplicar a transformada de Laplace nos dois lados da equação,

$$sF(s) - F(0) = AF(s) \quad (1.21)$$

onde $F(0) = e^{A0} = I$. Rearranjando a eq. 1.21, resulta,

$$(sI - A)F(s) = I \quad (1.22)$$

ou seja,

$$F(s) = (sI - A)^{-1} \quad (1.23)$$

E, finalmente, podemos dizer que,

$$F(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}] \quad (1.24)$$

1.4 Algumas representações canônicas

Considere uma sistema *siso* descrito por

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_n u(k-n) \quad (1.25)$$

Em termos de função de transferência pulsada,

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (1.26)$$

1.4.1 Forma canônica controlável

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (1.27)$$

$$y(k) = [b_n - a_n b_0 \quad b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \quad \dots \quad b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) \quad (1.28)$$

1.4.2 Forma canônica observável

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_2 - a_2 b_0 \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u(k) \quad (1.29)$$

$$y(k) = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) \quad (1.30)$$

1.4.3 Forma canônica diagonal

Se os pólos da função de transferência pulsada são todos distintos, é possível diagonalizar a matriz A do sistema

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (1.31)$$

$$y(k) = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) \quad (1.32)$$

1.4.4 Forma canônica de Jordan

Se a função de transferência tem pólo múltiplo de ordem m em $z = p_1$ então é possível representar o sistema na forma canônica de Jordan

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_m(k+1) \\ x_{m+1}(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_{m-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_m(k) \\ x_{m+1}(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (1.33)$$

$$y(k) = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) \quad (1.34)$$

1.5 Solução de equações no espaço de estados discreto

Considere o sistema no tempo discreto

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Gx(k) + Hu(k) \\y(k) &= Cx(k) + Du(k)\end{aligned}\tag{1.35}$$

A solução pode ser obtida por recursão

$$\begin{aligned}x(1) &= Gx(0) + Hu(0) \\x(2) &= Gx(1) + Hu(1) = G^2x(0) + GHu(0) + Hu(1) \\x(3) &= Gx(2) + Hu(2) = G^3x(0) + G^2Hu(0) + GHu(1) + Hu(2) \\&\vdots\end{aligned}\tag{1.36}$$

que pode ser escrito sinteticamente

$$x(k) = G^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} G^{k-j-1} Hu(j)\tag{1.37}$$

1.5.1 Matriz de transição

A solução do sistema homogêneo $x(k+1) = Gx(k)$ pode ser escrita

$$x(k) = \Psi(k)x(0)\tag{1.38}$$

Ao comparar a eq. 1.37 e a eq. 1.38 resulta,

$$\Psi(k) = G^k\tag{1.39}$$

1.5.2 Solução do sistema discreto via Transformada z

Considere o sistema no tempo discreto

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k)\tag{1.40}$$

Aplicando a transformada z na eq. 1.40

$$zX(z) - zx(0) = GX(z) + HU(z)\tag{1.41}$$

então

$$(zI - G)X(z) = zx(0) + HU(z)\tag{1.42}$$

Pré-multiplica-se a eq. 1.42 por $(zI - G)^{-1}$

$$X(z) = (zI - G)^{-1}zx(0) + (zI - G)^{-1}HU(z)\tag{1.43}$$

e aplica-se a transformada inversa

$$x(k) = Z^{-1}[(zI - G)^{-1}z]x(0) + Z^{-1}[(zI - G)^{-1}HU(z)] \quad (1.44)$$

1.5.3 Método para calcular $(zI - G)^{-1}$

A inversa de $(zI - G)$ pode ser calculada em termos da matriz adjunta

$$(zI - G)^{-1} = \frac{adj(zI - G)}{|zI - G|} \quad (1.45)$$

Note que o determinante $|zI - G|$ é o polinômio característico

$$|zI - G| = z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \dots + a_n \quad (1.46)$$

Demonstra-se que a matriz adjunta tem uma representação expandida

$$adj(zI - G) = Iz^{n-1} + H_1z^{n-2} + \dots + H_{n-1} \quad (1.47)$$

onde as matrizes H_i dependem dos coeficientes do polinômio característico

$$\begin{aligned} H_1 &= G + a_1I \\ H_2 &= GH_1 + a_2I \\ &\vdots \\ H_{n-1} &= GH_{n-2} + a_{n-1}I \\ H_n &= GH_{n-1} + a_nI = 0 \end{aligned} \quad (1.48)$$

Os coeficientes do polinômio característico eq. 1.46 podem ser calculados alternativamente por

$$\begin{aligned} a_1 &= -trG \\ a_2 &= -\frac{1}{2}trGH_1 \\ &\vdots \\ a_n &= -\frac{1}{n}trGH_{n-1} \end{aligned} \quad (1.49)$$

Exemplo: Determine a inversa da matriz $(zI - G)$ quando G vale,

$$\begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.0 \\ 0.3 & -0.1 & -0.2 \\ 0.0 & 0.0 & -0.3 \end{bmatrix} \quad (1.50)$$

1.6 Estabilidade de Liapunov

O segundo método de Liapunov para analisar a estabilidade de sistemas não se restringe a sistemas lineares invariantes no tempo, aplica-se também a sistemas variantes no tempo e sistemas não lineares.

Sabe-se que um sistema vibratório é estável se sua energia total é decrescente. O método de Liapunov baseia-se numa generalização deste fato. Se o sistema tem um estado assintoticamente estável, então a energia armazenada decai no tempo. Para tratar sistemas mais abstratos, onde o conceito de energia potencial tem pouco significado, Liapunov introduziu uma função de energia fictícia, a Função de Liapunov.

1.6.1 Função positiva definida

Uma função , $V(x)$, é dita positivo definida se $V(x) > 0$ para qualquer estado x e se $V(0) = 0$. Uma função variável no tempo, $V(x, t)$, é dita positivo definida se for limitada por baixo por uma função positivo definida $V(x, t) > V(x) > 0$, para qualquer estado x , e se $V(0, t) = 0$.

1.6.2 Critério de Sylvester para determinar se uma matriz é positiva

O determinante da matriz deve ser positivo e os determinantes dos *minors* principais sucessivos também são positivos. Por exemplo, para que uma matriz 3×3 seja positiva definida é necessário

$$a_{1,1} > 0 \quad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} > 0 \quad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} > 0 \quad (1.51)$$

Exemplo: Mostre que a função $V(x) = 10x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 4x_1x_3$ é positivo definida usando o critério de Sylvester.

1.6.3 A Função de Liapunov

A Função de Liapunov é uma função positivo definida, contínua, com primeiras derivadas parciais contínuas e tem derivada temporal negativa definida.

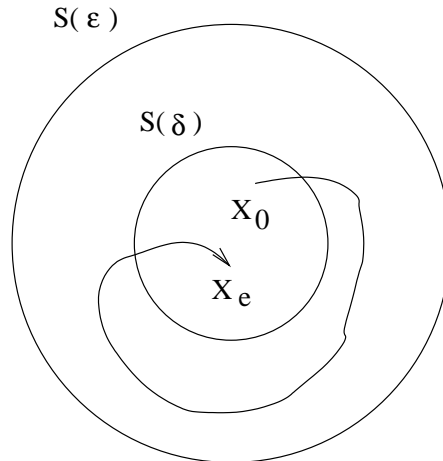


Figure 1.1: Estabilidade assintótica

1.6.4 Estabilidade segundo Lyapunov

Seja uma região esférica tal que $\|x - x_e\| < \delta$ denotada por $S(\delta)$. Um estado de equilíbrio x_e é dito estável se existe $S(\delta)$ tal que as trajetórias que começam em $S(\delta)$ não saem de $S(\epsilon)$ enquanto o tempo aumenta indefinidamente, ver fig. 1.1.

1.6.5 Estabilidade assintótica

Um estado x_e é dito assintoticamente estável se qualquer solução que tem início em $S(\delta)$ converge, sem sair de $S(\epsilon)$, para x_e a medida que o tempo aumenta indefinidamente, ver fig. 1.1.

Se δ não depende de do instante inicial t_0 então o estado de equilíbrio é dito uniformemente assintoticamente estável.

1.6.6 Instabilidade

Um estado de equilíbrio x_e é dito instável se para um numero real $\epsilon > 0$ e outro numero $\delta > 0$, não importa quão pequeno, existe sempre um estado x_0 em $S(\delta)$ tal que a trajetória sai de $S(\epsilon)$, ver fig. 1.1

1.6.7 Teorema sobre estabilidade assintótica

Seja uma sistema descrito por $\dot{x} = f(x, t)$, onde $f(0, t) = 0$ para qualquer t . Se existe uma função escalar $V(x, t)$, com derivadas parciais contínuas satisfazendo

- $V(x)$ é positivo definida
- $\dot{V}(x, t)$ é negativo definida

então, o estado de equilíbrio na origem é uniformemente assintoticamente estável.

1.6.8 Teorema sobre estabilidade no tempo discreto

Seja uma sistema descrito por $x((k+1)T) = f(x(kT))$, onde $f(0, k) = 0$ para qualquer k . Se existe uma função escalar $V(x)$, contínua em x satisfazendo

- $V(x)$ é positivo definida
- $\Delta V = V(x((k+1)T)) - V(x(kT)) < 0$
- $V(x) \rightarrow \infty$ enquanto $\|x\| \rightarrow \infty$

então, o estado de equilíbrio na origem é assintoticamente estável e $V(x)$ é uma função de Lyapunov.

1.6.9 Estabilidade de um sistema discreto invariante no tempo

Considere um sistema discreto invariante no tempo $x(k+1) = Gx(k)$, onde origem é estado de equilíbrio $x_e = 0$. Uma possível função de Lyapunov é

$$V(x(k)) = x^*(k)Px(k) \quad (1.52)$$

onde P é Hermitiana, $P^* = P$. O símbolo $*$ denota conjugado transposto.

Então

$$\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k)) = x^*(k+1)Px(k+1) - x^*(k)Px(k) \quad (1.53)$$

ou seja,

$$\Delta V(x(k)) = [Gx(k)]^*PGx(k) - x^*(k)Px(k) = x^*(k)(G^*PG - P)x(k) \quad (1.54)$$

Convém chamar $G^*PG - P = -Q$ e neste caso

$$\Delta V(x(k)) = -x^*(k)Qx(k) \quad (1.55)$$

A condição necessária e suficiente para que $x = 0$ seja assintoticamente estável é que dada uma matriz Q , positiva definida real simétrica, existe uma matriz P , positivo definida Hermitiana.

Exemplo: Determine a estabilidade na origem do sistema

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -1 \end{bmatrix} x(k) \quad (1.56)$$

Solução: Seja $Q = I$, se P que satisfaz $G^t P G - P = -Q$ for hermitiana, positivo definida, então o sistema será estável na origem.

1.7 Teorema de Cayley-Hamilton

Seja A uma matriz $n \times n$ com polinômio característico

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (1.57)$$

então a matriz A satisfaz seu polinômio característico

$$A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A + a_n = 0 \quad (1.58)$$

Vamos demonstrar este teorema para o caso particular em que A é diagonalizável, ou seja, A tem autovalores distintos. Matriz de autovetores M reduz a matriz A a uma matriz diagonal

$$A = M \Lambda M^{-1} \rightarrow A^k = M \Lambda^k M^{-1} \quad (1.59)$$

Ao substituir λ no polinômio característico resulta

$$A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A + a_n \quad (1.60)$$

Substituindo a eq. 1.59 na eq. 1.60

$$M[\Lambda^n + a_1 \Lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \Lambda + a_n] M^{-1} = 0 \quad (1.61)$$

Cada linha do termo entre colchetes é precisamente o polinômio característico com $\lambda = \text{autovalor}$ e portanto cada linha é necessariamente nula. Desta forma a matriz A satisfaz seu próprio polinômio característico.

As consequências deste fato são vastas. **Observem que A^n é linearmente dependente de A^{n-1}, \dots, A e I .**

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CG \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.66)$$

tenha posto completo. Pelo teorema de Cayley-Hamilton não adianta estender o número de observações por que G^n não irá alterar o posto da matriz de observabilidade. Define-se a matriz da eq. 1.66 como matriz de observabilidade e o sistema será observável se ela for de posto completo.

Exemplo 6-5 Ogata: Considere o sistema no tempo contínuo

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (1.67)$$

e

$$y = \begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (1.68)$$

1. o sistema é controlável?
2. o sistema é observável?
3. determine os autovalores de A ;
4. mostre que o sistema discreto com intervalo de amostragem T tem $G = [\cos T \ \sin T; -\sin T \ \cos T]$ e $H = [(1 - \cos T); \sin T]$;
5. mostre que para $T = n\pi$ com $n = 1, 2, \dots$, $G = I$ ou $G = -I$;
6. mostre que nestas condições o sistema não é controlável.

A matriz G pode ser calculada por

$$G = e^{AT} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}] = \mathcal{L}^{-1} \left(\left[\begin{array}{cc} s & -1 \\ 1 & s \end{array} \right]^{-1} \right) \quad (1.69)$$

calculando a matriz inversa entre colchetes

$$G = \exp(AT) = \mathcal{L}^{-1} \left(\left[\begin{array}{cc} \frac{s}{s^2+1} & \frac{1}{s^2+1} \\ \frac{-1}{s^2+1} & \frac{s}{s^2+1} \end{array} \right] \right) \quad (1.70)$$

e finalmente,

$$G = \begin{bmatrix} \cos(T) & \sin(T) \\ -\sin(T) & \cos(T) \end{bmatrix} \quad (1.71)$$

1.10 Controle por locação de pólos

Considere o sistema discreto

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \quad (1.72)$$

se a dinâmica do sistema no é satisfatória pode-se realimentar o estado através de uma matriz de ganho

O sinal de controle, admitindo um sinal de referência $r(k)$

$$u(k) = r(k) - Kx(k) \quad (1.73)$$

consequentemente,

$$x(k+1) = Gx(k) + H(r(k) - Kx(k)) \quad (1.74)$$

ou seja,

$$x(k+1) = (G - HK)x(k) + Hr(k) \quad (1.75)$$

Se o sistema da eq. 1.72 for controlável então existe uma matriz K que os autovalores da matriz $G - HK$ sejam arbitrariamente alocados.

Na prática, este tipo de controle enfrenta um desafio, normalmente o estado $x(k)$ não é observado, apenas um vetor de dimensão menor $y(k) = Cx(k)$ é observado. Este problema é contornado através do emprego de um observador de estado completo. Um observador de estado completo estima o estado completo a partir da história das observações $y(k)$, das história de controle $u(k)$ e informação a priori como, por exemplo, um modelo da planta.

1.11 Observador de estado completo

Luenberger propôs um observador na forma de um sistema dinâmico linear nas observações $y(k)$ e linear na história de controle $u(k)$.

$$\hat{x}(k+1) = G_o\hat{x}(k) + Ly(k) + Mu(k) \quad (1.76)$$

Convém definir o vetor erro de observação

$$e(k) = x(k) - \hat{x}(k) \quad (1.77)$$

e consequentemente,

$$e(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1) \quad (1.78)$$

A partir desta última equação,

$$e(k+1) = Gx(k) + Hu(k) - (G_O\hat{x}(k) + Ly(k) + Mu(k)) \quad (1.79)$$

Reagrupando e substituindo $Ly(k)$ por $LCx(k)$ resulta

$$e(k+1) = Gx(k) + Hu(k) - G_O\hat{x}(k) - LCx(k) - Mu(k) \quad (1.80)$$

Adota-se por conveniência, $M = H$, e neste caso,

$$e(k+1) = Gx(k) - G_O\hat{x}(k) - LCx(k) \quad (1.81)$$

Reagrupando os termos em $x(k)$

$$e(k+1) = (G - LC)x(k) - G_O\hat{x}(k) \quad (1.82)$$

E finalmente, se $G_O = G - LC$, a dinâmica do erro passa a depender apenas dos autovalores de $G - LC$,

$$e(k+1) = (G - LC)e(k) \quad (1.83)$$

Se o sistema original for observável, pode-se alocar arbitrariamente os autovalores de $G - LC$ através da escolha da matriz L .

1.12 Fórmula de Ackerman para a matriz de ganho do controlador

Considere o sistema

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \quad (1.84)$$

utilizando realimentação de estado do tipo $u(k) = -Kx(k)$, deseja-se que o sistema de malha fechada tenha pólos em $z = \nu_1, z = \nu_2, \dots, z = \nu_n$. Deseja-se portanto que a equação característica seja

$$|zI - G + HK| = (z - \nu_1)(z - \nu_2) \dots (z - \nu_n) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} z^1 + \alpha_n = 0 \quad (1.85)$$

Define-se por conveniência $\bar{G} = G - HK$. Do teorema de Cayley-Hamilton, \bar{G} satisfaz sua equação característica

$$\bar{G}^n + \alpha_1 \bar{G}^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \bar{G}^1 + \alpha_n I = \Phi(\bar{G}) = 0 \quad (1.86)$$

Considere a expansão de \bar{G}^n

$$\begin{aligned} I &= I \\ \bar{G} &= G - HK \\ \bar{G}^2 &= G^2 - GHK - HK\bar{G} \\ &\vdots \\ \bar{G}^n &= G^n - G^{n-1}HK - \dots - HK\bar{G}^{n-1} \end{aligned} \quad (1.87)$$

Multiplicando as equações por $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ e somando,

$$\Phi(\bar{G}) = \alpha_n I + \alpha_{n-1} \bar{G}^1 + \dots + \alpha_1 \bar{G}^{n-1} + G^n - \alpha_{n-1} HK - \alpha_{n-2} GHK - \alpha_{n-2} HK\bar{G} - \dots \quad (1.88)$$

que pode ser reescrito em forma matricial

$$\Phi(\bar{G}) = \Phi(G) - [H \ GH \ \dots \ G^{n-1}H] \begin{bmatrix} \alpha_{n-1}K + \alpha_{n-2}K\bar{G} + \dots + K\bar{G}^{n-1} \\ \alpha_{n-2}K + \alpha_{n-3}K\bar{G} + \dots + K\bar{G}^{n-2} \\ \vdots \\ K \end{bmatrix} = 0 \quad (1.89)$$

Multiplicando pela inversa da matriz de controlabilidade,

$$\begin{bmatrix} \alpha_{n-1}K + \alpha_{n-2}K\bar{G} + \dots + K\bar{G}^{n-1} \\ \alpha_{n-2}K + \alpha_{n-3}K\bar{G} + \dots + K\bar{G}^{n-2} \\ \vdots \\ K \end{bmatrix} = [H \ GH \ \dots \ G^{n-1}H]^{-1} \Phi(G) \quad (1.90)$$

Finalmente, pré-multiplica-se por $[0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]$ e resulta

$$K = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1][H \ GH \ \dots \ G^{n-1}H]^{-1} \Phi(G) \quad (1.91)$$

Esta expressão de K é chamada de *fórmula de Ackerman*.

1.13 Fórmula de Ackerman para a matriz de ganho do observador

Para determinar a matriz de ganho do observador, também conhecida por matriz de Luenberger, podemos escrever,

$$L = \Phi(G) \begin{bmatrix} C \\ CG \\ CG^2 \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.92)$$

Esta expressão de L é chamada de *fórmula de Ackerman* para determinar o ganho do observador.

1.14 Controle Ótimo Quadrático

Condidere um sistema invariante no tempo do tipo,

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \quad (1.93)$$

e um índice de desempenho quadrático

$$J = \frac{1}{2}x^*(N)Sx(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [x^*(k)Qx(k) + u^*(k)Ru(k)] \quad (1.94)$$

Vamos demonstrar que a lei de controle que minimiza J tem a forma

$$u(k+1) = -K(k)x(k) \quad (1.95)$$

e caso o estado não puder ser todo medido, devemos utilizar um observador de estado.

Deseja-se minimizar J sujeito a restrições de como o estado evolui, eq. 1.93, e considerando o estado inicial especificado,

$$x(0) = c \quad (1.96)$$

Através do uso de multiplicadores de Lagrange, define-se um índice de desempenho aumentado, L ,

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2}x^*(N)Sx(N) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [x^*(k)Qx(k) + u^*(k)Ru(k)] \\ & + \lambda^*(k+1)[Gx(k) + Hu(k) - x(k+1)] \\ & + [Gx(k) + Hu(k) - x(k+1)]\lambda(k+1) \end{aligned} \quad (1.97)$$

onde cada $\lambda(k)$ é um vetor.

Para minimizar o índice aumentado L devemos impor derivada parcial com respeito a cada componente dos vetores λ , \mathbf{u} e \mathbf{x} igual a zero. Do ponto

de vista computacional é melhor derivar L com respeito a $\bar{\lambda}$, $\bar{\mathbf{u}}$ e $\bar{\mathbf{x}}$. Para $i = 1, 2, \dots, n$ e $k = 1, 2, \dots, N$ resulta,

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{x}_i(k)} = \mathbf{0} \quad (1.98)$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\lambda}_i(k)} = \mathbf{0} \quad (1.99)$$

E para $i = 1, 2, \dots, n$ e $k = 1, 2, \dots, N$,

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{u}_i(k)} = \mathbf{0} \quad (1.100)$$

Invoca-se agora uma regra da derivada parcial de formas bilineares quadráticas complexas,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} x^* Ay = Ay \quad (1.101)$$

para facilitar o desenvolvimento. Obtem-se um conjunto de equações que formam *Two point boundary value problem*, TPBVP.

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{x}(k)} = 0 \rightarrow Qx(k) + G^* \lambda(k+1) - \lambda(k) = 0 \quad (1.102)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{x}(N)} = 0 \rightarrow Sx(N) - \lambda(N) = 0, \quad (1.103)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{u}(k)} = 0 \rightarrow Ru(k) + H^* \lambda(k+1) = 0, \quad (1.104)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{x}(k)} = 0 \rightarrow Gx(k-1) + Hu(k-1) - x(k) = 0 \quad (1.105)$$

Estas equações admitem simplificações,

$$\lambda(k) = Qx(k) + G^* \lambda(k+1), \quad (1.106)$$

$$\lambda(N) = Sx(N), \quad (1.107)$$

$$u(k) = -R^{-1} H^* \lambda(k+1), \quad (1.108)$$

e

$$x(k+1) = Gx(k) + HR_{-1}H^*\lambda(k+1) \quad (1.109)$$

com a condição inicial $x(0) = c$.

Covém eliminar λ destas equações através da seguinte substituição,

$$\lambda(k) = P(k)x(k) \quad (1.110)$$

Ao substituir a eq. 1.110 na eq. 1.106 resulta,

$$P(k)x(k) = Qx(k) + G^*P(k+1)x(k+1) \quad (1.111)$$

Ainda mais, ao substituir a eq. 1.110 na eq. 1.93 resulta,

$$x(k+1) = Gx(k) + HR_{-1}H^*P(k+1)x(k+1) \quad (1.112)$$

Desta última equação,

$$[I + HR_{-1}H^*P(k+1)]x(k+1) = Gx(k) \quad (1.113)$$

onde, para sistemas controláveis, demonstra-se que a inversa do termo entre colchetes existe. E portanto,

$$x(k+1) = [I + HR_{-1}H^*P(k+1)]^{-1}Gx(k) \quad (1.114)$$

Substitue-se a eq. 1.114 na eq. 1.111 e obtém-se

$$P(k)x(k) = Qx(k) + G^*P(k+1)[I + HR_{-1}H^*P(k+1)]^{-1}Gx(k) \quad (1.115)$$

que rearranja-se

$$[P(k) - Q - G^*P(k+1)[I + HR_{-1}H^*P(k+1)]^{-1}G]x(k) = 0 \quad (1.116)$$

Entretanto, esta última equação deve valer para todo $x(k)$ e isto implica que

$$P(k) = Q + G^*P(k+1)[I + HR_{-1}H^*P(k+1)]^{-1}G \quad (1.117)$$

Há um lema de inversão de matrizes,

$$(A + BD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(I + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1} \quad (1.118)$$

que pode ser usado para rearranjar a eq. 1.117 com $A = I$, $B = HR^{-1}$ e $D = H^*P(k+1)$,

$$P(k) = Q + G^*P(k+1)G - G^*P(k+1)H[R + H^*P(k+1)]^{-1}H^*P(k+1)G \quad (1.119)$$

esta é a equação de Riccati.

Note que decorre da eq. 1.103 e da eq. 1.110 que para $k = N$

$$P(k) = S \quad (1.120)$$

A equação de Riccati pode ser resolvida de trás para frente, determinando $P(N)$, $P(N-1)$, \dots , $P(0)$.

Para determinar a história de controle parte-se da eq. 1.108 e da eq. 1.106 que resulta,

$$u(k) = -R^{-1}H^*(G^*)^{-1}[\lambda(k) - Qx(k)] , \quad (1.121)$$

que, eliminando λ torna-se

$$u(k) = -R^{-1}H^*(G^*)^{-1}[P(k) - Q]x(k) = -K(k)x(k) \quad (1.122)$$

e evidencia o ganho ótimo $K(k)$,

$$K(k) = -R^{-1}H^*(G^*)^{-1}[P(k) - Q] \quad (1.123)$$

1.15 Exercícios Recomendados

1.15.1 Formas canônicas

Problemas resolvidos

: A-5-1, A-5-2, A-5-3

Exemplos resolvidos

: 5-1

Problemas propostos

: B-5-1, B-5-2, B-5-3, B-5-4

1.15.2 Solução de Equações de Diferenças

Exemplos resolvidos

: 5-3

Exemplos resolvidos

: A-5-14, A-5-16

1.15.3 Estabilidade de Lyapunov**Exemplos resolvidos**

:5-9

Problemas resolvidos

:A-5-17, A-5-22

Problemas propostos

: B-5-21, B-5-22, B-5-23, B-5-24

1.15.4 Alocação de Pólos e Observadores**Exemplos resolvidos**

:6-2,6-4, 6-5, 6-6 método 2, 6-8, 6-9, 6-10 método 2.

Problemas resolvidos

:A-6-3, A-6-10, A-6-16

Problemas propostos

: B-6-6, B-6-7, B-6-9, B-6-11, B-6-16.

Chapter 2

A Transformada de Laplace e a Transformada Z

Veículos automotivos tem um crescente número de sistemas com realimentação. Sistemas que controlam a velocidade de cruzeiro, câmbio contínuo, sistemas de injeção eletrônica e suspensão ativa são alguns exemplos.

Considere um veículo que tem sua velocidade aumentada em 10km/h ao aumentar 1° no ângulo da borboleta do carburador e tem sua velocidade diminuída em 5km/h quando a pista tem uma elevação de 1° . Em um trecho de pista é horizontal, o ângulo da borboleta α é tal que a velocidade do veículo é de 80km/h . Uma representação do sistema em malha aberta pode ser visto na fig. 2.1.

A equação que relaciona velocidade de referência r , velocidade v e inclinação da pista w decorre do diagrama fig. 2.1

$$v = 10 \left(\frac{r}{10} - 0.5w \right) \quad (2.1)$$

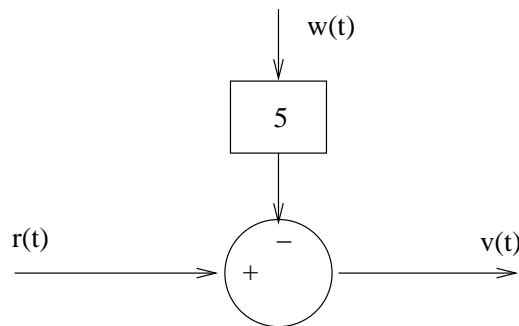


Figure 2.1: Sistema de controle em malha aberta de velocidade de cruzeiro

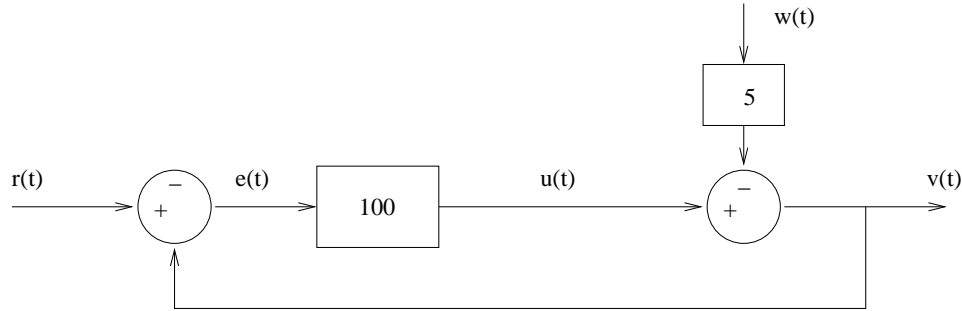


Figure 2.2: Sistema de controle em malha fechada de velocidade de cruzeiro

Portanto, quando a inclinação da pista é nula, o erro na velocidade é nulo. Quando a inclinação da pista é 1° , o erro na velocidade é $5km$, $v = 75km$ em vez de $v = 80km$.

Vamos comparar o erro na velocidade caso houvesse uma malha de controle com realimentação conforme a fig. 2.2.

A partir do diagrama da fig. 2.2 pode-se afirmar que

$$v = u - 5.0w \quad (2.2)$$

e

$$v = 100(r - v) \quad (2.3)$$

ou seja,

$$v = 0.999r - 0.05w \quad (2.4)$$

Neste caso, controle proporcional em malha fechada, o erro na velocidade quando a velocidade de referência é $r = 80km/h$ e o ângulo de inclinação da pista é $w = 1^\circ$ resulta muito menor. O erro é de $0.05km/h$.

Se o ganho do controlador se tornar muito grande, o sistema pode se tornar instável. Deseja-se, em geral, um controlador que diminua erros e que o sistema de malha fechada seja estável.

2.1 A Transformada de Laplace bilateral

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau} d\tau \quad (2.5)$$

2.1.1 Introdução

Através da transformada de Laplace derivadas temporais correspondem a uma multiplicação pela variável s e, desta forma, equações diferenciais ordinárias tornam-se equações algébricas. A transformada de Laplace é utilizada na solução de equações diferenciais ordinárias, equações de diferenças, equações integrais, e equações diferenciais parciais. Alguns critérios de estabilidade de sistemas lineares são formulados e visualizados no plano complexo s .

2.1.2 Definição

Seja $f(t) = 0$ para $t < 0$ e s uma variável complexa. A transformada de Laplace lateral da função $f(t)$ é

$$LP[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (2.6)$$

2.1.3 Condições de existência da transformada

A transformada de Laplace existe se a integral de Laplace converge. A integral converge se $f(t)$ for contínua por trechos e se for de ordem exponencial quando t tende a infinito. Uma função é dita de ordem exponencial se existe um real σ positivo tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\sigma t} |f(t)| = 0 \quad (2.7)$$

Por exemplo, a função e^{t^2} com $0 < t < \infty$ não possui transformada de Laplace pois não é de ordem exponencial. Entretanto, a função

$$f(t) = e^{t^2} \text{ for } 0 < t < T \quad (2.8)$$

$$= 0 \text{ for } t \leq 0 \text{ e } t > T \quad (2.9)$$

possui transformada de Laplace. Sinais fisicamente gerados sempre possuem transformada de Laplace.

2.1.4 A transformada de algumas funções

Função exponencial

Considere a função exponencial

$$f(t) = 0 \text{ for } t < 0 \quad (2.10)$$

$$= Ae^{-\alpha t} \text{ for } t \geq 0 \quad (2.11)$$

sua transformada de Laplace é

$$LP[f(t)] = \int_0^{\infty} Ae^{-\alpha t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} Ae^{-(\alpha+s)t} dt = \frac{A}{s + \alpha} \quad (2.12)$$

Função degrau

Considere a função degrau

$$f(t) = 0 \text{ for } t < 0 \quad (2.13)$$

$$= A \text{ for } t > 0 \quad (2.14)$$

sua transformada de Laplace é

$$LP[A] = \int_0^{\infty} Ae^{-st} dt = \frac{A}{s} \quad (2.15)$$

Função rampa

Considere a função rampa

$$f(t) = 0 \text{ for } t < 0 \quad (2.16)$$

$$= At \text{ for } t \geq 0 \quad (2.17)$$

sua transformada de Laplace é

$$LP[At] = \int_0^{\infty} Ate^{-st} dt \quad (2.18)$$

que pode ser integrada por partes

$$LP[At] = A \left(t \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{-s} dt \right) = \frac{A}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{A}{s^2} \quad (2.19)$$

Função senoidal

Considere a função senoidal

$$f(t) = 0 \text{ for } t < 0 \quad (2.20)$$

$$= A \sin(\omega t) \text{ for } t \geq 0 \quad (2.21)$$

sua transformada de Laplace é

$$LP[A \sin(\omega t)] = \int_0^{\infty} \frac{A}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) dt \quad (2.22)$$

$$= \frac{A}{2j} \frac{1}{(s - j\omega)} - \frac{A}{2j} \frac{1}{(s + j\omega)} \quad (2.23)$$

$$= \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (2.24)$$

Função pulso

Considere a função pulso

$$f(t) = \frac{A}{t_0} \text{ for } 0 < t < t_0 \quad (2.25)$$

$$= 0 \text{ for } t < 0 \text{ e } t > t_0 \quad (2.26)$$

que pode ser definida em termos da função degrau

$$f(t) = \frac{A}{t_0} 1(t) - \frac{A}{t_0} 1(t - t_0) \quad (2.27)$$

A transformada de Laplace torna-se

$$LP[f(t)] = LP[1(t)] - LP[1(t - t_0)] \quad (2.28)$$

$$= \frac{A}{t_0 s} - \frac{A}{t_0 s} e^{-st_0} \quad (2.29)$$

$$= \frac{A}{t_0 s} (1 - e^{-st_0}) \quad (2.30)$$

Função impulso

Considere a função impulso

$$f(t) = \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{A}{t_0} \text{ for } 0 < t < t_0 \quad (2.31)$$

$$= 0 \text{ for } t < 0 \text{ e } t > t_0 \quad (2.32)$$

sua transformada de Laplace é

$$LP[f(t)] = \lim_{t_0 \rightarrow 0} \left[\frac{A}{t_0 s} (1 - e^{-st_0}) \right] \quad (2.33)$$

$$= \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dt_0} [A(1 - e^{-st_0})]}{\frac{d}{dt_0} (st_0)} \quad (2.34)$$

$$= \frac{As}{s} = A \quad (2.35)$$

2.1.5 Superposição

A transformada de Laplace é um operador linear, ou seja,

$$LP[f_1(t) + f_2(t)] = LP[f_1(t)] + LP[f_2(t)] \quad (2.36)$$

2.1.6 Translação de uma função

Considere a função $f(t-\alpha)1(t-\alpha)$ com $\alpha > 0$. Observe que o degrau unitário impõe valores nulos para $t < \alpha$. Por definição a transformada de Laplace é

$$LP[f(t-\alpha)1(t-\alpha)] = \int_0^\infty f(t-\alpha)1(t-\alpha)e^{-st} dt \quad (2.37)$$

Mudando a variável de integração de t para τ onde $\tau = t - \alpha$

$$LP[f(t-\alpha)1(t-\alpha)] = \int_{-\alpha}^\infty f(\tau)1(\tau)e^{-s(\tau+\alpha)} dt \quad (2.38)$$

$$= \int_0^\infty f(\tau)1(\tau)e^{-s(\tau+\alpha)} dt \quad (2.39)$$

$$= \int_0^\infty f(\tau)1(\tau)e^{-s\tau} e^{-s\alpha} dt \quad (2.40)$$

$$= e^{-s\alpha} \int_0^\infty f(\tau)1(\tau)e^{-s\tau} dt \quad (2.41)$$

$$= e^{-s\alpha} F(s) \quad (2.42)$$

2.1.7 Multiplicação por $e^{-\alpha t}$

A transformada de Laplace de uma função $f(t)$ amortecida por $e^{-\alpha t}$ resulta em

$$LP[e^{-\alpha t} f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} f(t) e^{-st} dt = F(s + \alpha) \quad (2.43)$$

Ou seja, multiplicar por uma exponencial provoca um deslocamento da função no plano s .

2.1.8 Limite inferior da transformada de Laplace

Se a função $f(t)$ contém um impulso em $t = 0$ convém distinguir dois tipos de transformada de Laplace

$$LP_+[f(t)] = \int_{0+}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (2.44)$$

$$LP_-[f(t)] = \int_{0-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (2.45)$$

2.1.9 Teorema da Diferenciação

Integra-se a transformada de Laplace por partes

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = f(t) \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] \frac{e^{-st}}{-s} dt \quad (2.46)$$

ou seja,

$$F(s) = \frac{f(0)}{s} + \frac{1}{s} LP \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] \quad (2.47)$$

rearranjando,

$$LP \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] = sF(s) - f(0) \quad (2.48)$$

Analogamente,

$$LP \left[\frac{d^2}{dt^2} f(t) \right] = s^2 F(s) - sf(0) - \dot{f}(0) \quad (2.49)$$

2.1.10 Teorema do valor final

Uma propriedade importante da Transformada de Laplace é o Teorema do valor final, ela permite calcular o limite de uma função quando o tempo tende a infinito, ou seja, o valor de regime permanente, quando este limite existe.

Existem tres possibilidades para o limite de uma função quando o tempo tende a infinito, o limite é constante, o limite é indefinido ou a função é ilimitada. Se a Transformada de Laplace, $Y(s)$, tiver algum pólo no semiplano direito, $y(t)$ será ilimitada. Se $Y(s)$ tiver um par de pólos no eixo imaginário, então $y(t)$ contém uma função seno que persiste para sempre e o valor final não é definido. Se todos os pólos estiverem no semiplano esquerdo de s e apenas um pólo estiver em $s = 0$, então todos os termos de $y(t)$ decaem para zero exceto um termo que é constante no tempo.

Teorema: Se todos os pólos de $Y(s)$ pertencem ao semiplano esquerdo, então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) \quad (2.50)$$

De fato, a transformada de Laplace da derivada de uma função é

$$L \left[\frac{df}{dt} \right] = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{df}{dt} dt \quad (2.51)$$

Mostra-se conveniente investigar o limite da eq. 2.51 quando $s \rightarrow 0$,

$$\lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0^-)] = \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{df}{dt} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0^-) \quad (2.52)$$

como se desejava demonstrar.

2.1.11 Teorema do valor inicial

Outro teorema permite calcular o valor inicial de uma função quando se conhece a sua transformada de Laplace.

Teorema: Para qualquer par, $F(s)$ e $f(t)$, associado pela transformada de Laplace,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0^+) \quad (2.53)$$

De fato, a transformada de Laplace da derivada de uma função é

$$L \left[\frac{df}{dt} \right] = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{df}{dt} dt \quad (2.54)$$

Mostra-se conveniente investigar o limite de $s \rightarrow \infty$ da eq. 2.54,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} L \left[\frac{df}{dt} \right] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[\int_{0^-}^{0^+} e^{-st} \frac{df}{dt} dt + \int_{0^+}^{\infty} e^{-st} \frac{df}{dt} dt \right] \quad (2.55)$$

O segundo termo da eq. 2.55 tende a zero uma vez que $e^{-st} \rightarrow 0$. O primeiro termo é igual a $sF(s) - f(0^-)$, desta forma,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0^-)] = \lim_{s \rightarrow \infty} [f(0^+) - f(0^-)] \quad (2.56)$$

ou seja,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0^+) \quad (2.57)$$

2.1.12 Teorema da Integral

Deseja-se agora determinar a transformada de Laplace da integral no tempo de uma função,

$$F_1(s) = L \left[\int_0^t f(\zeta) d\zeta \right] = \int_0^{\infty} \left[\int_0^t f(\zeta) d\zeta \right] e^{-st} dt \quad (2.58)$$

Integrando por partes, onde

$$u = \int_0^t f(\zeta) d\zeta \quad (2.59)$$

e

$$dv = e^{-st} dt \quad (2.60)$$

Resulta,

$$F_1(s) = \left[-\frac{e^{-st}}{s} \int_0^t f(\zeta) d\zeta \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{s} e^{-st} f(t) dt = \frac{1}{s} F(s) \quad (2.61)$$

2.1.13 Transformada Inversa de Laplace

A maneira mais simples de determinar a transformada inversa de Laplace é através da consulta de tabelas de transformadas de Laplace. Outra maneira consiste em expandir a função $F(s)$ em frações parciais.

Expansão em frações parciais

Vamos considerar inicialmente $F(s)$ que envolve pólos distintos. A função $F(s)$ pode sempre ser expandida em uma soma de frações parciais.

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{a_1}{s + p_1} + \frac{a_2}{s + p_2} + \dots + \frac{a_n}{s + p_n} \quad (2.62)$$

Os valores dos resíduos a_k podem ser determinados por,

$$a_k = \left[(s + p_k) \frac{B(s)}{A(s)} \right]_{s=-p_k} \quad (2.63)$$

Uma vez que,

$$LP^{-1} \left[\frac{a_k}{s + p_k} \right] = a_k e^{-p_k t} \quad (2.64)$$

$F(t)$ resulta,

$$f(t) = \sum_{k=1}^n a_k e^{-p_k t} \quad (2.65)$$

2.1.14 Solução de Equações Lineares Invariantes no Tempo

Vamos abordar a técnica de solução de equações lineares invariantes no tempo usando a Transformada de Laplace através de um exemplo.

Exemplo: Determine a solução de

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 4y(t) = 3 \quad (2.66)$$

onde $y(0) = \alpha$, $\dot{y}(0) = \beta$. Determina-se a Transformada de Laplace dos dois lados da eq. 2.66

$$s^2 Y(s) - s\alpha - \beta + 5[sY(s) - \alpha] + 4Y(s) = \frac{3}{s} \quad (2.67)$$

Isola-se $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{s(s\alpha + \beta + 5\alpha) + 3}{s(s + 1)(s + 4)} \quad (2.68)$$

Convém reescrever $Y(s)$ na forma de frações parciais

$$Y(s) = \frac{3}{s} - \frac{3-\beta-4\alpha}{s+1} + \frac{3-4\alpha-4\beta}{s+4} \quad (2.69)$$

Utilizando a transformada inversa de Laplace de uma fração parcial

$$y(t) = \frac{3}{4} - \frac{3-\beta-4\alpha}{3}e^{-t} + \frac{3-4\alpha-4\beta}{12}e^{-4t} \quad (2.70)$$

2.2 A Transformada Z

A transformada z tem o mesmo papel na análise de sistemas discretos lineares e invariantes no tempo que a transformada de Laplace tem na análise de sistemas lineares, invariantes e contínuos no tempo. A convolução no tempo torna-se um produto de funções no domínio da transformada z .

2.2.1 A transformada z bilateral

A transformada z de uma sequência discreta é definida pela soma

$$X(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (2.71)$$

onde z é uma variável complexa.

Uma vez que a transformada z é definida por uma série infinita, ela existe apenas para os valores de z em que a série converge. A região de convergência (ROC) é o conjunto de valores de z em que a série $X(z)$ assume um valor finito. A ROC de um sinal causal é a região externa de um círculo. A ROC de um sinal anti-causal é a região interna de um círculo.

Exemplo: Indique o ROC da sequência

$$x(n) = 1, 2, 5, 7, 0, 1 \quad (2.72)$$

↑

onde a seta vertical denota o instante $n = 0$

A partir da definição da transformada z

$$X(z) = z^2 + 2z + 5 + 7z^{-1} + z^{-3} \quad (2.73)$$

e portanto, a região de convergência é o plano z completo com exceção do do ponto $z = 0$ e do ponto $z = \infty$

Uma série finita ou infinita pode ser representada em forma fechada no domínio z .

Exemplo: Determine a transformada z da sequência

$$x(n) = 1, \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \dots \quad (2.74)$$

solução: da definição de transformada z

$$X(z) = 1 + \frac{1}{2}z^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 z^{-2} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} + \dots \quad (2.75)$$

ou melhor,

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n \quad (2.76)$$

Esta expressão é uma série geométrica infinita

$$1 + A + A^2 + \dots = \frac{1}{1-A} \quad \text{if } |A| < 1 \quad (2.77)$$

Desta forma, a transformada z de $x(n)$ torna-se

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (2.78)$$

com ROC tal que

$$\left|\frac{1}{2}z^{-1}\right| < 1 \rightarrow |z| > \frac{1}{2} \quad (2.79)$$

Uma sequência discreta é univocamente determinada através de sua transformada z se a região de convergência for especificada.

Exemplo: Determine a ROC da sequência

$$x(n) = \alpha^n 1(n) + \beta^n 1(-n-1) \quad (2.80)$$

solução: A partir da definição da transformada z ,

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \beta^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n + \sum_{m=1}^{\infty} (\beta^{-1} z)^m \quad (2.81)$$

portanto a ROC é tal que

$$|\alpha z^{-1}| < 1 \rightarrow |z| > |\alpha| \quad (2.82)$$

e

$$|\beta^{-1}z| < 1 \rightarrow |z| < |\beta| \quad (2.83)$$

2.2.2 Transformada z lateral

A transformada z bilateral requer que os sinais estejam definidos na faixa de tempo de $-\infty < n < \infty$. A transformada z lateral permite resolver equações de diferenças com condições iniciais especificadas. Por definição a transformada z lateral é

$$X^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (2.84)$$

Não é necessário informar a ROC da transformada z uma vez que os sinais são todos causais. A transformada z lateral não contém informação a respeito sobre o sinal quando $n < 0$).

Exemplo: Determine a transformada z lateral da sequência

$$x(n) = \begin{matrix} 1, 2, 5, 7, 0, 1 \\ \uparrow \end{matrix} \quad (2.85)$$

A partir da definição da transformada z lateral

$$X(z) = +5 + 7z^{-1} + z^{-3} \quad (2.86)$$

e portanto a transformada z lateral é diferente da transformada z bilateral neste caso.

2.2.3 Propriedades da transformada z

Multiplicação por constante

$$Z^+[ax(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} ax(k)z^{-k} \quad (2.87)$$

ou seja,

$$Z^+[ax(k)] = a \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = aX^+(z) \quad (2.88)$$

Linearidade

$$Z^+[\alpha f(k) + \beta g(k)] = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} + \beta \sum_{k=0}^{\infty} g(k)z^{-k} \quad (2.89)$$

ou seja,

$$Z^+[\alpha f(k) + \beta g(k)] = \alpha F(z) + \beta G(z) \quad (2.90)$$

Multiplicação por a^k

$$Z^+[a^k x(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)(a^{-1}z)^{-k} = X^+(a^{-1}z) \quad (2.91)$$

Teorema do deslocamento no tempo

$$Z^+[x(k-n)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k-n)z^{-k} \quad (2.92)$$

ou seja,

$$Z^+[x(k-n)] = z^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} x(k-n)z^{-(k-n)} \quad (2.93)$$

admitindo $x(n)$ causal, e $m = k - n$

$$Z^+[x(k-n)] = z^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} x(m)z^{-m} = z^{-n} X^+(z) \quad (2.94)$$

Teorema da translação complexa

$$Z^+[e^{akT} x(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{akT} x(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)(ze^{aT})^{-k} = X^+(ze^{aT}) \quad (2.95)$$

2.2.4 Teorema do valor inicial

$$X^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots \quad (2.96)$$

Vamos investigar o valor que $X(z)$ assume quando $z \rightarrow \infty$,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x(0) \quad (2.97)$$

Este teorema é útil para avaliar $x(0)$ quando uma expressão compacta de $X(z)$ é disponível.

Teorema do valor final

Considere uma sequência $x(k)$, causal, e com todos os pólos dentro do círculo unitário, com uma única possível exceção, a existência de um pólo em $z = 1$. Nestas condições a sequência $x(k)$ é dita estável. Da definição de transformada z

$$Z^+[x(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} \quad (2.98)$$

e

$$Z^+[x(k-1)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k-1)z^{-k} = z^{-1}X(z) \quad (2.99)$$

Subtraindo a última equação da penúltima equação

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} - \sum_{k=0}^{\infty} x(k-1)z^{-k} = X(z) - z^{-1}X(z) \quad (2.100)$$

Aplicando o limite,

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} - \sum_{k=0}^{\infty} x(k-1)z^{-k} \right) = \lim_{z \rightarrow 1} [(1 - z^{-1})X(z)] \quad (2.101)$$

O lado esquerdo da eq. 2.101 é

$$[x(0) - x(-1)] + [x(1) - x(0)] + [x(2) - x(1)] + \dots = x(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} x(k) \quad (2.102)$$

Portanto, da eq. 2.101 e da eq. 2.102, obtém-se

$$\lim_{z \rightarrow 1} (X(z) - z^{-1}X(z)) = \lim_{k \rightarrow \infty} x(k) \quad (2.103)$$

2.2.5 A transformada z inversa

É necessário conhecer a inversa da transformada z para que ela seja útil na análise de sistemas lineares. A seguir são apresentados quatro métodos de calcular a transformada inversa z .

Método da divisão direta

Este método é utilizado quando é difícil a obtenção de uma expressão em forma fechada para a transformada inversa $Z^{-1}[X(z)]$ ou estamos interessados apenas em alguns valores iniciais de $x(k)$.

A transformada $X(z)$ precisa estar na forma de racional, isto é, como a razão entre dois polinômios e tanto numerador quanto denominador devem ser representados como uma série de potências crescentes de z^{-1} .

Exemplo: Determine $x(k)$ quando

$$X(z) = \frac{10z + 5}{(z - 1)(z - 0.2)} \quad (2.104)$$

solução:

Inicialmente, numerador e denominador devem ser escritos como séries de potências crescentes de z^{-1}

$$X(z) = \frac{10z^{-1} + 5z^{-2}}{1 - 1.2z^{-1} + 0.2z^{-2}} \quad (2.105)$$

A divisão do numerador pelo denominador resulta

$$\begin{array}{r}
 1 - 1.2z^{-1} + 0.2z^{-2} \quad \frac{10z^{-1} + 17z^{-2} + 18z^{-3} + \dots}{10z^{-1} + 5z^{-2}} \\
 \underline{10z^{-1} - 12z^{-2} + 2z^{-3}} \\
 17z^{-2} - 2z^{-3} \\
 \underline{17z^{-2} - 20.4z^{-3} + 3.4z^{-4}} \\
 18.4z^{-3} - 3.4z^{-4}
 \end{array} \quad (2.106)$$

Portanto, a sequência $x(k)$ é

$$X(z) = 10z^{-1} + 17z^{-2} + 18z^{-3} + \dots \quad (2.107)$$

Método por equação de diferenças

A resposta de um sistema linear $y(k)$ é igual à convolução discreta entre sua função de transferência $g(k)$ e sua excitação $x(k)$.

$$Y(z) = G(z)X(z) \quad (2.108)$$

Exemplo: Considere um sistema linear com

$$G(z) = \frac{0.4673z - 0.3393}{z^2 - 1.5327z + 0.6607} \quad (2.109)$$

Forma-se a equação de diferenças a partir de

$$(z^2 - 1.5327z + 0.6607)Y(z) = (0.4673z - 0.3393)X(z) \quad (2.110)$$

ou seja,

$$y(k+2) - 1.5327y(k+1) + 0.6607y(k) = 0.4673x(k+1) - 0.339x(k) \quad (2.111)$$

Admitindo que $g(k) = 0$ para $k < 0$, e substituindo $k = -2$ e depois $k = -1$ determina-se $y(0)$ e $y(1)$ na equação anterior. Basta incrementar k para obter $y(2)$, $y(3)$, e assim por diante.

Método da expansão em frações parciais

Este método é muito útil quando $X(z)$ é uma função na forma

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_Mz^{-M}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + a_3z^{-3} + \dots + a_Nz^{-N}} \quad (2.112)$$

Se a_N for diferente de zero e $M < N$ a função racional é dita própria. Se a função $X(z)$ for imprópria, ela sempre pode ser escrita na forma de um polinômio mais uma função racional própria.

Eliminam-se as potências negativas em z ,

$$X(z) = \frac{b_0z^N + b_1z^{N-1} + b_2z^{N-2} + \dots + b_Mz^{N-M}}{z^N + a_1z^{N-1} + a_2z^{N-2} + a_3z^{N-3} + \dots + a_N} \quad (2.113)$$

A função $X(z)/z$ é sempre própria

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{b_0z^{N-1} + b_1z^{N-2} + b_2z^{N-3} + \dots + b_Mz^{N-M-1}}{z^N + a_1z^{N-1} + a_2z^{N-2} + a_3z^{N-3} + \dots + a_N} \quad (2.114)$$

Os valores de z que zeram o denominador da eq. 2.113 são chamados de pólos da função.

Pólos distintos

Quando os pólos são todos distintos, procura-se uma expansão do tipo

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A_1}{z - p_1} + \frac{A_2}{z - p_2} + \dots + \frac{A_N}{z - p_N} \quad (2.115)$$

Para determinar cada um dos A_k , multiplica-se $X(z)/z$ por $(z - p_k)$

$$\frac{(z - p_k)X(z)}{z} = \frac{(z - p_k)A_1}{z - p_1} + \frac{(z - p_k)A_2}{z - p_2} + \dots + \frac{(z - p_k)A_N}{z - p_N} \quad (2.116)$$

e finalmente, no limite em que $z \rightarrow z_k$ resulta A_k .

Pólos Múltiplos

Considere o caso em que o k -ésimo pólo tem multiplicidade l . A expansão em frações parciais deve conter os termos

$$\frac{A_{1k}}{z - p_k} + \frac{A_{2k}}{(z - p_k)^2} + \dots + \frac{A_{lk}}{(z - p_k)^l} \quad (2.117)$$

Multiplica-se toda a expansão em frações parciais por $(z - p_k)^l$. A expressão resultante e suas derivadas com respeito a z são avaliadas em $z = z_k$ para determinar os coeficientes A_k .

Exemplo: Determine a expansão em frações parciais de

$$X(z) = \frac{1}{(1 + z^{-1})(1 - z^{-1})^2} \quad (2.118)$$

Eliminam-se potências negativas de z

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z^2}{(z + 1)(z - 1)^2} \quad (2.119)$$

A expansão em frações parciais deve ter a forma

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A_1}{z + 1} + \frac{A_2}{z - 1} + \frac{A_3}{(z - 1)^2} \quad (2.120)$$

Multiplica-se a eq. 2.120 por $(z + 1)$ e resulta

$$\frac{(z + 1)X(z)}{z} = \frac{(z + 1)A_1}{z + 1} + \frac{(z + 1)A_2}{z - 1} + \frac{(z + 1)A_3}{(z - 1)^2} \quad (2.121)$$

Ao avaliar eq. 2.121 quando $z = -1$

$$A_1 = \frac{(z+1)X(z)}{z} = \frac{1}{4} \quad (2.122)$$

Multiplica-se a eq. 2.120 por $(z-1)^2$ e resulta

$$\frac{(z-1)^2 X(z)}{z} = \frac{(z-1)^2 A_1}{(z+1)} + \frac{(z-1)^2 A_2}{(z-1)} + \frac{(z-1)^2 A_3}{(z-1)^2} \quad (2.123)$$

e resulta

$$\frac{(z-1)^2 X(z)}{z} = \frac{(z-1)^2 A_1}{(z+1)} + (z-1)A_2 + A_3 \quad (2.124)$$

Ao avaliar eq. 2.123 quando $z = 1$

$$A_3 = \frac{(z+1)X(z)}{z} = \frac{1}{2} \quad (2.125)$$

Deriva-se os dois lados da eq. 2.124 com respeito a z

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{(z-1)^2 X(z)}{z} \right] = \frac{2(z-1)(z+1)A_1}{(z+1)^2} + \frac{-(z-1)^2 A_1}{(z+1)^2} + A_2 \quad (2.126)$$

E avalia-se a eq. 2.126 em $z = 1$

$$A_2 = \frac{d}{dz} \left[\frac{(z-1)^2 X(z)}{z} \right] = \frac{3}{4} \quad (2.127)$$

Consultando uma tabela de transformadas z determina-se a transformada inversa de cada fração parcial.

Chapter 3

Planta contínua no tempo com controlador de tempo discreto

3.1 Transformada de Laplace do 'Sampler and Hold'

Vamos considerar um amostrador fictício, chamado *amostrador por impulsos*. O sinal amostrado desta forma é um trem de impulsos, conforme eq. 3.1 e a fig. 3.1

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT) \quad (3.1)$$

A Transformada de Laplace do sinal amostrado por impulsos é

$$X^*(s) = \mathcal{L}[x^*(t)] = x(0)\mathcal{L}[\delta(t)] + x(1)\mathcal{L}[\delta(t-T)] + x(2)\mathcal{L}[\delta(t-2T)] + \dots \quad (3.2)$$

Entretanto, a Transformada de Laplace da função impulso é a intensidade do impulso. Lembrando da propriedade da translação no tempo

$$X^*(s) = x(0) + x(1)e^{-Ts} + x(2)e^{-2Ts} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs} \quad (3.3)$$

A semelhança entre $X^*(s)$ de um sinal amostrado por impulsos com $X(z)$ de uma sequência discreta é enorme. Em particular, se definimos $z = e^{Ts}$ as duas transformadas se tornam iguais

$$X^*(s)|_{s=(1/T)\ln(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = X(z) \quad (3.4)$$

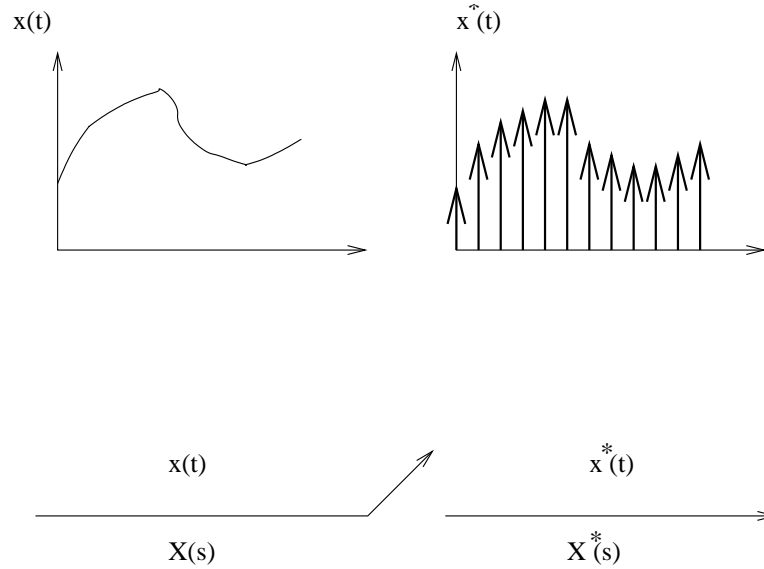


Figure 3.1: Associativa da Convolução

Portanto, a operação fictícia chamada 'amostragem por impulsos' é facilmente descrita no plano s e seu resultado é facilmente descrito no plano z .

As consequências da semelhança entre $X^*(s)$ e $X(z)$ são importantes. É possível mapear o plano s no plano z , e traduzir critérios de estabilidade desenvolvidos no plano s para gerar critérios de estabilidade no plano z .

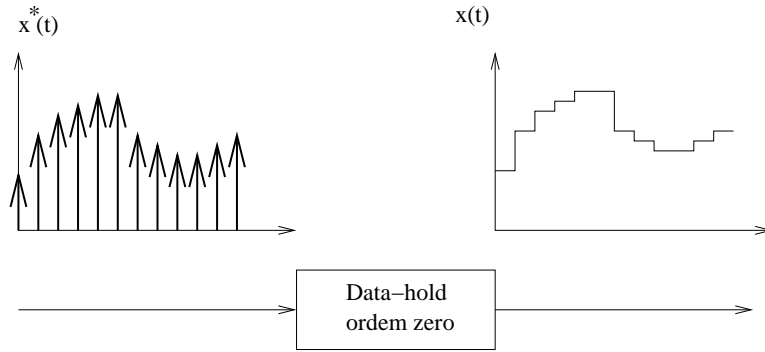
As atenções voltam-se agora para uma representação em Transformada de Laplace para o processo fictício chamado *data-hold*. *Data-hold* é o processo que gera um sinal contínuo $h(t)$ a partir de uma sequência discreta $x(kT)$. Durante o intervalo $kT < t < (k+1)T$, o sinal contínuo pode ser aproximado por um polinômio

$$h(kT - \tau) = a_n \tau^n + a_{n-1} \tau^{n-1} + \dots + a_1 \tau + a_0 \quad (3.5)$$

Quando $\tau = 0$, $x(kT + \tau)$ deve concordar com $x(kT)$

$$h(kT - \tau) = a_n \tau^n + a_{n-1} \tau^{n-1} + \dots + a_1 \tau + x(kT) \quad (3.6)$$

O *data-hold* mais simples utiliza $n = 0$ e é chamado de *data-hold* de ordem zero. O resultado pode ser visto na fig. 3.2 e a representação matemática está na eq. 3.7.


 Figure 3.2: Processo *data-hold* de ordem zero

$$x_h(t) = x(0)[u(t) - u(t-T)] + x(1)[u(t-T) - u(t-2T)] + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)[u(t-kT) - u(t-(k+1)T)] \quad (3.7)$$

Lembrando que a Transformada de Laplace da função degrau é $1/s$ e a propriedade da translação no tempo,

$$\mathcal{L}[u[t - kT]] = \frac{e^{-kTs}}{s} \quad (3.8)$$

e a Transformada de Laplace do sinal o processo de amostragem e *data-hold*, eq. 3.7, torna-se

$$X_h(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \frac{e^{-kTs} - e^{-(k+1)Ts}}{s} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs} \quad (3.9)$$

ou seja,

$$X_h(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} X^*(s) \quad (3.10)$$

Portanto, o modelo do *data-hold* de ordem zero é simplesmente,

$$G_{h0}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \quad (3.11)$$

Com estes dois modelos, o modelo de amostrador e o modelo de *data-hold*, é possível representar um sistema misto, parcialmente no tempo contínuo, parcialmente no tempo discreto, no plano z . Adicionalmente, define-se através de $z = e^{Ts}$ um mapa do plano s ao plano z .

Chapter 4

Propriedades básicas da realimentação

4.1 Tipos de sistemas e erro de seguimento em regime permanente

Os sistemas podem ser classificados pelo grau do polinômio que representa o sinal de excitação para o qual o erro de seguimento em regime permanente é constante.

Ainda que o sistema seja estável, o sinal de erro pode ser considerável. É preciso verificar o erro em regime permanente resultante de uma excitação tipo degrau, rampa ou parábola, para conhecer a habilidade do sistema para seguir sinais de excitação.

Um sistema discreto pode ser classificado de acordo com o número de pólos em $z = 1$ na função de transferência de malha aberta. O sistema é classificado como tipo 0, 1 ou 2, se a função de transferência de malha aberta tiver 0, 1 ou 2 pólos em $z = 1$.

Considere o sistema da fig. ???. Do diagrama sabe-se que

$$e(t) = r(t) - b(t) \quad (4.1)$$

O teorema do valor final informa que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} [(1 - z^{-1})E(z)] \quad (4.2)$$

Ainda, a partir do diagrama,

$$G(z) = r(1 - z^{-1})Z[G_p(s)/s] \quad (4.3)$$

e

$$GH(z) = r(1 - z^{-1})Z[(G_p(s)H(s))/s] \quad (4.4)$$

Portanto o erro,

$$E(z) = R(z) - GH(z)E(z) \quad (4.5)$$

que pode ser reescrito como

$$E(z) = \frac{1}{1 + GH(z)}R(z) \quad (4.6)$$

Finalmente, o erro em regime permanente,

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + GH(z)} R(z) \quad (4.7)$$

Quando a excitação é um degrau, $r(t) = 1(t)$,

$$R(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (4.8)$$

e

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + GH(z)} \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (4.9)$$

simplificando,

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + GH(z)} = \frac{1}{1 + K_p} \quad (4.10)$$

Quando a excitação é uma rampa, $r(t) = t1(t)$,

$$R(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} \quad (4.11)$$

e

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + GH(z)} \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} \quad (4.12)$$

simplificando,

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T}{(1 - z^{-1})GH(z)} = \frac{1}{K_v} \quad (4.13)$$

Quando a excitação é uma rampa, $r(t) = t^2 1(t)/2$,

$$R(z) = \frac{T^2(1 - z^{-1})z^{-1}}{2(1 - z^{-1})^3} \quad (4.14)$$

e

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + GH(z)} \frac{T^2(1 - z^{-1})z^{-1}}{2(1 - z^{-1})^3} \quad (4.15)$$

simplificando,

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T^2}{(1 - z^{-1})^2 GH(z)} = \frac{1}{K_a} \quad (4.16)$$

Bibliography

- [1] Kuo, Benjamin C. Digital Control Systems, Holt-Saunders International Editions, 1980. (capítulo 2)
- [2] Ogata, Katsuhito Discrete-Time Control Systems, Prentice-Hall, New Jersey, 2 ed., 1995. Capítulo 2.
- [3] Proakis, J. G. and Dimitris Manolakis, Digital Signal Processing, Macmillan, New York, 1992.