

# PME2443 Microprocessadores e Controle Digital

Raul Gonzalez Lima

August 21, 2008



# Contents

<b>1</b>	<b>Representação no espaço de estados</b>	<b>5</b>
1.1	Introdução . . . . .	5
1.2	De tempo contínuo para discreto C2D . . . . .	5
1.2.1	Fator de integração . . . . .	6
1.2.2	Definição de $e^{At}$ . . . . .	6
1.2.3	Integral do sistema de $kT$ a $(k + 1)T$ . . . . .	7
1.3	Determinação de $e^{At}$ a partir de $A$ . . . . .	8
1.4	Algumas representações canônicas . . . . .	9
1.4.1	Forma canônica controlável . . . . .	9
1.4.2	Forma canônica observável . . . . .	9
1.4.3	Forma canônica diagonal . . . . .	10
1.4.4	Forma canônica de Jordan . . . . .	10
1.5	Solução de equações no espaço de estados discreto . . . . .	10
1.5.1	Matriz de transição . . . . .	11
1.5.2	Solução do sistema discreto via Transformada $z$ . . . . .	11
1.5.3	Método para calcular $(zI - G)^{-1}$ . . . . .	12
1.6	Estabilidade de Liapunov . . . . .	13
1.6.1	Função positiva definida . . . . .	13
1.6.2	Critério de Sylvester para determinar se uma matriz é positiva . . . . .	13
1.6.3	A Função de Liapunov . . . . .	13
1.6.4	Estabilidade segundo Lyapunov . . . . .	14
1.6.5	Estabilidade assintótica . . . . .	14
1.6.6	Instabilidade . . . . .	14
1.6.7	Teorema sobre estabilidade assintótica . . . . .	14
1.6.8	Teorema sobre estabilidade no tempo discreto . . . . .	15
1.6.9	Estabilidade de um sistema discreto invariante no tempo	15
1.7	Teorema de Cayley-Hamilton . . . . .	16
1.8	Controlabilidade de sistema discreto . . . . .	17
1.9	Observabilidade de sistema discreto . . . . .	17

1.10	Controle por locação de pólos . . . . .	19
1.11	Observador de estado completo . . . . .	19
1.12	Fórmula de Ackerman para a matriz de ganho do controlador . . . . .	20
1.13	Fórmula de Ackerman para a matriz de ganho do observador . . . . .	22
1.14	Controle Ótimo Quadrático . . . . .	22
1.15	Exercícios Recomendados . . . . .	25
1.15.1	Formas canônicas . . . . .	25
1.15.2	Solução de Equações de Diferenças . . . . .	26
1.15.3	Estabilidade de Lyapunov . . . . .	26
1.15.4	Alocação de Pólos e Observadores . . . . .	26
<b>2</b>	<b>A Transformada de Laplace e a Transformada Z</b>	<b>27</b>
2.1	A Transformada de Laplace . . . . .	27
2.1.1	Introdução . . . . .	27
2.1.2	Definição . . . . .	27
2.1.3	Condições de existência da transformada . . . . .	27
2.1.4	A transformada de algumas funções . . . . .	28
2.1.5	Superposição . . . . .	30
2.1.6	Translação de uma função . . . . .	30
2.1.7	Multiplicação por $e^{-at}$ . . . . .	31
2.1.8	Limite inferior da transformada de Laplace . . . . .	31
2.1.9	Teorema da Diferenciação . . . . .	31
2.1.10	Teorema do valor final . . . . .	32
2.1.11	Teorema do valor inicial . . . . .	33
2.1.12	Teorema da Integral . . . . .	33
2.1.13	Transformada Inversa de Laplace . . . . .	34
2.1.14	Solução de Equações Lineares Invariantes no Tempo . . . . .	34
2.2	A Transformada Z . . . . .	35
2.2.1	A transformada $z$ bilateral . . . . .	35
2.2.2	Transformada $z$ lateral . . . . .	37
2.2.3	Propriedades da transformada $z$ . . . . .	38
2.2.4	Teorema do valor inicial . . . . .	39
2.2.5	A transformada $z$ inversa . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Planta contínua no tempo com controlador de tempo discreto</b>	<b>45</b>
3.1	Transformada de Laplace do 'Sampler and Hold' . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Propriedades básicas da realimentação</b>	<b>49</b>
4.1	Tipos de sistemas e erro de seguimento em regime permanente . . . . .	49

# Chapter 1

## Representação no espaço de estados

### Referência

Ogata, K. *Discrete-Time Control Systems*, Prentice Hall, 2. ed., 1995, cap. 5 e 6.

### 1.1 Introdução

Os métodos convencionais, como lugar-das-raízes e métodos no domínio da frequência, são úteis quando estamos tratando de sistemas *siso*. São métodos para sistemas invariantes no tempo.

O método no espaço de estados descreve o sistema através  $n$  equações diferenciais de primeira ordem. Permite o projeto de controladores que minimizam um índice de performance, permitem o projeto para uma classe de sinais de entrada e permitem a inclusão de condições iniciais no projeto do controlador.

O estado é definido como o menor conjunto de variáveis tais que o conhecimento destas variáveis em  $t = t_0$ , junto com o conhecimento do sinal de entrada de  $t = t_0$  até  $t > t_0$ , determina completamente o comportamento do sistema em qualquer  $t > t_0$

### 1.2 De tempo contínuo para discreto C2D

No controle digital de plantas que são contínuas no tempo é necessário converter modelos de tempo contínuo em modelos de tempo discreto. Do ponto

de vista físico admite-se a existência de um amostrador e de um segurador de ordem zero no sistema. Do ponto de vista matemático trata-se de uma operação de integração de  $t$  a  $t+T$ , onde  $T$  denota o intervalo de amostragem.

### 1.2.1 Fator de integração

Para integrar um sistema do tipo  $\dot{x} = Ax + Bu$  é conveniente agrupar os termos  $\dot{x}$  e  $Ax$  no diferencial de um único termo. Multiplica-se a equação do sistema por um fator de integração  $M$

$$M\dot{x} = MAx + MBu \quad (1.1)$$

ou ainda

$$M\dot{x} - MAx = MBu \quad (1.2)$$

Desja-se determinar  $M$  tal que

$$\frac{dMx}{dt} = M\dot{x} - MAx \quad (1.3)$$

pois neste caso os sistema

$$d(Mx) = MBudt \quad (1.4)$$

pode ser integrado

$$Mx(t+T) - Mx(t) = \int_t^{t+T} M(\tau)Bu(\tau)d\tau \quad (1.5)$$

### 1.2.2 Definição de $e^{At}$

Na busca do fator de integração convém lembrar da definição de  $e^{At}$

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \dots + \frac{1}{k!}A^k t^k + \dots \quad (1.6)$$

Esta série é convergente e pode ser diferenciada termo a termo

$$\frac{d(e^{At})}{dt} = A + A^2t + \frac{1}{2!}A^3t^2 + \dots + \frac{1}{(k-1)!}A^k t^{k-1} + \dots \quad (1.7)$$

e pela propriedade associativa

$$\frac{d(e^{At})}{dt} = A[I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \dots + \frac{1}{k!}A^k t^k + \dots] \quad (1.8)$$

que resulta

$$\frac{d(e^{At})}{dt} = Ae^{At} \quad (1.9)$$

Esta propriedade de  $e^{AT}$  é a propriedade necessária para o fator de integração.

### 1.2.3 Integral do sistema de $kT$ a $(k+1)T$

Vamos utilizar  $M = e^{-At}$  como fator de integração. Decorre da eq. 1.5,

$$e^{-A(k+1)T}x((k+1)T) - e^{-A(kT)}x(kT) = \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \quad (1.10)$$

Pré-multiplicando por  $e^{A(k+1)T}$ ,

$$x((k+1)T) - e^{AT}x(t) = e^{A(k+1)T} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \quad (1.11)$$

ou

$$x((k+1)T) - e^{AT}x(t) = \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (1.12)$$

Uma mudança de variável de integração simplifica o integrando. Seja  $\lambda = t - kT$ ,

$$x((k+1)T) - e^{AT}x(t) = \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A(T-\lambda)}Bu(\lambda+kT)d\lambda \quad (1.13)$$

Ao considerar a excitação  $u(\lambda+kT)$  constante no intervalo  $t \rightarrow t+T$ , resulta

$$x((k+1)T) - e^{AT}x(kT) = u(kT) \left( \int_0^T e^{A(T-\lambda)}Bd\lambda \right) \quad (1.14)$$

Tomando a liberdade de retirar da notação o intervalo de discretização  $T$  e isolando  $x(k+1)$ ,

$$x(k+1) = (e^{AT})x(k) + \left( \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A(T-\lambda)}Bd\lambda \right) * u(k) \quad (1.15)$$

É possível ainda, neste caso, mudar o intervalo de integração,

$$x(k+1) = (e^{AT})x(k) + \left( \int_0^T e^{A(T-\lambda)}Bd\lambda \right) * u(k) \quad (1.16)$$

E, finalmente, da eq. 1.16, observa-se claramente a expressão que relaciona a matriz do sistema no tempo contínuo  $A$  com a matriz do sistema no tempo discreto  $G$ ,

$$G = e^{AT} \quad (1.17)$$

decorre também a expressão que relaciona a matriz de atuação no tempo contínuo  $B$  com a matriz de atuação no tempo discreto  $H$ ,

$$H = \left( \int_0^T e^{A(T-\lambda)} B d\lambda \right) \quad (1.18)$$

No Scilab o comando que calcula  $G$  e  $H$  em função de  $A$ ,  $B$  e  $T$  é *dscr*. No Octave o comando que calcula  $G$  e  $H$  em função de  $A$ ,  $B$  e  $T$  é *c2d*.

### 1.3 Determinação de $e^{At}$ a partir de $A$

Já foi demonstrado que

$$\frac{d(e^{At})}{dt} = Ae^{At}. \quad (1.19)$$

e decorre da expansão em série de  $e^{At}$  que

$$e^{A0} = I \quad (1.20)$$

Seja  $F(t) = e^{At}$ . Desta forma  $F(t)$  satisfaz  $\dot{F} = AF$  e podemos aplicar a transformada de Laplace nos dois lados da equação,

$$sF(s) - F(0) = AF(s) \quad (1.21)$$

onde  $F(0) = e^{A0} = I$ . Rearranjando a eq. 1.21, resulta,

$$(sI - A)F(s) = I \quad (1.22)$$

ou seja,

$$F(s) = (sI - A)^{-1} \quad (1.23)$$

E, finalmente, podemos dizer que,

$$F(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}] \quad (1.24)$$

## 1.4 Algumas representações canônicas

Considere uma sistema *siso* descrito por

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_n u(k-n) \quad (1.25)$$

Em termos de função de transferência pulsada,

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (1.26)$$

### 1.4.1 Forma canônica controlável

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (1.27)$$

$$y(k) = [b_n - a_n b_0 \quad b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \quad \dots \quad b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) \quad (1.28)$$

### 1.4.2 Forma canônica observável

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_2 - a_2 b_0 \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u(k) \quad (1.29)$$

$$y(k) = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) \quad (1.30)$$

### 1.4.3 Forma canônica diagonal

Se os pólos da função de transferência pulsada são todos distintos, é possível diagonalizar a matriz  $A$  do sistema

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (1.31)$$

$$y(k) = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) \quad (1.32)$$

### 1.4.4 Forma canônica de Jordan

Se a função de transferência tem pólo múltiplo de ordem  $m$  em  $z = p_1$  então é possível representar o sistema na forma canônica de Jordan

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_m(k+1) \\ x_{m+1}(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_{m-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_m(k) \\ x_{m+1}(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (1.33)$$

$$y(k) = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) \quad (1.34)$$

## 1.5 Solução de equações no espaço de estados discreto

Considere o sistema no tempo discreto

## 1.5. SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES NO ESPAÇO DE ESTADOS DISCRETO 11

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Gx(k) + Hu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k)\end{aligned}\tag{1.35}$$

A solução pode ser obtida por recursão

$$\begin{aligned}x(1) &= Gx(0) + Hu(0) \\ x(2) &= Gx(1) + Hu(1) = G^2x(0) + GHu(0) + Hu(1) \\ x(3) &= Gx(2) + Hu(2) = G^3x(0) + G^2Hu(0) + GHu(1) + Hu(2) \\ &\vdots\end{aligned}\tag{1.36}$$

que pode ser escrito sinteticamente

$$x(k) = G^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} G^{k-j-1} Hu(j)\tag{1.37}$$

### 1.5.1 Matriz de transição

A solução do sistema homogêneo  $x(k+1) = Gx(k)$  pode ser escrita

$$x(k) = \Psi(k)x(0)\tag{1.38}$$

Ao comparar a eq. 1.37 e a eq. 1.38 resulta,

$$\Psi(k) = G^k\tag{1.39}$$

### 1.5.2 Solução do sistema discreto via Transformada $z$

Considere o sistema no tempo discreto

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k)\tag{1.40}$$

Aplicando a transformada  $z$  na eq. 1.40

$$zX(z) - zx(0) = GX(z) + HU(z)\tag{1.41}$$

então

$$(zI - G)X(z) = zx(0) + HU(z)\tag{1.42}$$

Pré-multiplica-se a eq. 1.42 por  $(zI - G)^{-1}$

$$X(z) = (zI - G)^{-1}zx(0) + (zI - G)^{-1}HU(z)\tag{1.43}$$

e aplica-se a transformada inversa

$$x(k) = Z^{-1}[(zI - G)^{-1}z]x(0) + Z^{-1}[(zI - G)^{-1}HU(z)] \quad (1.44)$$

### 1.5.3 Método para calcular $(zI - G)^{-1}$

A inversa de  $(zI - G)$  pode ser calculada em termos da matriz adjunta

$$(zI - G)^{-1} = \frac{\text{adj}(zI - G)}{|zI - G|} \quad (1.45)$$

Note que o determinante  $|zI - G|$  é o polinômio característico

$$|zI - G| = z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \dots + a_n \quad (1.46)$$

Demonstra-se que a matriz adjunta tem uma representação expandida

$$\text{adj}(zI - G) = Iz^{n-1} + H_1z^{n-2} + \dots + H_{n-1} \quad (1.47)$$

onde as matrizes  $H_i$  dependem dos coeficientes do polinômio característico

$$\begin{aligned} H_1 &= G + a_1I \\ H_2 &= GH_1 + a_2I \\ &\vdots \\ H_{n-1} &= GH_{n-2} + a_{n-1}I \\ H_n &= GH_{n-1} + a_nI = 0 \end{aligned} \quad (1.48)$$

Os coeficientes do polinômio característico eq. 1.46 podem ser calculados alternativamente por

$$\begin{aligned} a_1 &= -\text{tr}G \\ a_2 &= -\frac{1}{2}\text{tr}GH_1 \\ &\vdots \\ a_n &= -\frac{1}{n}\text{tr}GH_{n-1} \end{aligned} \quad (1.49)$$

*Exemplo:* Determine a inversa da matriz  $(zI - G)$  quando  $G$  vale,

$$\begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.0 \\ 0.3 & -0.1 & -0.2 \\ 0.0 & 0.0 & -0.3 \end{bmatrix} \quad (1.50)$$

## 1.6 Estabilidade de Liapunov

O segundo método de Liapunov para analisar a estabilidade de sistemas não se restringe a sistemas lineares invariantes no tempo, aplica-se também a sistemas variantes no tempo e sistemas não lineares.

Sabe-se que um sistema vibratório é estável se sua energia total é decrescente. O método de Liapunov baseia-se numa generalização deste fato. Se o sistema tem um estado assintoticamente estável, então a energia armazenada decai no tempo. Para tratar sistemas mais abstratos, onde o conceito de energia potencial tem pouco significado, Liapunov introduziu uma função de energia fictícia, a Função de Liapunov.

### 1.6.1 Função positiva definida

Uma função ,  $V(x)$ , é dita positivo definida se  $V(x) > 0$  para qualquer estado  $x$  e se  $V(0) = 0$ . Uma função variável no tempo,  $V(x, t)$ , é dita positivo definida se for limitada por baixo por uma função positivo definida  $V(x, t) > V(x) > 0$ , para qualquer estado  $x$ , e se  $V(0, t) = 0$ .

### 1.6.2 Critério de Sylvester para determinar se uma matriz é positiva

O determinante da matriz deve ser positivo e os determinantes dos *minors* principais sucessivos também são positivos. Por exemplo, para que uma matriz  $3 \times 3$  seja positiva definida é necessário

$$a_{1,1} > 0 \quad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} > 0 \quad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} > 0 \quad (1.51)$$

*Exemplo* : Mostre que a função  $V(x) = 10x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 4x_1x_3$  é positivo definida usando o critério de Sylvester.

### 1.6.3 A Função de Liapunov

A Função de Liapunov é uma função positivo definida, contínua, com primeiras derivadas parciais contínuas e tem derivada temporal negativa definida.

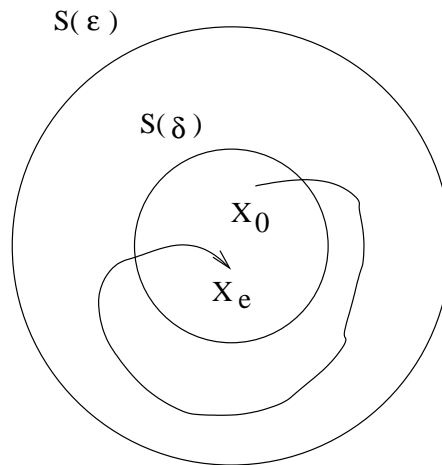


Figure 1.1: Estabilidade assintótica

#### 1.6.4 Estabilidade segundo Lyapunov

Seja uma região esférica tal que  $\|x - x_e\| < \delta$  denotada por  $S(\delta)$ . Um estado de equilíbrio  $x_e$  é dito estável se existe  $S(\delta)$  tal que as trajetórias que começam em  $S(\delta)$  não saem de  $S(\epsilon)$  enquanto o tempo aumenta indefinidamente, ver fig. 1.1.

#### 1.6.5 Estabilidade assintótica

Um estado  $x_e$  é dito assintoticamente estável se qualquer solução que tem início em  $S(\delta)$  converge, sem sair de  $S(\epsilon)$ , para  $x_e$  a medida que o tempo aumenta indefinidamente, ver fig. 1.1.

Se  $\delta$  não depende de do instante inicial  $t_0$  então o estado de equilíbrio é dito uniformemente assintoticamente estável.

#### 1.6.6 Instabilidade

Um estado de equilíbrio  $x_e$  é dito instável se para um numero real  $\epsilon > 0$  e outro numero  $\delta > 0$ , não importa quão pequeno, existe sempre um estado  $x_0$  em  $S(\delta)$  tal que a trajetória sai de  $S(\epsilon)$ , ver fig. 1.1

#### 1.6.7 Teorema sobre estabilidade assintótica

Seja uma sistema descrito por  $\dot{x} = f(x, t)$ , onde  $f(0, t) = 0$  para qualquer  $t$ . Se existe uma função escalar  $V(x, t)$ , com derivadas parciais contínuas satisfazendo

- $V(x)$  é positivo definida
- $\dot{V}(x, t)$  é negativo definida

então, o estado de equilíbrio na origem é uniformemente assintoticamente estável.

### 1.6.8 Teorema sobre estabilidade no tempo discreto

Seja uma sistema descrito por  $x((k+1)T) = f(x(kT))$ , onde  $f(0, k) = 0$  para qualquer  $k$ . Se existe uma função escalar  $V(x)$ , contínua em  $x$  satisfazendo

- $V(x)$  é positivo definida
- $\Delta V = V(x((k+1)T)) - V(x(kT)) < 0$
- $V(x) \rightarrow \infty$  enquanto  $\|x\| \rightarrow \infty$

então, o estado de equilíbrio na origem é assintoticamente estável e  $V(x)$  é uma função de Lyapunov.

### 1.6.9 Estabilidade de um sistema discreto invariante no tempo

Considere um sistema discreto invariante no tempo  $x(k+1) = Gx(k)$ , onde origem é estado de equilíbrio  $x_e = 0$ . Uma possível função de Lyapunov é

$$V(x(k)) = x^*(k)Px(k) \quad (1.52)$$

onde  $P$  é Hermitiana,  $P^* = P$ . O símbolo  $*$  denota conjugado transposto.

Então

$$\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k)) = x^*(k+1)Px(k+1) - x^*(k)Px(k) \quad (1.53)$$

ou seja,

$$\Delta V(x(k)) = [Gx(k)]^*PGx(k) - x^*(k)Px(k) = x^*(k)(G^*PG - P)x(k) \quad (1.54)$$

Convém chamar  $G^*PG - P = -Q$  e neste caso

$$\Delta V(x(k)) = -x^*(k)Qx(k) \quad (1.55)$$

A condição necessária e suficiente para que  $x = 0$  seja assintoticamente estável é que dada uma matriz  $Q$ , positiva definida real simétrica, existe uma matriz  $P$ , positivo definida Hermitiana.

*Exemplo:* Determine a estabilidade na origem do sistema

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -1 \end{bmatrix} x(k) \quad (1.56)$$

*Solução:* Seja  $Q = I$ , se  $P$  que satisfaz  $G^t P G - P = -Q$  for hermitiana, positivo definida, então o sistema será estável na origem.

## 1.7 Teorema de Cayley-Hamilton

Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$  com polinômio característico

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (1.57)$$

então a matriz  $A$  satisfaz seu polinômio característico

$$A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A + a_n = 0 \quad (1.58)$$

Vamos demonstrar este teorema para o caso particular em que  $A$  é diagonalizável, ou seja,  $A$  tem autovalores distintos. Matriz de autovetores  $M$  reduz a matriz  $A$  a uma matriz diagonal

$$A = M \Lambda M^{-1} \rightarrow A^k = M \Lambda^k M^{-1} \quad (1.59)$$

Ao substituir  $\lambda$  no polinômio característico resulta

$$A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A + a_n \quad (1.60)$$

Substituindo a eq. 1.59 na eq. 1.60

$$M[\Lambda^n + a_1 \Lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \Lambda + a_n] M^{-1} = 0 \quad (1.61)$$

Cada linha do termo entre colchetes é precisamente o polinômio característico com  $\lambda = \text{autovalor}$  e portanto cada linha é necessariamente nula. Desta forma a matriz  $A$  satisfaz seu próprio polinômio característico.

As consequências deste fato são vastas. **Observem que  $A^n$  é linearmente dependente de  $A^{n-1}, \dots, A$  e  $I$ .** A *n*-ésima potência de  $A$  não traz informação nova sobre o sistema.



Para que o estado inicial seja determinável, é necessário que a matriz

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CG \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.66)$$

tenha posto completo. Pelo teorema de Cayley-Hamilton não adianta estender o número de observações por que  $G^n$  não irá alterar o posto da matriz de observabilidade. Define-se a matriz da eq. 1.66 como matriz de observabilidade e o sistema será observável se ela for de posto completo.

*Exemplo 6-5 Ogata:* Considere o sistema no tempo contínuo

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (1.67)$$

e

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (1.68)$$

1. o sistema é controlável?
2. o sistema é observável?
3. determine os autovalores de  $A$ ;
4. mostre que o sistema discreto com intervalo de amostragem  $T$  tem  $G = [\cos T \ \sin T; -\sin T \ \cos T]$  e  $H = [(1 - \cos T); \sin T]$ ;
5. mostre que para  $T = n\pi$  com  $n = 1, 2, \dots$ ,  $G = I$  ou  $G = -I$ ;
6. mostre que nestas condições o sistema não é controlável.

Solução a partir do quarto item

A matriz  $G$  pode ser calculada por

$$G = e^{AT} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}] = \mathcal{L}^{-1} \left( \left[ \begin{array}{cc} s & -1 \\ 1 & s \end{array} \right]^{-1} \right) \quad (1.69)$$

calculando a matriz inversa entre colchetes

$$G = \exp(AT) = \mathcal{L}^{-1} \left( \left[ \begin{array}{cc} \frac{s}{s^2+1} & \frac{1}{s^2+1} \\ \frac{-1}{s^2+1} & \frac{s}{s^2+1} \end{array} \right] \right) \quad (1.70)$$

e finalmente,

$$G = \begin{bmatrix} \cos(T) & \text{sen}(T) \\ -\text{sen}(T) & \cos(T) \end{bmatrix} \quad (1.71)$$

## 1.10 Controle por locação de pólos

Considere o sistema discreto

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \quad (1.72)$$

se a dinâmica do sistema não é satisfatória pode-se realimentar o estado através de uma matriz de ganho

O sinal de controle, admitindo um sinal de referência  $r(k)$

$$u(k) = r(k) - Kx(k) \quad (1.73)$$

consequentemente,

$$x(k+1) = Gx(k) + H(r(k) - Kx(k)) \quad (1.74)$$

ou seja,

$$x(k+1) = (G - HK)x(k) + Hr(k) \quad (1.75)$$

Se o sistema da eq. 1.72 for controlável então existe uma matriz  $K$  tal que os autovalores da matriz  $G - HK$  podem ser arbitrariamente alocados.

Na prática, este tipo de controle enfrenta um desafio, normalmente o estado  $x(k)$  não é observado, apenas um vetor de dimensão menor  $y(k) = Cx(k)$  é observado. Este problema é contornado através do emprego de um observador de estado completo. Um observador de estado completo estima o estado completo a partir da história das observações  $y(k)$ , das história de controle  $u(k)$  e informação a priori como, por exemplo, um modelo da planta.

## 1.11 Observador de estado completo

Luenberger propôs um observador na forma de um sistema dinâmico linear nas observações  $y(k)$  e linear na história de controle  $u(k)$ .

$$\hat{x}(k+1) = G_O\hat{x}(k) + Ly(k) + Mu(k) \quad (1.76)$$

Convém definir o vetor erro de observação

$$e(k) = x(k) - \hat{x}(k) \quad (1.77)$$

e conseqüentemente,

$$e(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1) \quad (1.78)$$

A partir desta última equação,

$$e(k+1) = Gx(k) + Hu(k) - (G_O\hat{x}(k) + Ly(k) + Mu(k)) \quad (1.79)$$

Reagrupando e substituindo  $Ly(k)$  por  $LCx(k)$  resulta

$$e(k+1) = Gx(k) + Hu(k) - G_O\hat{x}(k) - LCx(k) - Mu(k) \quad (1.80)$$

Adota-se por conveniência,  $M = H$ , e neste caso,

$$e(k+1) = Gx(k) - G_O\hat{x}(k) - LCx(k) \quad (1.81)$$

Reagrupando os termos em  $x(k)$

$$e(k+1) = (G - LC)x(k) - G_O\hat{x}(k) \quad (1.82)$$

E finalmente, se  $G_O = G - LC$ , a dinâmica do erro passa a depender apenas dos autovalores de  $G - LC$ ,

$$e(k+1) = (G - LC)e(k) \quad (1.83)$$

Se o sistema original for observável, pode-se alocar arbitrariamente os autovalores de  $G - LC$  através da escolha da matriz  $L$ .

## 1.12 Fórmula de Ackerman para a matriz de ganho do controlador

Considere o sistema

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \quad (1.84)$$

utilizando realimentação de estado do tipo  $u(k) = -Kx(k)$ , deseja-se que o sistema de malha fechada tenha pólos em  $z = \nu_1, z = \nu_2, \dots, z = \nu_n$ . Deseja-se portanto que a equação característica seja

$$|zI - G + HK| = (z - \nu_1)(z - \nu_2) \dots (z - \nu_n) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} z + \alpha_n = 0 \quad (1.85)$$

Define-se por conveniência  $\bar{G} = G - HK$ . Do teorema de Cayley-Hamilton,  $\bar{G}$  satisfaz sua equação característica

$$\bar{G}^n + \alpha_1 \bar{G}^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \bar{G} + \alpha_n I = \Phi(\bar{G}) = 0 \quad (1.86)$$

Considere a expansão de  $\bar{G}^n$

$$\begin{aligned} I &= I \\ \bar{G} &= G - HK \\ \bar{G}^2 &= G^2 - GHK - HK\bar{G} \\ &\vdots \\ \bar{G}^n &= G^n - G^{n-1}HK - \dots - HK\bar{G}^{n-1} \end{aligned} \quad (1.87)$$

Multiplicando as equações por  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  e somando,

$$\Phi(\bar{G}) = \alpha_n I + \alpha_{n-1} \bar{G} + \dots + \alpha_1 \bar{G}^{n-1} + G^n - \alpha_{n-1} HK - \alpha_{n-2} GHK - \alpha_{n-2} HK\bar{G} - \dots \quad (1.88)$$

que pode ser reescrito em forma matricial

$$\Phi(\bar{G}) = \Phi(G) - [H \ GH \ \dots \ G^{n-1}H] \begin{bmatrix} \alpha_{n-1}K + \alpha_{n-2}K\bar{G} + \dots + K\bar{G}^{n-1} \\ \alpha_{n-2}K + \alpha_{n-3}K\bar{G} + \dots + K\bar{G}^{n-2} \\ \vdots \\ K \end{bmatrix} = 0 \quad (1.89)$$

Multiplicando pela inversa da matriz de controlabilidade,

$$\begin{bmatrix} \alpha_{n-1}K + \alpha_{n-2}K\bar{G} + \dots + K\bar{G}^{n-1} \\ \alpha_{n-2}K + \alpha_{n-3}K\bar{G} + \dots + K\bar{G}^{n-2} \\ \vdots \\ K \end{bmatrix} = [H \ GH \ \dots \ G^{n-1}H]^{-1} \Phi(G) \quad (1.90)$$

Finalmente, pré-multiplica-se por  $[0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]$  e resulta

$$K = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1][H \ GH \ \dots \ G^{n-1}H]^{-1} \Phi(G) \quad (1.91)$$

Esta expressão de  $K$  é chamada de *fórmula de Ackerman*.

### 1.13 Fórmula de Ackerman para a matriz de ganho do observador

Para determinar a matriz de ganho do observador, também conhecida por matriz de Luenberger, podemos escrever,

$$L = \Phi(G) \begin{bmatrix} C \\ CG \\ CG^2 \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.92)$$

Esta expressão de  $L$  é chamada de *fórmula de Ackerman* para determinar o ganho do observador.

### 1.14 Controle Ótimo Quadrático

Condidere um sistema invariante no tempo do tipo,

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \quad (1.93)$$

e um índice de desempenho quadrático

$$J = \frac{1}{2}x^*(N)Sx(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [x^*(k)Qx(k) + u^*(k)Ru(k)] \quad (1.94)$$

Vamos demonstrar que a lei de controle que minimiza  $J$  tem a forma

$$u(k+1) = -K(k)x(k) \quad (1.95)$$

e caso o estado não puder ser todo medido, devemos utilizar um observador de estado.

Deseja-se minimizar  $J$  sujeito a restrições de como o estado evolui, eq. 1.93, e considerando o estado inicial especificado,

$$x(0) = c \quad (1.96)$$

Através do uso de multiplicadores de Lagrange, define-se um índice de desempenho aumentado,  $L$ ,

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}x^*(N)Sx(N) \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}[x^*(k)Qx(k) + u^*(k)Ru(k)] \\
&+ \lambda^*(k+1)[Gx(k) + Hu(k) - x(k+1)] \\
&+ [Gx(k) + Hu(k) - x(k+1)]\lambda(k+1)
\end{aligned} \tag{1.97}$$

onde cada  $\lambda(k)$  é um vetor.

Para minimizar o índice aumentado  $L$  devemos impor derivada parcial com respeito a cada componente dos vetores  $\lambda$ ,  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{x}$  igual a zero. Do ponto de vista computacional é melhor derivar  $L$  com respeito a  $\bar{\lambda}$ ,  $\bar{\mathbf{u}}$  e  $\bar{\mathbf{x}}$ . Para  $i = 1, 2, \dots, n$  e  $k = 1, 2, \dots, N$  resulta,

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{x}_i(k)} = \mathbf{0} \tag{1.98}$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\lambda}_i(k)} = \mathbf{0} \tag{1.99}$$

E para  $i = 1, 2, \dots, n$  e  $k = 1, 2, \dots, N$ ,

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{u}_i(k)} = \mathbf{0} \tag{1.100}$$

Invoca-se agora uma regra da derivada parcial de formas bilineares quadráticas complexas,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} x^* Ay = Ay \tag{1.101}$$

para facilitar o desenvolvimento. Obtem-se um conjunto de equações que formam *Two point boundary value problem*, TPBVP.

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{x}(k)} = 0 \rightarrow Qx(k) + G^*\lambda(k+1) - \lambda(k) = 0 \tag{1.102}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{x}(N)} = 0 \rightarrow Sx(N) - \lambda(N) = 0, \tag{1.103}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{u}(k)} = 0 \rightarrow Ru(k) + H^*\lambda(k+1) = 0, \tag{1.104}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{x}(k)} = 0 \rightarrow Gx(k-1) + Hu(k-1) - x(k) = 0 \tag{1.105}$$

Estas equações admitem simplificações,

$$\lambda(k) = Qx(k) + G^*\lambda(k+1) , \quad (1.106)$$

$$\lambda(N) = Sx(N) , \quad (1.107)$$

$$u(k) = -R^{-1}H^*\lambda(k+1) , \quad (1.108)$$

e

$$x(k+1) = Gx(k) + HR_{-1}H^*\lambda(k+1) \quad (1.109)$$

com a condição inicial  $x(0) = c$ .

Covém eliminar  $\lambda$  destas equações através da seguinte substituição,

$$\lambda(k) = P(k)x(k) \quad (1.110)$$

Ao substituir a eq. 1.110 na eq. 1.106 resulta,

$$P(k)x(k) = Qx(k) + G^*P(k+1)x(k+1) \quad (1.111)$$

Ainda mais, ao substituir a eq. 1.110 na eq. 1.93 resulta,

$$x(k+1) = Gx(k) + HR_{-1}H^*P(k+1)x(k+1) \quad (1.112)$$

Desta última equação,

$$[I + HR_{-1}H^*P(k+1)]x(k+1) = Gx(k) \quad (1.113)$$

onde, para sistemas controláveis, demonstra-se que a inversa do termo entre colchetes existe. E portanto,

$$x(k+1) = [I + HR_{-1}H^*P(k+1)]^{-1}Gx(k) \quad (1.114)$$

Substitue-se a eq. 1.114 na eq. 1.111 e obtém-se

$$P(k)x(k) = Qx(k) + G^*P(k+1)[I + HR_{-1}H^*P(k+1)]^{-1}Gx(k) \quad (1.115)$$

que rearranja-se

$$[P(k) - Q - G^*P(k+1)[I + HR_{-1}H^*P(k+1)]^{-1}G]x(k) = 0 \quad (1.116)$$

Entretanto, esta última equação deve valer para todo  $x(k)$  e isto implica que

$$P(k) = Q + G^*P(k+1)[I + HR_{-1}H^*P(k+1)]^{-1}G \quad (1.117)$$

Há um lema de inversão de matrizes,

$$(A + BD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(I + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1} \quad (1.118)$$

que pode ser usado para rearranjar a eq. 1.117 com  $A = I$ ,  $B = HR^{-1}$  e  $D = H^*P(k+1)$ ,

$$P(k) = Q + G^*P(k+1)G - G^*P(k+1)H[R + H^*P(k+1)]^{-1}H^*P(k+1)G \quad (1.119)$$

esta é a equação de Riccati.

Note que decorre da eq. 1.103 e da eq. 1.110 que para  $k = N$

$$P(k) = S \quad (1.120)$$

A equação de Riccati pode ser resolvida de trás para frente, determinando  $P(N)$ ,  $P(N-1)$ ,  $\dots$ ,  $P(0)$ .

Para determinar a história de controle parte-se da eq. 1.108 e da eq. 1.106 que resulta,

$$u(k) = -R^{-1}H^*(G^*)^{-1}[\lambda(k) - Qx(k)] , \quad (1.121)$$

que, eliminando  $\lambda$  torna-se

$$u(k) = -R^{-1}H^*(G^*)^{-1}[P(k) - Q]x(k) = -K(k)x(k) \quad (1.122)$$

e evidencia o ganho ótimo  $K(k)$ ,

$$K(k) = -R^{-1}H^*(G^*)^{-1}[P(k) - Q] \quad (1.123)$$

## 1.15 Exercícios Recomendados

### 1.15.1 Formas canônicas

#### Problemas resolvidos

: A-5-1, A-5-2, A-5-3

#### Exemplos resolvidos

: 5-1

**Problemas propostos**

: B-5-1, B-5-2, B-5-3, B-5-4

**1.15.2 Solução de Equações de Diferenças****Exemplos resolvidos**

: 5-3

**Exemplos resolvidos**

: A-5-14, A-5-16

**1.15.3 Estabilidade de Lyapunov****Exemplos resolvidos**

:5-9

**Problemas resolvidos**

:A-5-17, A-5-22

**Problemas propostos**

: B-5-21, B-5-22, B-5-23, B-5-24

**1.15.4 Alocação de Pólos e Observadores****Exemplos resolvidos**

:6-2,6-4, 6-5, 6-6 método 2, 6-8, 6-9, 6-10 método 2.

**Problemas resolvidos**

:A-6-3, A-6-10, A-6-16

**Problemas propostos**

: B-6-6, B-6-7, B-6-9, B-6-11, B-6-16.

## Chapter 2

# A Transformada de Laplace e a Transformada Z

## 2.1 A Transformada de Laplace

### 2.1.1 Introdução

Através da transformada de Laplace derivadas temporais correspondem a uma multiplicação pela variável  $s$  e, desta forma, equações diferenciais ordinárias tornam-se equações algébricas. A transformada de Laplace é utilizada na solução de equações diferenciais ordinárias, equações de diferenças, equações integrais, e equações diferenciais parciais. Alguns critérios de estabilidade de sistemas lineares são formulados e visualizados no plano complexo  $s$ .

### 2.1.2 Definição

Seja  $f(t) = 0$  para  $t < 0$  e  $s$  uma variável complexa. A transformada de Laplace lateral da função  $f(t)$  é

$$LP[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (2.1)$$

### 2.1.3 Condições de existência da transformada

A transformada de Laplace existe se a integral de Laplace converge. A integral converge se  $f(t)$  for contínua por trechos e se for de ordem exponencial quando  $t$  tende a infinito. Uma função é dita de ordem exponencial se existe um real  $\sigma$  positivo tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\sigma t} |f(t)| = 0 \quad (2.2)$$

Por exemplo, a função  $e^{t^2}$  com  $0 < t < \infty$  não possui transformada de Laplace pois não é de ordem exponencial. Entretanto, a função

$$f(t) = e^{t^2} \text{ for } 0 < t < T \quad (2.3)$$

$$= 0 \text{ for } t \leq 0 \text{ e } t > T \quad (2.4)$$

possui transformada de Laplace. Sinais fisicamente gerados sempre possuem transformada de Laplace.

### 2.1.4 A transformada de algumas funções

#### Função exponencial

Considere a função exponencial

$$f(t) = 0 \text{ for } t < 0 \quad (2.5)$$

$$= Ae^{-\alpha t} \text{ for } t \geq 0 \quad (2.6)$$

sua transformada de Laplace é

$$LP[f(t)] = \int_0^{\infty} Ae^{-\alpha t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} Ae^{-(\alpha+s)t} dt = \frac{A}{s + \alpha} \quad (2.7)$$

#### Função degrau

Considere a função degrau

$$f(t) = 0 \text{ for } t < 0 \quad (2.8)$$

$$= A \text{ for } t > 0 \quad (2.9)$$

sua transformada de Laplace é

$$LP[A] = \int_0^{\infty} Ae^{-st} dt = \frac{A}{s} \quad (2.10)$$

**Função rampa**

Considere a função rampa

$$f(t) = 0 \text{ for } t < 0 \quad (2.11)$$

$$= At \text{ for } t \geq 0 \quad (2.12)$$

sua transformada de Laplace é

$$LP[At] = \int_0^{\infty} Ate^{-st} dt \quad (2.13)$$

que pode ser integrada por partes

$$LP[At] = A \left( t \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{-s} dt \right) = \frac{A}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{A}{s^2} \quad (2.14)$$

**Função senoidal**

Considere a função senoidal

$$f(t) = 0 \text{ for } t < 0 \quad (2.15)$$

$$= A \sin(\omega t) \text{ for } t \geq 0 \quad (2.16)$$

sua transformada de Laplace é

$$LP[A \sin(\omega t)] = \int_0^{\infty} \frac{A}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) dt \quad (2.17)$$

$$= \frac{A}{2j} \frac{1}{(s - j\omega)} - \frac{A}{2j} \frac{1}{(s + j\omega)} \quad (2.18)$$

$$= \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (2.19)$$

**Função pulso**

Considere a função pulso

$$f(t) = \frac{A}{t_0} \text{ for } 0 < t < t_0 \quad (2.20)$$

$$= 0 \text{ for } t < 0 \text{ e } t > t_0 \quad (2.21)$$

que pode ser definida em termos da função degrau

$$f(t) = \frac{A}{t_0}1(t) - \frac{A}{t_0}1(t - t_0) \quad (2.22)$$

A transformada de Laplace torna-se

$$LP[f(t)] = LP\left[1(t)\right] - LP\left[1(t - t_0)\right] \quad (2.23)$$

$$= \frac{A}{t_0 s} - \frac{A}{t_0 s} e^{-st_0} \quad (2.24)$$

$$= \frac{A}{t_0 s} (1 - e^{-st_0}) \quad (2.25)$$

### Função impulso

Considere a função impulso

$$f(t) = \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{A}{t_0} \text{ for } 0 < t < t_0 \quad (2.26)$$

$$= 0 \text{ for } t < 0 \text{ e } t > t_0 \quad (2.27)$$

sua transformada de Laplace é

$$LP[f(t)] = \lim_{t_0 \rightarrow 0} \left[ \frac{A}{t_0 s} (1 - e^{-st_0}) \right] \quad (2.28)$$

$$= \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dt_0} [A(1 - e^{-st_0})]}{\frac{d}{dt_0} (st_0)} \quad (2.29)$$

$$= \frac{As}{s} = A \quad (2.30)$$

### 2.1.5 Superposição

A transformada de Laplace é um operador linear, ou seja,

$$LP[f_1(t) + f_2(t)] = LP[f_1(t)] + LP[f_2(t)] \quad (2.31)$$

### 2.1.6 Translação de uma função

Considere a função  $f(t - \alpha)1(t - \alpha)$  com  $\alpha > 0$ . Observe que o degrau unitário impõe valores nulos para  $t < \alpha$ . Por definição a transformada de Laplace é

$$LP[f(t - \alpha)1(t - \alpha)] = \int_0^{\infty} f(t - \alpha)1(t - \alpha)e^{-st} dt \quad (2.32)$$

Mudando a variável de integração de  $t$  para  $\tau$  onde  $\tau = t - \alpha$

$$LP[f(t - \alpha)1(t - \alpha)] = \int_{-\alpha}^{\infty} f(\tau)1(\tau)e^{-s(\tau+\alpha)} dt \quad (2.33)$$

$$= \int_0^{\infty} f(\tau)1(\tau)e^{-s(\tau+\alpha)} dt \quad (2.34)$$

$$= \int_0^{\infty} f(\tau)1(\tau)e^{-s\tau} e^{-s\alpha} dt \quad (2.35)$$

$$= e^{-s\alpha} \int_0^{\infty} f(\tau)1(\tau)e^{-s\tau} dt \quad (2.36)$$

$$= e^{-s\alpha} F(s) \quad (2.37)$$

### 2.1.7 Multiplicação por $e^{-\alpha t}$

A transformada de Laplace de uma função  $f(t)$  amortecida por  $e^{-\alpha t}$  resulta em

$$LP[e^{-\alpha t} f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} f(t) e^{-st} dt = F(s + \alpha) \quad (2.38)$$

Ou seja, multiplicar por uma exponencial provoca um deslocamento da função no plano  $s$ .

### 2.1.8 Limite inferior da transformada de Laplace

Se a função  $f(t)$  contém um impulso em  $t = 0$  convém distinguir dois tipos de transformada de Laplace

$$LP_+[f(t)] = \int_{0+}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (2.39)$$

$$LP_-[f(t)] = \int_{0-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (2.40)$$

### 2.1.9 Teorema da Diferenciação

Integra-se a transformada de Laplace por partes

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = f(t) \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left[ \frac{d}{dt} f(t) \right] \frac{e^{-st}}{-s} dt \quad (2.41)$$

ou seja,

$$F(s) = \frac{f(0)}{s} + \frac{1}{s} LP \left[ \frac{d}{dt} f(t) \right] \quad (2.42)$$

rearranjando,

$$LP \left[ \frac{d}{dt} f(t) \right] = sF(s) - f(0) \quad (2.43)$$

Analogamente,

$$LP \left[ \frac{d^2}{dt^2} f(t) \right] = s^2 F(s) - sf(0) - \dot{f}(0) \quad (2.44)$$

### 2.1.10 Teorema do valor final

Uma propriedade importante da Transformada de Laplace é o Teorema do valor final, ela permite calcular o limite de uma função quando o tempo tende a infinito, ou seja, o valor de regime permanente, quando este limite existe.

Existem tres possibilidades para o limite de uma função quando o tempo tende a infinito, o limite é constante, o limite é indefinido ou a função é ilimitada. Se a Transformada de Laplace,  $Y(s)$ , tiver algum pólo no semiplano direito,  $y(t)$  será ilimitada. Se  $Y(s)$  tiver um par de pólos no eixo imaginário, então  $y(t)$  contém uma função seno que persiste para sempre e o valor final não é definido. Se todos os pólos estiverem no semiplano esquerdo de  $s$  e apenas um pólo estiver em  $s = 0$ , então todos os termos de  $y(t)$  decaem para zero exceto um termo que é constante no tempo.

*Teorema: Se todos os pólos de  $Y(s)$  pertencem ao semiplano esquerdo, então*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) \quad (2.45)$$

De fato, a transformada de Laplace da derivada de uma função é

$$L \left[ \frac{df}{dt} \right] = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{df}{dt} dt \quad (2.46)$$

Mostra-se conveniente investigar o limite da eq. 2.46 quando  $s \rightarrow 0$ ,

$$\lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0^-)] = \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{df}{dt} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0^-) \quad (2.47)$$

como se desejava demonstrar.

### 2.1.11 Teorema do valor inicial

Outro teorema permite calcular o valor inicial de uma função quando se conhece a sua transformada de Laplace.

*Teorema:* Para qualquer par,  $F(s)$  e  $f(t)$ , associado pela transformada de Laplace,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0^+) \quad (2.48)$$

De fato, a transformada de Laplace da derivada de uma função é

$$L \left[ \frac{df}{dt} \right] = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{df}{dt} dt \quad (2.49)$$

Mostra-se conveniente investigar o limite de  $s \rightarrow \infty$  da eq. 2.49,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} L \left[ \frac{df}{dt} \right] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[ \int_{0^-}^{0^+} e^{-st} \frac{df}{dt} dt + \int_{0^+}^{\infty} e^{-st} \frac{df}{dt} dt \right] \quad (2.50)$$

O segundo termo da eq. 2.50 tende a zero uma vez que  $e^{-st} \rightarrow 0$ . O primeiro termo é igual a  $sF(s) - f(0^-)$ , desta forma,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0^-)] = \lim_{s \rightarrow \infty} [f(0^+) - f(0^-)] \quad (2.51)$$

ou seja,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0^+) \quad (2.52)$$

### 2.1.12 Teorema da Integral

Deseja-se agora determinar a transformada de Laplace da integral no tempo de uma função,

$$F_1(s) = L \left[ \int_0^t f(\zeta) d\zeta \right] = \int_0^{\infty} \left[ \int_0^t f(\zeta) d\zeta \right] e^{-st} dt \quad (2.53)$$

Integrando por partes, onde

$$u = \int_0^t f(\zeta) d\zeta \quad (2.54)$$

e

$$dv = e^{-st} dt \quad (2.55)$$

Resulta,

$$F_1(s) = \left[ -\frac{e^{-st}}{s} \int_0^t f(\zeta) d\zeta \right]_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{1}{s} e^{-st} f(t) dt = \frac{1}{s} F(s) \quad (2.56)$$

### 2.1.13 Transformada Inversa de Laplace

A maneira mais simples de determinar a transformada inversa de Laplace é através da consulta de tabelas de transformadas de Laplace. Outra maneira consiste em expandir a função  $F(s)$  em frações parciais.

#### Expansão em frações parciais

Vamos considerar inicialmente  $F(s)$  que envolve pólos distintos. A função  $F(s)$  pode sempre ser expandida em uma soma de frações parciais.

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{a_1}{s + p_1} + \frac{a_2}{s + p_2} + \dots + \frac{a_n}{s + p_n} \quad (2.57)$$

Os valores dos resíduos  $a_k$  podem ser determinados por,

$$a_k = \left[ (s + p_k) \frac{B(s)}{A(s)} \right]_{s=-p_k} \quad (2.58)$$

Uma vez que,

$$LP^{-1} \left[ \frac{a_k}{s + p_k} \right] = a_k e^{-p_k t} \quad (2.59)$$

$F(t)$  resulta,

$$f(t) = \sum_{k=1}^n a_k e^{-p_k t} \quad (2.60)$$

### 2.1.14 Solução de Equações Lineares Invariantes no Tempo

Vamos abordar a técnica de solução de equações lineares invariantes no tempo usando a Transformada de Laplace através de um exemplo.

*Exemplo:* Determine a solução de

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 4y(t) = 3 \quad (2.61)$$

onde  $y(0) = \alpha$ ,  $\dot{y}(0) = \beta$ . Determina-se a Transformada de Laplace dos dois lados da eq. 2.61

$$s^2Y(s) - s\alpha - \beta + 5[sY(s) - \alpha] + 4Y(s) = \frac{3}{s} \quad (2.62)$$

Isola-se  $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{s(s\alpha + \beta + 5\alpha) + 3}{s(s+1)(s+4)} \quad (2.63)$$

Convém reescrever  $Y(s)$  na forma de frações parciais

$$Y(s) = \frac{3}{s} - \frac{3-\beta-4\alpha}{s+1} + \frac{3-4\alpha-4\beta}{s+4} \quad (2.64)$$

Utilizando a transformada inversa de Laplace de uma fração parcial

$$y(t) = \frac{3}{4} - \frac{3-\beta-4\alpha}{3}e^{-t} + \frac{3-4\alpha-4\beta}{12}e^{-4t} \quad (2.65)$$

## 2.2 A Transformada Z

A transformada  $z$  tem o mesmo papel na análise de sistemas discretos lineares e invariantes no tempo que a transformada de Laplace tem na análise de sistemas lineares, invariantes e contínuos no tempo. A convolução no tempo torna-se um produto de funções no domínio da transformada  $z$ .

### 2.2.1 A transformada $z$ bilateral

A transformada  $z$  de uma sequência discreta é definida pela soma

$$X(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (2.66)$$

onde  $z$  é uma variável complexa.

Uma vez que a transformada  $z$  é definida por uma série infinita, ela existe apenas para os valores de  $z$  em que a série converge. A região de convergência (ROC) é o conjunto de valores de  $z$  em que a série  $X(z)$  assume um valor finito. A ROC de um sinal causal é a região externa de um círculo. A ROC de um sinal anti-causal é a região interna de um círculo.

**Exemplo:** Indique o ROC da sequência

$$x(n) = 1, 2, 5, 7, 0, 1 \quad (2.67)$$

↑

onde a seta vertical denota o instante  $n = 0$

A partir da definição da transformada  $z$

$$X(z) = z^2 + 2z + 5 + 7z^{-1} + z^{-3} \quad (2.68)$$

e portanto, a região de convergência é o plano  $z$  completo com exceção do ponto  $z = 0$  e do ponto  $z = \infty$

Uma série finita ou infinita pode ser representada em forma fechada no domínio  $z$ .

**Exemplo:** Determine a transformada  $z$  da sequência

$$x(n) = 1, \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \dots \quad (2.69)$$

↑

**solução:** da definição de transformada  $z$

$$X(z) = 1 + \frac{1}{2}z^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 z^{-2} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} + \dots \quad (2.70)$$

ou melhor,

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n \quad (2.71)$$

Esta expressão é uma série geométrica infinita

$$1 + A + A^2 + \dots = \frac{1}{1 - A} \quad \text{if } |A| < 1 \quad (2.72)$$

Desta forma, a transformada  $z$  de  $x(n)$  torna-se

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (2.73)$$

com ROC tal que

$$\left|\frac{1}{2}z^{-1}\right| < 1 \rightarrow |z| > \frac{1}{2} \quad (2.74)$$

Uma sequência discreta é univocamente determinada através de sua transformada  $z$  se a região de convergência for especificada.

**Exemplo:** Determine a ROC da sequência

$$x(n) = \alpha^n 1(n) + \beta^n 1(-n - 1) \quad (2.75)$$

**solução:** A partir da definição da transformada  $z$ ,

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \beta^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n + \sum_{m=1}^{\infty} (\beta^{-1} z)^m \quad (2.76)$$

portanto a ROC é tal que

$$|\alpha z^{-1}| < 1 \rightarrow |z| > |\alpha| \quad (2.77)$$

e

$$|\beta^{-1} z| < 1 \rightarrow |z| < |\beta| \quad (2.78)$$

### 2.2.2 Transformada $z$ lateral

A transformada  $z$  bilateral requer que os sinais estejam definidos na faixa de tempo de  $-\infty < n < \infty$ . A transformada  $z$  lateral permite resolver equações de diferenças com condições iniciais especificadas. Por definição a transformada  $z$  lateral é

$$X^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad (2.79)$$

Não é necessário informar a ROC da transformada  $z$  uma vez que os sinais são todos causais. A transformada  $z$  lateral não contém informação a respeito sobre o sinal quando  $n < 0$ ).

**Exemplo:** Determine a transformada  $z$  lateral da sequência

$$x(n) = \begin{array}{cccc} 1, & 2, & 5, & 7, & 0, & 1 \\ & & \uparrow & & & \end{array} \quad (2.80)$$

A partir da definição da transformada  $z$  lateral

$$X(z) = +5 + 7z^{-1} + z^{-3} \quad (2.81)$$

e portanto a transformada  $z$  lateral é diferente da transformada  $z$  bilateral neste caso.

### 2.2.3 Propriedades da transformada $z$

#### Multiplicação por constante

$$Z^+[ax(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} ax(k)z^{-k} \quad (2.82)$$

ou seja,

$$Z^+[ax(k)] = a \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = aX^+(z) \quad (2.83)$$

#### Linearidade

$$Z^+[\alpha f(k) + \beta g(k)] = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} + \beta \sum_{k=0}^{\infty} g(k)z^{-k} \quad (2.84)$$

ou seja,

$$Z^+[\alpha f(k) + \beta g(k)] = \alpha F(z) + \beta G(z) \quad (2.85)$$

#### Multiplicação por $a^k$

$$Z^+[a^k x(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)(a^{-1}z)^{-k} = X^+(a^{-1}z) \quad (2.86)$$

#### Teorema do deslocamento no tempo

$$Z^+[x(k-n)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k-n)z^{-k} \quad (2.87)$$

ou seja,

$$Z^+[x(k-n)] = z^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} x(k-n)z^{-(k-n)} \quad (2.88)$$

admitindo  $x(n)$  causal, e  $m = k - n$

$$Z^+[x(k-n)] = z^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} x(m)z^{-m} = z^{-n} X^+(z) \quad (2.89)$$

#### Teorema da translação complexa

$$Z^+[e^{akT} x(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{akT} x(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)(ze^{aT})^{-k} = X^+(ze^{aT}) \quad (2.90)$$

### 2.2.4 Teorema do valor inicial

$$X^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots \quad (2.91)$$

Vamos investigar o valor que  $X(z)$  assume quando  $z \rightarrow \infty$ ,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x(0) \quad (2.92)$$

Este teorema é útil para avaliar  $x(0)$  quando uma expressão compacta de  $X(z)$  é disponível.

### Teorema do valor final

Considere uma sequência  $x(k)$ , causal, e com todos os pólos dentro do círculo unitário, com uma única possível exceção, a existência de um pólo em  $z = 1$ . Nestas condições a sequência  $x(k)$  é dita estável. Da definição de transformada  $z$

$$Z^+[x(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} \quad (2.93)$$

e

$$Z^+[x(k-1)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k-1)z^{-k} = z^{-1}X(z) \quad (2.94)$$

Subtraindo a última equação da penúltima equação

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} - \sum_{k=0}^{\infty} x(k-1)z^{-k} = X(z) - z^{-1}X(z) \quad (2.95)$$

Aplicando o limite,

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left( \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} - \sum_{k=0}^{\infty} x(k-1)z^{-k} \right) = \lim_{z \rightarrow 1} [(1 - z^{-1})X(z)] \quad (2.96)$$

O lado esquerdo da eq. 2.96 é

$$[x(0) - x(-1)] + [x(1) - x(0)] + [x(2) - x(1)] + \dots = x(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} x(k) \quad (2.97)$$

Portanto, da eq. 2.96 e da eq. 2.97, obtém-se

$$\lim_{z \rightarrow 1} (X(z) - z^{-1}X(z)) = \lim_{k \rightarrow \infty} x(k) \quad (2.98)$$

### 2.2.5 A transformada $z$ inversa

É necessário conhecer a inversa da transformada  $z$  para que ela seja útil na análise de sistemas lineares. A seguir são apresentados quatro métodos de calcular a transformada inversa  $z$ .

#### Método da divisão direta

Este método é utilizado quando é difícil a obtenção de uma expressão em forma fechada para a transformada inversa  $Z^{-1}[X(z)]$  ou estamos interessados apenas em alguns valores iniciais de  $x(k)$ .

A transformada  $X(z)$  precisa estar na forma de racional, isto é, como a razão entre dois polinômios e tanto numerador quanto denominador devem ser representados como uma série de potências crescentes de  $z^{-1}$

**Exemplo:** Determine  $x(k)$  quando

$$X(z) = \frac{10z + 5}{(z - 1)(z - 0.2)} \quad (2.99)$$

**solução:**

Inicialmente, numerador e denominador devem ser escritos como séries de potências crescentes de  $z^{-1}$

$$X(z) = \frac{10z^{-1} + 5z^{-2}}{1 - 1.2z^{-1} + 0.2z^{-2}} \quad (2.100)$$

A divisão do numerador pelo denominador resulta

$$1 - 1.2z^{-1} + 0.2z^{-2} \begin{array}{r} \underline{10z^{-1} + 17z^{-2} + 18z^{-3} + \dots} \\ 10z^{-1} + 5z^{-2} \\ \hline 10z^{-1} - 12z^{-2} + 2z^{-3} \\ \underline{17z^{-2} - 2z^{-3}} \\ 17z^{-2} - 20.4z^{-3} + 3.4z^{-4} \\ \underline{18.4z^{-3} - 3.4z^{-4}} \end{array} \quad (2.101)$$

Portanto, a sequência  $x(k)$  é

$$X(z) = 10z^{-1} + 17z^{-2} + 18z^{-3} + \dots \quad (2.102)$$

**Método por equação de diferenças**

A resposta de um sistema linear  $y(k)$  é igual à convolução discreta entre sua função de transferência  $g(k)$  e sua excitação  $x(k)$ .

$$Y(z) = G(z)X(z) \quad (2.103)$$

**Exemplo:** Considere um sistema linear com

$$G(z) = \frac{0.4673z - 0.3393}{z^2 - 1.5327z + 0.6607} \quad (2.104)$$

Forma-se a equação de diferenças a partir de

$$(z^2 - 1.5327z + 0.6607)Y(z) = (0.4673z - 0.3393)X(z) \quad (2.105)$$

ou seja,

$$y(k+2) - 1.5327y(k+1) + 0.6607y(k) = 0.4673x(k+1) - 0.339x(k) \quad (2.106)$$

Admitindo que  $g(k) = 0$  para  $k < 0$ , e substituindo  $k = -2$  e depois  $k = -1$  determina-se  $y(0)$  e  $y(1)$  na equação anterior. Basta incrementar  $k$  para obter  $y(2)$ ,  $y(3)$ , e assim por diante.

**Método da expansão em frações parciais**

Este método é muito útil quando  $X(z)$  é uma função na forma

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_Mz^{-M}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + a_3z^{-3} + \dots + a_Nz^{-N}} \quad (2.107)$$

Se  $a_N$  for diferente de zero e  $M < N$  a função racional é dita própria. Se a função  $X(z)$  for imprópria, ela sempre pode ser escrita na forma de um polinômio mais uma função racional própria.

Eliminam-se as potências negativas em  $z$ ,

$$X(z) = \frac{b_0z^N + b_1z^{N-1} + b_2z^{N-2} + \dots + b_Mz^{N-M}}{z^N + a_1z^{N-1} + a_2z^{N-2} + a_3z^{N-3} + \dots + a_N} \quad (2.108)$$

A função  $X(z)/z$  é sempre própria

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{b_0z^{N-1} + b_1z^{N-2} + b_2z^{N-3} + \dots + b_Mz^{N-M-1}}{z^N + a_1z^{N-1} + a_2z^{N-2} + a_3z^{N-3} + \dots + a_N} \quad (2.109)$$

Os valores de  $z$  que zeram o denominador da eq. 2.108 são chamados de pólos da função.

### Pólos distintos

Quando os pólos são todos distintos, procura-se uma expansão do tipo

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A_1}{z - p_1} + \frac{A_2}{z - p_2} + \dots + \frac{A_N}{z - p_N} \quad (2.110)$$

Para determinar cada um dos  $A_k$ , multiplica-se  $X(z)/z$  por  $(z - p_k)$

$$\frac{(z - p_k)X(z)}{z} = \frac{(z - p_k)A_1}{z - p_1} + \frac{(z - p_k)A_2}{z - p_2} + \dots + \frac{(z - p_k)A_N}{z - p_N} \quad (2.111)$$

e finalmente, no limite em que  $z \rightarrow z_k$  resulta  $A_k$ .

### Pólos Múltiplos

Considere o caso em que o  $k$ -ésimo pólo tem multiplicidade  $l$ . A expansão em frações parciais deve conter os termos

$$\frac{A_{1k}}{z - p_k} + \frac{A_{2k}}{(z - p_k)^2} + \dots + \frac{A_{lk}}{(z - p_k)^l} \quad (2.112)$$

Multiplica-se toda a expansão em frações parciais por  $(z - p_k)^l$ . A expressão resultante e suas derivadas com respeito a  $z$  são avaliadas em  $z = z_k$  para determinar os coeficientes  $A_k$ .

**Exemplo:** Determine a expansão em frações parciais de

$$X(z) = \frac{1}{(1 + z^{-1})(1 - z^{-1})^2} \quad (2.113)$$

Eliminam-se potências negativas de  $z$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z^2}{(z + 1)(z - 1)^2} \quad (2.114)$$

A expansão em frações parciais deve ter a forma

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A_1}{z + 1} + \frac{A_2}{z - 1} + \frac{A_3}{(z - 1)^2} \quad (2.115)$$

Multiplica-se a eq. 2.115 por  $(z + 1)$  e resulta

$$\frac{(z + 1)X(z)}{z} = \frac{(z + 1)A_1}{z + 1} + \frac{(z + 1)A_2}{z - 1} + \frac{(z + 1)A_3}{(z - 1)^2} \quad (2.116)$$

Ao avaliar eq. 2.116 quando  $z = -1$

$$A_1 = \frac{(z+1)X(z)}{z} = \frac{1}{4} \quad (2.117)$$

Multiplica-se a eq. 2.115 por  $(z-1)^2$  e resulta

$$\frac{(z-1)^2 X(z)}{z} = \frac{(z-1)^2 A_1}{(z+1)} + \frac{(z-1)^2 A_2}{(z-1)} + \frac{(z-1)^2 A_3}{(z-1)^2} \quad (2.118)$$

e resulta

$$\frac{(z-1)^2 X(z)}{z} = \frac{(z-1)^2 A_1}{(z+1)} + (z-1)A_2 + A_3 \quad (2.119)$$

Ao avaliar eq. 2.118 quando  $z = 1$

$$A_3 = \frac{(z+1)X(z)}{z} = \frac{1}{2} \quad (2.120)$$

Deriva-se os dois lados da eq. 2.119 com respeito a  $z$

$$\frac{d}{dz} \left[ \frac{(z-1)^2 X(z)}{z} \right] = \frac{2(z-1)(z+1)A_1}{(z+1)^2} + \frac{-(z-1)^2 A_1}{(z+1)^2} + A_2 \quad (2.121)$$

E avalia-se a eq. 2.121 em  $z = 1$

$$A_2 = \frac{d}{dz} \left[ \frac{(z-1)^2 X(z)}{z} \right] = \frac{3}{4} \quad (2.122)$$

Consultando uma tabela de transformadas  $z$  determina-se a transformada inversa de cada fração parcial.



# Chapter 3

## Planta contínua no tempo com controlador de tempo discreto

### 3.1 Transformada de Laplace do 'Sampler and Hold'

Vamos considerar um amostrador fictício, chamado *amostrador por impulsos*. O sinal amostrado desta forma é um trem de impulsos, conforme eq. 3.1 e a fig. 3.1

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT) \quad (3.1)$$

A Transformada de Laplace do sinal amostrado por impulsos é

$$X^*(s) = \mathcal{L}[x^*(t)] = x(0)\mathcal{L}[\delta(t)] + x(1)\mathcal{L}[\delta(t-T)] + x(2)\mathcal{L}[\delta(t-2T)] + \dots \quad (3.2)$$

Entretanto, a Transformada de Laplace da função impulso é a intensidade do impulso. Lembrando da propriedade da translação no tempo

$$X^*(s) = x(0) + x(1)e^{-Ts} + x(2)e^{-2Ts} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs} \quad (3.3)$$

A semelhança entre  $X^*(s)$  de um sinal amostrado por impulsos com  $X(z)$  de uma seqüência discreta é enorme. Em particular, se definimos  $z = e^{Ts}$  as duas transformadas se tornam iguais

$$X^*(s)|_{s=(1/T)\ln(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = X(z) \quad (3.4)$$

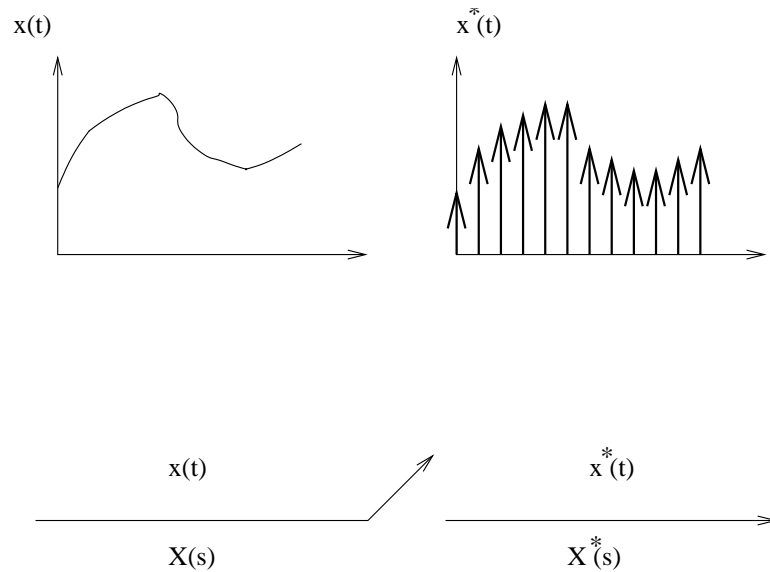


Figure 3.1: Associativa da Convolução

Portanto, a operação fictícia chamada 'amostragem por impulsos' é facilmente descrita no plano  $s$  e seu resultado é facilmente descrito no plano  $z$ .

As consequências da semelhança entre  $X^*(s)$  e  $X(z)$  são importantes. É possível mapear o plano  $s$  no plano  $z$ , e traduzir critérios de estabilidade desenvolvidos no plano  $s$  para gerar critérios de estabilidade no plano  $z$ .

As atenções voltam-se agora para uma representação em Transformada de Laplace para o processo fictício chamado *data-hold*. *Data-hold* é o processo que gera um sinal contínuo  $h(t)$  a partir de uma sequência discreta  $x(kT)$ . Durante o intervalo  $kT < t < (k+1)T$ , o sinal contínuo pode ser aproximado por um polinômio

$$h(kT - \tau) = a_n \tau^n + a_{n-1} \tau^{n-1} + \dots + a_1 \tau + a_0 \quad (3.5)$$

Quando  $\tau = 0$ ,  $h(kT - \tau)$  deve concordar com  $x(kT)$ , de fato

$$h(kT - \tau)|_0 = a_n \tau^n + a_{n-1} \tau^{n-1} + \dots + a_1 \tau + h(kT) = h(kT) \quad (3.6)$$

O *data-hold* mais simples utiliza  $n = 0$  e é chamado de *data-hold* de ordem zero. O resultado pode ser visto na fig. 3.2 e a representação matemática está na eq. 3.7.

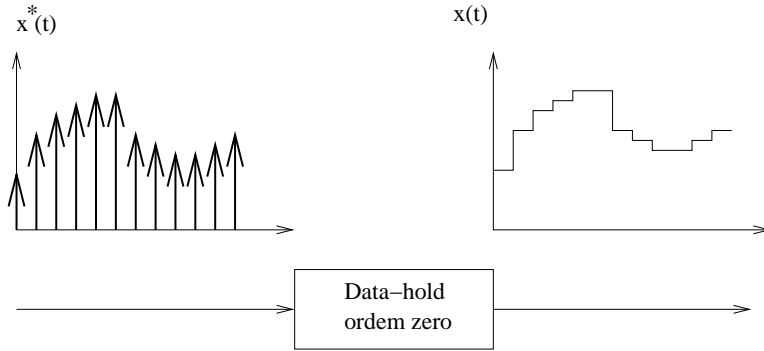


Figure 3.2: Processo *data-hold* de ordem zero

$$x_h(t) = x(0)[u(t) - u(t-T)] + x(1)[u(t-T) - u(t-2T)] + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)[u(t-kT) - u(t-(k+1)T)] \quad (3.7)$$

Lembrando que a Transformada de Laplace da função degrau é  $1/s$  e a propriedade da translação no tempo,

$$\mathcal{L}[u[t - kT]] = \frac{e^{-kTs}}{s}, \quad (3.8)$$

a Transformada de Laplace do sinal feito contínuo por um segurador de ordem zero, eq. 3.7, torna-se

$$X_h(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \frac{e^{-kTs} - e^{-(k+1)Ts}}{s} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs} \quad (3.9)$$

ou seja,

$$X_h(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} X^*(s) \quad (3.10)$$

Portanto, o modelo do *data-hold* de ordem zero é simplesmente,

$$G_{h0}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \quad (3.11)$$

Com estes dois modelos, o modelo de amostrador e o modelo de *data-hold*, é possível representar um sistema misto, parcialmente no tempo contínuo, parcialmente no tempo discreto, no plano  $z$ . Adicionalmente, a região de estabilidade no plano  $s$ , o semi-plano esquerdo, é mapeado para a região interna de um círculo unitário no plano  $z$  através de  $z = e^{sT}$ .



# Chapter 4

## Propriedades básicas da realimentação

### 4.1 Tipos de sistemas e erro de seguimento em regime permanente

Os sistemas podem ser classificados pelo grau do polinômio que representa o sinal de excitação para o qual o erro de seguimento em regime permanente é constante.

Ainda que o sistema seja estável, o sinal de erro pode ser considerável. É preciso verificar o erro em regime permanente resultante de uma excitação tipo degrau, rampa ou parábola, para conhecer a habilidade do sistema para seguir sinais de excitação.

Um sistema discreto pode ser classificado de acordo com o número de pólos em  $z = 1$  na função de transferência de malha aberta. O sistema é classificado como tipo 0, 1 ou 2, se a função de transferência de malha aberta tiver 0, 1 ou 2 pólos em  $z = 1$ .

Considere o sistema da fig. ???. Do diagrama sabe-se que

$$e(t) = r(t) - b(t) \quad (4.1)$$

O teorema do valor final informa que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} [(1 - z^{-1})E(z)] \quad (4.2)$$

Ainda, a partir do diagrama,

$$G(z) = r(1 - z^{-1})Z[G_p(s)/s] \quad (4.3)$$

e

$$GH(z) = r(1 - z^{-1})Z[(G_p(s)H(s))/s] \quad (4.4)$$

Portanto o erro,

$$E(z) = R(z) - GH(z)E(z) \quad (4.5)$$

que pode ser reescrito como

$$E(z) = \frac{1}{1 + GH(z)}R(z) \quad (4.6)$$

Finalmente, o erro em regime permanente,

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + GH(z)} R(z) \quad (4.7)$$

Quando a excitação é um degrau,  $r(t) = 1(t)$ ,

$$R(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (4.8)$$

e

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + GH(z)} \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (4.9)$$

simplificando,

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + GH(z)} = \frac{1}{1 + K_p} \quad (4.10)$$

Quando a excitação é uma rampa,  $r(t) = t1(t)$ ,

$$R(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} \quad (4.11)$$

e

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + GH(z)} \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} \quad (4.12)$$

simplificando,

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T}{(1 - z^{-1})GH(z)} = \frac{1}{K_v} \quad (4.13)$$

Quando a excitação é uma rampa,  $r(t) = t^2 1(t)/2$ ,

$$R(z) = \frac{T^2(1 - z^{-1})z^{-1}}{2(1 - z^{-1})^3} \quad (4.14)$$

#### 4.1. TIPOS DE SISTEMAS E ERRO DE SEGUIMENTO EM REGIME PERMANENTE 51

e

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + GH(z)} \frac{T^2(1 - z^{-1})z^{-1}}{2(1 - z^{-1})^3} \quad (4.15)$$

simplificando,

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T^2}{(1 - z^{-1})^2 GH(z)} = \frac{1}{K_a} \quad (4.16)$$



# Bibliography

- [1] Kuo, Benjamin C. Digital Control Systems, Holt-Saunders International Editions, 1980. (capítulo 2)
- [2] Ogata, Katsuhito Discrete-Time Control Systems, Prentice-Hall, New Jersey, 2 ed., 1995. Capítulo 2.
- [3] Proakis, J. G. and Dimitris Manolakis, Digital Signal Processing, Macmillan, New York, 1992.