

Notas de PME2200

Raul Gonzalez Lima

25 de Fevereiro de 2009

Conteúdo

1	Teorema do Movimento do Baricentro	5
1.1	Objetivo	5
1.2	Resultante das Forças de um Sistema de Pontos	5
1.3	Momento das Forças em um Sistema de Pontos	7
1.4	Teorema do Movimento do Baricentro TMB	7
2	Teorema da Energia Cinética	13
2.1	Objetivos	13
2.2	Energia Cinética e Matriz de Inércia	13
2.3	Translação de eixos e momentos de inércia	17
2.4	Raio de Giração	18
2.5	Translação de eixos e Produtos de Inércia	18
2.6	Momento Polar de Inércia	19
2.7	Composição de Momentos de Inércia	20
2.8	Matriz de Rotação dos Eixos de um Sistema de Referência	20
2.9	Eixos Principais de Inércia	21
2.10	Teorema da Energia Cinética para um Corpo Rígido	22
3	O Teorema do Momento Angular	25
3.1	Objetivos	25
3.2	Teorema do Momento Angular	27
3.3	Exemplos no plano	27
4	Algumas aplicações do TMA	39
4.1	Objetivos	39
4.2	Rotação ao redor de um eixo fixo	39
4.3	Movimento com um ponto fixo	40
4.4	Movimento geral de um sólido	41
4.5	Precessão estacionária de um pião	45
4.6	Efeito Giroscópico	47

Capítulo 1

Teorema do Movimento do Baricentro

1.1 Objetivo

- Resultante das forças internas
- Momento resultante das forças internas
- Teorema do movimento do baricentro
- Exemplos

1.2 Resultante das Forças de um Sistema de Pontos

Seja um conjunto de pontos materiais P_i de massas m_i , conforme fig. 1.1. A resultante das forças que atuam em P_i é,

$$\vec{R}_i = \sum_j \vec{F}_{i,j}^{ext} + \sum_{k \neq i} \vec{F}_{i,k}^{int} \quad (1.1)$$

onde $\vec{F}_{i,j}^{ext}$ é uma força externa ao sistema de pontos atuando sobre P_i , e $\vec{F}_{i,k}^{int}$ é a ação de P_k sobre P_i .

Admitindo a validade do princípio da ação e reação, isto é, $\vec{F}_{i,k}^{int} = -\vec{F}_{k,i}^{int}$. A somatória de todas as forças internas torna-se nula,

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{i,j}^{int} = \vec{0} \quad (1.2)$$

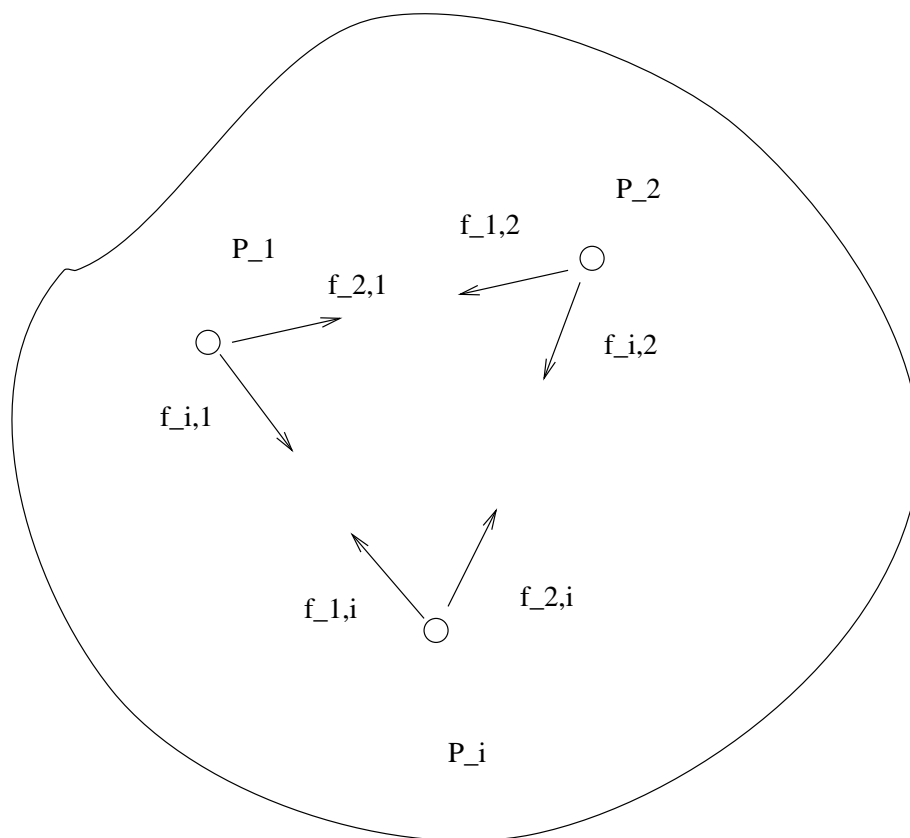


Figura 1.1: Sistema de pontos materiais

A resultante total do sistema de forças que atuam no sistema de pontos materiais, $\vec{R} = \sum_i \vec{R}_i$, é igual à resultante das forças externas apenas, uma vez que as forças internas se cancelam. Ou seja,

$$\vec{R} = \sum_i \vec{R}_i^{ext} = \sum_i \sum_j \vec{F}_{i,j}^{ext} \quad (1.3)$$

1.3 Momento das Forças em um Sistema de Pontos

O momento de todas as forças que atuam sobre um sistema, em relação ao p'olo O , é, por definição,

$$\vec{M}_O = \sum_i [(P_i - O) \wedge \vec{R}_i] \quad (1.4)$$

Expandindo \vec{R}_i em parcelas de forças internas e externas,

$$\vec{M}_O = \sum_i [(P_i - O)] \wedge (\vec{R}_i^{ext} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{i,j}^{int}) \quad (1.5)$$

Isolando o momento causado pelas das forças externas, obtemos dois termos,

$$\vec{M}_O = \sum_i [(P_i - O) \wedge \vec{R}_i] + \sum_i [(P_i - O) \wedge (\sum_{j \neq i} \vec{F}_{i,j}^{int})] \quad (1.6)$$

Admitindo novamente a validade do princípio da ação e reação, para cada termo $(P_i - O) \wedge \vec{F}_{i,j}^{int}$ existe $(P_i - O) \wedge \vec{F}_{j,i}^{int}$ que se cancelam levando o segundo termo da eq. 1.6 a tornar-se nulo, ver fig. 1.2. Ou seja, *o momento das forças internas é nulo.*

Resulta da eq. 1.6 que *o momento total das forças que atuam no sistema de pontos é igual ao momento das forças externas ao sistema de pontos.*

1.4 Teorema do Movimento do Baricentro TMB

O baricentro de um sistema de pontos se comporta como se nele estivesse concentrada toda a massa do sistema e nele agisse a resultante das forças externas. De fato, por definição, $m(G - O) = \sum_i m_i(P_i - O)$, onde G é o baricentro do sistema e m é a massa total do sistema. Derivando esta equação no tempo,

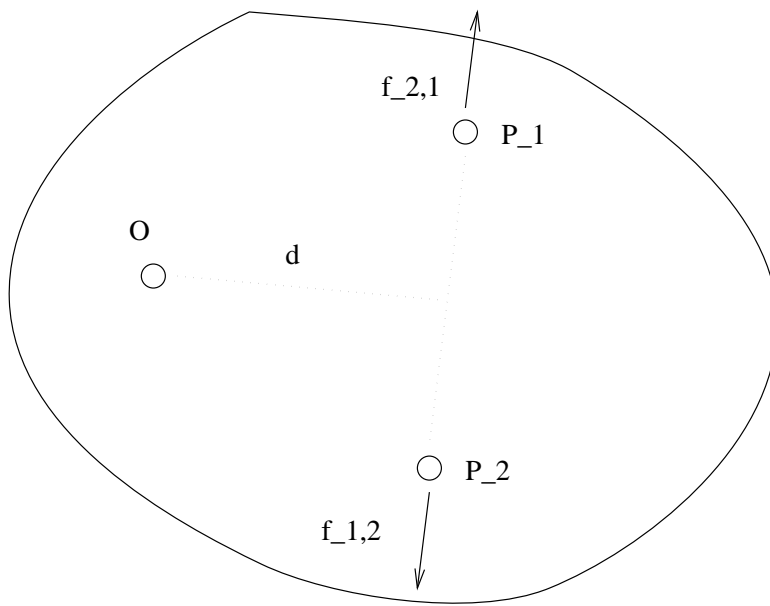


Figura 1.2: Par de forças diretamente opostas

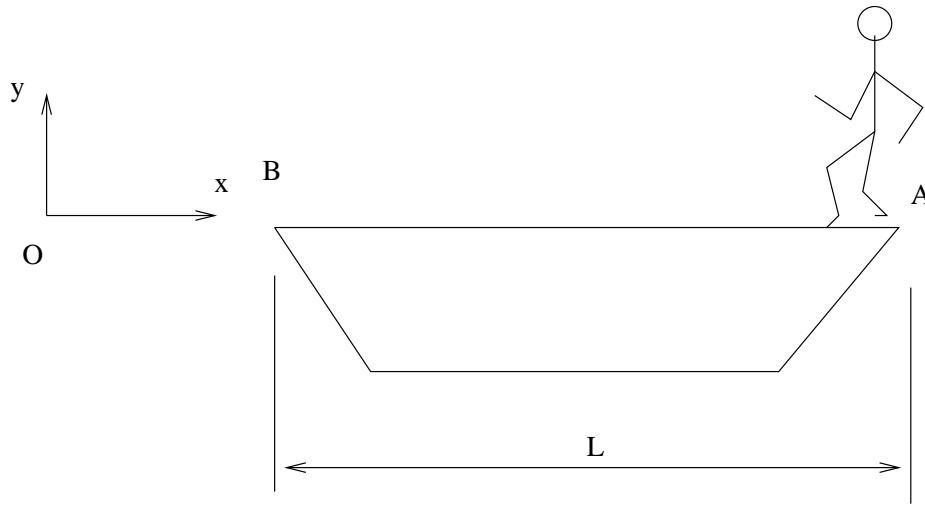


Figura 1.3: Bote com um tripulante

$$m(\vec{v}_G - \vec{v}_O) = \sum_i m_i \vec{v}_i - \sum_i m_i \vec{v}_O \quad (1.7)$$

Simplificando,

$$m\vec{v}_G = \sum_i m_i \vec{v}_i \quad (1.8)$$

Derivando no tempo, mais uma vez,

$$m\vec{a}_G = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{R}_i = \vec{R}^{ext} \quad (1.9)$$

Observe que, se numa direção \vec{u} , a resultante for nula, $\vec{R} \cdot \vec{u} = 0$, então conserva-se a quantidade de movimento nesta direção,

$$m\vec{a}_G \cdot \vec{u} = 0 \implies m\vec{v}_G \cdot \vec{u} = cte \quad (1.10)$$

Exemplo: Qual é o deslocamento de um bote quando um tripulante se desloca de um extremo ao outro? Dados m , a massa do tripulante, M , a massa do bote, e L , o comprimento do bote.

$$(M + m)\vec{v}_G = \vec{0} \implies G - O = cte \quad (1.11)$$

Da definição de baricentro,

$$G - O = \frac{mL + ML/2}{m + M} = \frac{mx + M(x + L/2)}{m + M} \quad (1.12)$$

Portanto,

$$x = \frac{mL}{m + M} \quad (1.13)$$

Exemplo: Uma granada de massa m move-se a uma altura h , com velocidade horizontal v_0 para a direita quando explode em dois fragmentos de massas m_1 e massa m_2 . Um fragmento atinge o solo no instante T , a uma distância d . Determine a posição do outro fragmento neste instante.

No instante em que o primeiro fragmento atinge o solo, a posição do centro de massa é dada por $x_G = v_0T$ e $y_G = h - gT^2/2$.

A partir da definição de centro de massa tem-se que

$$mx_G = m_1x_1 + m_2d \quad (1.14)$$

e

$$my_G = m_1y_1 + m_20 \quad (1.15)$$

Destas duas equações, resulta

$$x_1 = \frac{1}{m_1}[mv_0T - m_2d] \quad (1.16)$$

$$y_1 = \frac{m}{m_1}[h - gT^2/2] \quad (1.17)$$

Exemplo: Um carro de massa M tem centro de massa no ponto A . Um bloco de massa m jaz sobre a dianteira do carro e tem centro de massa no ponto B . O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o carro é $\mu = 0,1$. Atua sobre o carro uma força horizontal F . Determinar o intervalo de tempo que leva o bloco para abandonar o carro de 1 m de comprimento.

A normal de apoio vale $N = mg$ e a força de atrito máxima é μN . Da lei fundamental, $\mu N = ma_B$, ou seja, $a_B = \mu g$.

Da definição de centro de massa, $a_G = (a_A + a_B)/2$. A aceleração do centro de massa é $a_G = F/(m + M)$. Portanto a aceleração do carro

$$a_A = 2a_G - a_B \quad (1.18)$$

e a aceleração do bloco relativa ao carro

$$a_{Brel} = a_B - a_A = -2(a_G - a_B) = -2(F/(m + M) - \mu g) \quad (1.19)$$

A aceleração relativa é constante. O movimento relativo é uniformemente acelerado $x_{Brel} = a_{Brel}t^2/2$. O instante em que o bloco deixa o carro é

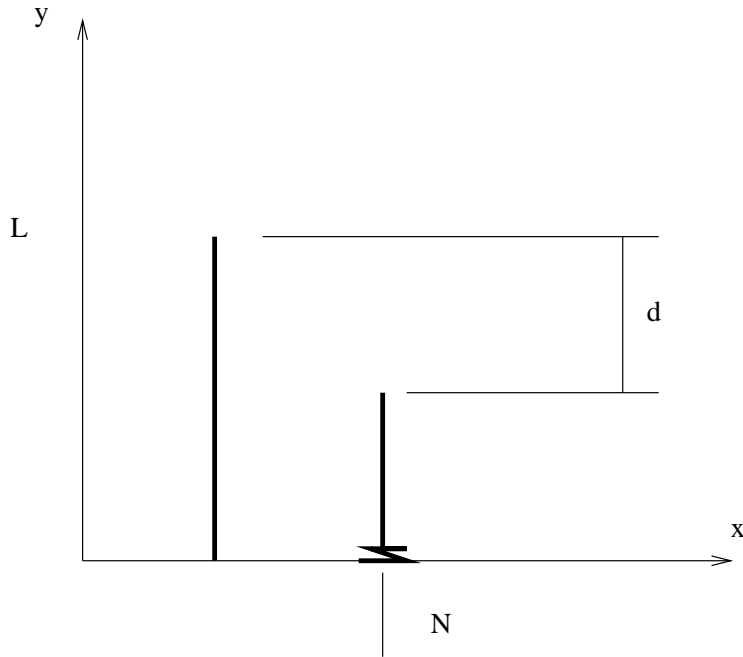


Figura 1.4: Corda em queda livre

$$t = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{F}{(m+M)} - \mu g\right)}} \quad (1.20)$$

Exemplo: Uma corda de comprimento L está suspensa verticalmente por seu extremo A , com seu extremo inferior B tocando o solo. Em seguida, a corda é abandonada. Determinar a ação do solo sobre a corda após a extremidade A da corda ter descido a distância a . Dados $m = \rho L$, massa total da corda, e ρ , densidade linear.

Por definição, a altura do baricentro é,

$$h_G = \frac{m_{\text{solo}}(h_{\text{solo}}) + m_{\text{vertical}}(h_{\text{vertical}})}{\rho L} \quad (1.21)$$

Tomando o solo como referência, $h_{\text{solo}} = 0$ e observando que $m_{\text{vertical}} = (L - a)\rho$ e que $h_{\text{vertical}} = (L - a)/2$, temos

$$h_G = \frac{(L - a)^2}{2L} \implies v_G = \frac{-(L - a)\dot{a}}{L} \quad (1.22)$$

Derivando mais uma vez no tempo,

$$a_G = \frac{\dot{a}^2}{L} - \frac{(L - a)\ddot{a}}{L} \quad (1.23)$$

Da lei fundamental,

$$ma_G = -mg + N \quad (1.24)$$

Sabe-se ainda que,

$$\frac{d\dot{a}}{dt} = \frac{da}{dt} \frac{d\dot{a}}{da} = g \quad (1.25)$$

Ou seja,

$$\dot{a} d\dot{a} = g da \implies \frac{\dot{a}^2}{2} = ga + C \quad (1.26)$$

Mas sabe-se que $\dot{a} = 0$ para $a = 0$ e decorre que $C = 0$. Das eqs. 1.23 e 1.26,

$$a_G = \frac{2ga}{L} - \frac{(L-a)g}{L} \quad (1.27)$$

Finalmente, introduzindo eq. 1.27 na eq. 1.24, temos $N = 3ag\rho$.

Capítulo 2

Teorema da Energia Cinética

Antes de abordar o teorema da energia cinética para um corpo rígido definem-se algumas grandezas que surgem no cálculo da energia cinética e do momento angular de um sistema de pontos rigidamente ligados.

2.1 Objetivos

- Energia cinética de um corpo rígido
- Matriz de Inércia
- Translação de eixos e o momento de inércia
- Translação de eixos e o produto de inércia
- Matriz de Rotação
- Eixos principais de inércia
- Teorema da Energia Cinética
- Exemplos

2.2 Energia Cinética e Matriz de Inércia

A energia cinética de um sistema de pontos materiais é a soma da energia cinética de cada ponto do sistema,

$$T = \sum_i \frac{m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i}{2} \quad (2.1)$$

A expressão da energia cinética de um sistema de pontos rigidamente ligados será utilizada para apresentar o conceito de matriz de inércia. Como o sistema de pontos é *rígido*, vale a equação de Poisson,

$$\vec{v}_i = \vec{v}_O + \vec{w} \wedge (P_i - O) \quad (2.2)$$

Substituindo eq. 2.2 na eq. 2.1, obtém-se,

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{v}_O + \vec{w} \wedge (P_i - O)) \cdot (\vec{v}_O + \vec{w} \wedge (P_i - O)) \quad (2.3)$$

Ou, ainda,

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_o^2 + \sum_i m_i \vec{v}_O \cdot (\vec{w} \wedge (P_i - O)) + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{w} \wedge (P_i - O))^2 \quad (2.4)$$

Para escrever o último termo da eq. 1.26 em coordenadas cartesianas, observa-se,

$$\vec{w} \wedge (P_i - O) = \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ w_x & w_y & w_z \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} \quad (2.5)$$

Calculando o determinante simbólico,

$$\begin{aligned} \vec{w} \wedge (P_i - O) = & (z_i w_y - y_i w_z) \vec{i} \\ & + (x_i w_z - z_i w_x) \vec{j} \\ & + (y_i w_x - x_i w_y) \vec{k} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Calculando o quadrado desta expressão,

$$[\vec{w} \wedge (P_i - O)]^2 = (z_i w_y - y_i w_z)^2 + (x_i w_z - z_i w_x)^2 + (y_i w_x - x_i w_y)^2 \quad (2.7)$$

E expandindo os termos entre parênteses,

$$\begin{aligned} [\vec{w} \wedge (P_i - O)]^2 = & (z_i^2 + y_i^2) w_x^2 + (z_i^2 + x_i^2) w_y^2 + (y_i^2 + x_i^2) w_z^2 \\ & - 2z_i y_i w_y w_z - 2x_i z_i w_x w_y - 2y_i x_i w_y w_x \end{aligned} \quad (2.8)$$

Então,

$$\begin{aligned}
\sum_i \frac{m_i [\vec{w} \wedge (P_i - O)]^2}{2} &= \frac{1}{2} w_x^2 \sum_i (z_i^2 + y_i^2) m_i & (2.9) \\
&+ \frac{1}{2} w_y^2 \sum_i (z_i^2 + x_i^2) m_i \\
&+ \frac{1}{2} w_z^2 \sum_i (x_i^2 + y_i^2) m_i \\
&- w_y w_z \sum_i i z_i y_i m_i \\
&- w_x w_z \sum_i i z_i x_i m_i \\
&- w_y w_x \sum_i i x_i y_i m_i & (2.10)
\end{aligned}$$

Em notação matricial,

$$\frac{1}{2} \sum_i m_i [\vec{w} \wedge (P_i - O)]^2 = \quad (2.11)$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Onde por definição,

$$J_{xx} = \sum_i (z_i^2 + y_i^2) m_i \quad (2.13)$$

$$J_{yy} = \sum_i (z_i^2 + x_i^2) m_i \quad (2.14)$$

$$J_{zz} = \sum_i (x_i^2 + y_i^2) m_i \quad (2.15)$$

$$J_{xy} = \sum_i x_i y_i m_i \quad (2.16)$$

$$J_{yz} = \sum_i y_i z_i m_i \quad (2.17)$$

$$J_{zx} = \sum_i z_i x_i m_i \quad (2.18)$$

As três primeiras equações representam *momentos de inércia* e as três últimas representam *produtos de inércia*.

Exemplo: Calcule os momentos de inércia em relação aos eixos Ox e Oy do arco de circunferência homogêneo de massa m .

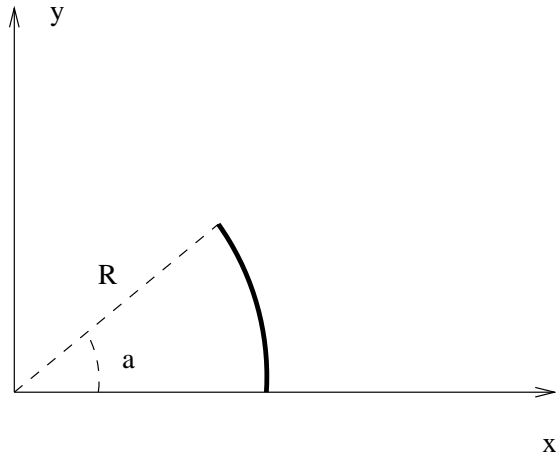


Figura 2.1: Momentos de inércia de um arco

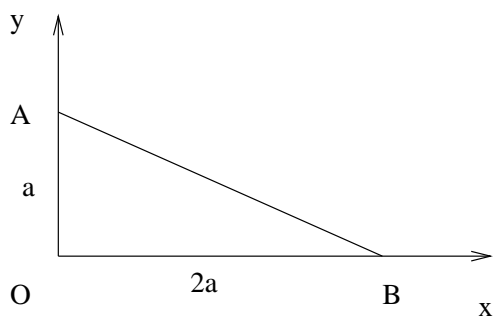


Figura 2.2: Momentos de inércia de um triângulo

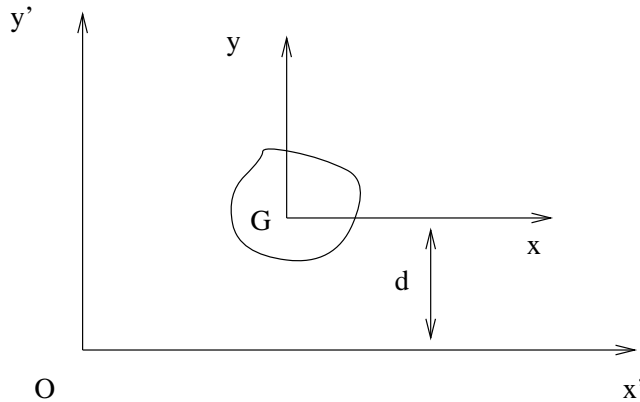


Figura 2.3: Sistemas de referência

Exemplo: Calcular os momentos de inércia em relação aos eixos Ox e Oy do triângulo de vértices OAB . Dados m , ρ e a .

O momento de inércia em relação ao eixo Ox é por definição,

$$J_{xx} = \sum m_i y_i^2 = \int_0^a y^2 \rho p \, dy \quad (2.19)$$

onde $p = 2a(a - y)/a$ representa o comprimento de um elemento de área elementar de largura dy . Substituindo $p = p(a)$ na eq. 2.19 tem-se,

$$J_{xx} = \int_0^a 2\rho(ay^2 - y^3) \, dy = \frac{\rho a^4}{6} = \frac{ma^2}{6} \quad (2.20)$$

Analogamente, o momento de inércia em relação ao eixo Oy é

$$J_{yy} = \int_0^{2a} x^2 \rho p(x) \, dx \quad (2.21)$$

onde $p(x) = a(2a - x)/2a$ representa o comprimento de um elemento de área elementar de largura dx . Substituindo $p(x)$ na eq. 2.21, tem-se

$$J_{yy} = \int_0^{2a} \rho(ax^2 - x^3/2) \, dx = \rho a^4 = ma^2 \quad (2.22)$$

Observe que $J_{yy} > J_{xx}$.

2.3 Translação de eixos e momentos de inércia

Sejam dois sistemas de referência Gxy e $Ox'y'$. O sistema Gxy passa pelo centro de massa e o sistema $Ox'y'$ é paralelo a este. ver fig. 2.3.

Teorema: O momento de inércia em relação a um eixo paralelo a um eixo baricentral é igual à soma do momento de inércia em relação ao eixo baricentral e o produto da massa do corpo pelo quadrado da distância entre os eixos.

De fato,

$$J_{x'x'} = \int_{Area} (d + y)^2 \rho dA \quad (2.23)$$

Expandindo o termo entre parênteses,

$$J_{x'x'} = \int_{Area} (d^2 + y^2 + 2yd) dA = d^2m + J_{xx} + 2d\rho \int_{Area} y dA \quad (2.24)$$

Pela definição de baricentro sabe-se que $\int_A y dA = 0$ e resulta

$$J_{x'x'} = d^2m + J_{xx} \quad (2.25)$$

2.4 Raio de Giração

Denomina-se *Raio de giração*, R_G , à distância a um eixo, digamos Ox , onde pode-se concentrar toda a massa do corpo rígido sem alterar seu momento de inércia em relação a Ox .

Das definições de momento de inércia e raio de giração,

$$J_{xx} = \int_V (y^2 + z^2) \rho dV = mR_G^2 \quad (2.26)$$

Ou seja,

$$R_G = \sqrt{\frac{J_{xx}}{m}} \quad (2.27)$$

2.5 Translação de eixos e Produtos de Inércia

Conhecidos os produtos de inércia em relação a um sistema de eixos baricentral, $Gxyz$, pode-se expressar um dos produtos de inércia em relação a um sistema $Ox'y'z'$, onde Ox' é paralelo a Gx , Oy' é paralelo a Gy e Oz' é paralelo a Gz . Da definição de produto de inércia

$$J_{xy} = \sum x_i y_i m_i \quad (2.28)$$

Nas novas coordenadas,

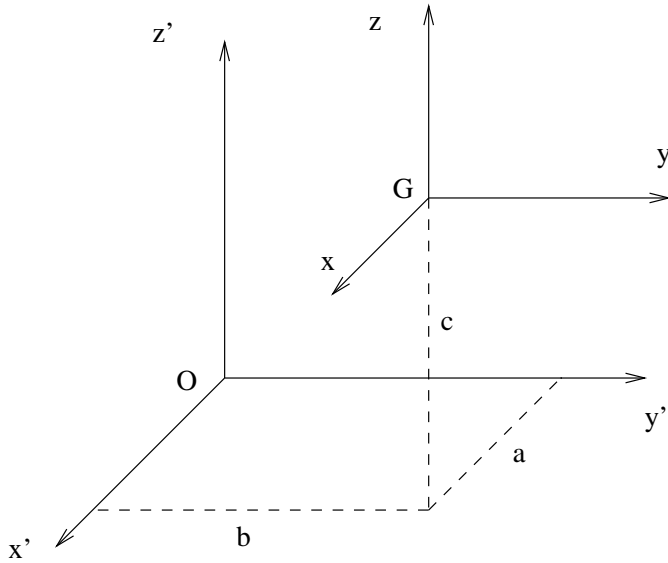


Figura 2.4: Translação de um Sistema de Referência

$$J_{x'y'} = \sum m_i(x_i + a)(y_i + b) = \sum m_i(x_i y_i + a y_i + b x_i + ab) \quad (2.29)$$

Lembrando que no sistema baricentral $\sum m_i a y_i = 0$ e $\sum m_i b x_i = 0$, resulta

$$J_{x'y'} = J_{xy} + mab \quad (2.30)$$

2.6 Momento Polar de Inércia

Denomina-se momento polar de inércia à quantidade

$$J_O = \int_V (P - O)^2 \rho dV = \int_V (x^2 + y^2 + z^2) dV \quad (2.31)$$

Trata-se do momento em relação a um pólo e não em relação a um eixo. Observa-se ainda que,

$$J_O = \sum (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) m_i \quad (2.32)$$

Duplicando a equação acima,

$$2J_O = \sum (y_i^2 + z_i^2) m_i + \sum (x_i^2 + z_i^2) m_i + \sum (x_i^2 + y_i^2) m_i \quad (2.33)$$

Ou seja, duas vezes o momento polar de inércia é igual ao traço da matriz de inércia.

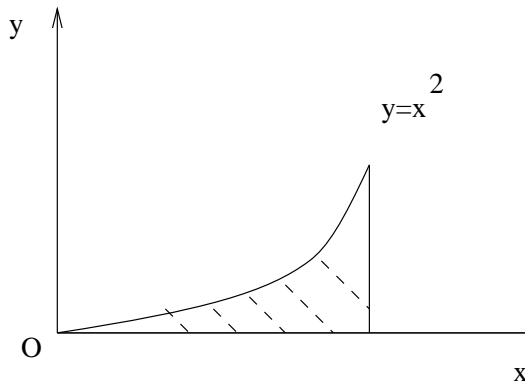


Figura 2.5: Composição de momentos de inércia

2.7 Composição de Momentos de Inércia

O momento de inércia de um corpo pode ser calculado subtraindo momentos de inércia de corpos mais simples.

Exemplo: Sendo m a massa de um sólido gerado pela rotação da superfície hachurada na fig. 2.5, em torno do eixo Oy , calcule J_{yy} . É dado o momento de inércia de um disco em torno de seu eixo, $J_{yy} = mR^2/2$.

O momento de inércia do cilindro de raio unitário e espessura unitária, J_1 , menos o momento de inércia do sólido gerado pela área sobre a curva, J_2 , é igual ao momento de inércia do sólido gerado pela área hachurada, J_3 .

$$J_1 = mR^2/2 = \pi\rho hR^4/2 \quad (2.34)$$

Da fig. 2.5 sabe-se que $R = 1$ e $h = 1$. E resulta o valor de $J_1 = \pi\rho/2$.

O momento de inércia J_2 é dado por

$$J_2 = \int_0^h \frac{\pi x^2 \rho}{2} dy = \frac{\pi\rho}{2} \int_0^1 x^2 2x dx = \rho\pi \int_0^1 x^3 dx \quad (2.35)$$

Resolvendo a integral, resulta $J_2 = \pi\rho/4$. Decorre o valor de J_3 ,

$$J_3 = J_1 - J_2 = \pi\rho/2 - \pi\rho/4 = \pi\rho/4 \quad (2.36)$$

2.8 Matriz de Rotação dos Eixos de um Sistema de Referência

Considere o sistema $Ox'y'z'$ que sofreu uma rotação em relação ao sistema $Oxyz$.

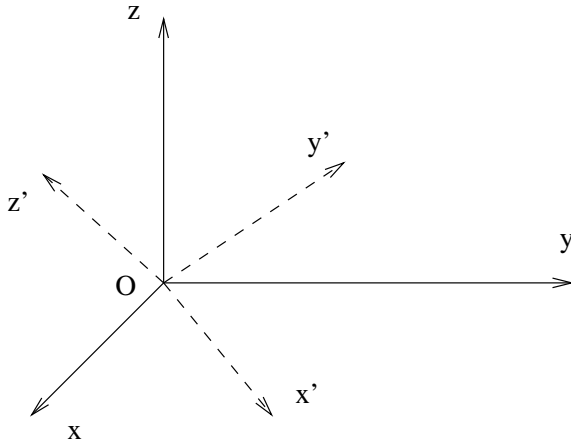


Figura 2.6: Rotação de um Sistema de referência

Os versores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ estão relacionados com os versores $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ através de

$$\vec{i} = \cos \alpha_{xx'} \vec{i}' + \cos \alpha_{xy'} \vec{j}' + \cos \alpha_{xz'} \vec{k}' \quad (2.37)$$

$$\vec{j} = \cos \alpha_{yx'} \vec{i}' + \cos \alpha_{yy'} \vec{j}' + \cos \alpha_{yz'} \vec{k}' \quad (2.38)$$

$$\vec{k} = \cos \alpha_{zx'} \vec{i}' + \cos \alpha_{zy'} \vec{j}' + \cos \alpha_{zz'} \vec{k}' \quad (2.39)$$

Um vetor qualquer pode ser expresso nas duas bases,

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (2.40)$$

$$\vec{v} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}' \quad (2.41)$$

Substituindo as eqs. 2.39 na eq. 2.40 e comparando com a eq. 2.41 observa-se que,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_{xx'} & \cos \alpha_{yx'} & \cos \alpha_{zx'} \\ \cos \alpha_{xy'} & \cos \alpha_{yy'} & \cos \alpha_{zy'} \\ \cos \alpha_{xz'} & \cos \alpha_{yz'} & \cos \alpha_{zz'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

Ou em notação mais compacta, $v' = Lv$, onde L é uma matriz que promove a rotação de eixos.

2.9 Eixos Principais de Inércia

Vamos expressar a energia cinética de rotação de um corpo rígido através de dois sistemas de coordenadas diferentes. Estes sistemas de coordenadas tem um ponto em comum e o deslocamento entre eles é descrito por uma

rotação. Existe portanto uma matriz de rotação que relaciona o vetor de rotação expresso no sistema $Oxyz$ com o vetor de rotação expresso no sistema $Ox'y'z'$,

$$\mathbf{w}' = L\mathbf{w} \quad (2.43)$$

A energia cinética de rotação de um corpo rígido expressa no sistema $Oxyz$ é

$$T = \frac{1}{2}\mathbf{w}^t I \mathbf{w} \quad (2.44)$$

onde I é a matriz de inércia relativa a $Oxyz$, e \mathbf{w} é um vetor coluna representando \vec{w} em relação a $Oxyz$.

A energia cinética de rotação de um corpo rígido expressa no sistema $Ox'y'z'$ é

$$T = \frac{1}{2}\mathbf{w}'^t I' \mathbf{w}' \quad (2.45)$$

onde I' é a matriz de inércia relativa a $Ox'y'z'$, e \mathbf{w}' é um vetor coluna representando \vec{w}' em relação a $Ox'y'z'$.

Substituindo a eq. 2.43 na eq. 2.45 e comparando com a eq. 2.44 tem-se

$$\mathbf{w}^t I \mathbf{w} = \mathbf{w}'^t I' \mathbf{w}' = \mathbf{w}^t L^t I' L \mathbf{w} \quad (2.46)$$

Portanto, a matriz de inércia I pode ser calculada a partir de I' ,

$$I = L^t I' L \quad (2.47)$$

Aos particulares eixos Ox , Oy , Oz em que I se torna diagonal denominam-se eixos *principais* de inércia. A existência destes eixos é garantida por um teorema da Álgebra Linear.

2.10 Teorema da Energia Cinética para um Corpo Rígido

A energia cinética de um sistema de pontos rigidamente ligados é a soma da energia cinética de cada ponto do sistema

$$T = \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i \quad (2.48)$$

Derivando esta expressão,

2.10. TEOREMA DA ENERGIA CINÉTICA PARA UM CORPO RÍGIDO 23

$$\frac{dT}{dt} = \sum_i m_i \vec{a}_i \cdot \vec{v}_i \quad (2.49)$$

Porém, da lei fundamental,

$$m_i \vec{a}_i = \left(\sum_k f_{i,k}^{\vec{ext}} + \sum_{j \neq i} f_{i,j}^{\vec{int}} \right) \quad (2.50)$$

A taxa de variação da energia cinética torna-se

$$\frac{dT}{dt} = \sum_i \left[\left(\sum_k f_{i,k}^{\vec{ext}} + \sum_{j \neq i} f_{i,j}^{\vec{int}} \right) \cdot \vec{v}_i \right] \quad (2.51)$$

Multiplicando a expressão anterior por dt obtém-se o diferencial da energia cinética em função do trabalho diferencial das forças internas e das forças externas

$$dT = \sum_i \left(\sum_k f_{i,k}^{\vec{ext}} \cdot dP_i \right) + \sum_i \left(\sum_{j \neq i} f_{i,j}^{\vec{int}} \cdot dP_i \right) \quad (2.52)$$

Pelo princípio da ação e reação e pela hipótese de rigidez entre os pontos do corpo rígido, o trabalho diferencial das forças internas é nulo, pois

$$f_{i,j}^{\vec{int}} \cdot dP_i = -f_{j,i}^{\vec{int}} \cdot dP_j \quad (2.53)$$

Concluindo, a variação da energia cinética de um corpo rígido é igual ao trabalho realizado pelas forças externas,

$$dT = \sum_i R_i^{\vec{ext}} \cdot dP_i \rightarrow T - T_0 = \tau_{t_0,t}^{\vec{ext}} \quad (2.54)$$

Capítulo 3

O Teorema do Momento Angular

3.1 Objetivos

- Momento Angular de um Sistema Rígido
- Teorema do Momento Angular para um Sistema de Pontos
- Exemplos no Plano

O momento angular de um sistema de pontos é por definição

$$\vec{H}_O = \sum_i (P_i - O) \wedge m_i \vec{v}_i \quad (3.1)$$

onde, se o sistema é rígido,

$$\vec{v}_i = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P_i - O) \quad (3.2)$$

Substituindo a eq. 3.2 na eq. 3.1,

$$\vec{H}_O = \sum_i [m_i (P_i - O) \wedge \vec{v}_O] + \sum_i [m_i (P_i - O) \wedge (\vec{\omega} \wedge (P_i - O))] \quad (3.3)$$

Adotando um sistema de coordenadas cartesiano com origem em O , o vetor posição torna-se

$$P_i - O = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k} \quad (3.4)$$

A segunda somatória da eq. 3.3 pode ser expressa em coordenadas cartesianas. Inicialmente, expressa-se $\vec{\omega} \wedge (P_i - O)$ em coordenadas cartesianas, através do determinante simbólico

$$\vec{\omega} \wedge (P_i - O) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ w_x & w_y & w_z \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} \quad (3.5)$$

ou seja,

$$\vec{\omega} \wedge (P_i - O) = (w_y z_i - w_z y_i) \vec{i} + (w_z x_i - w_x z_i) \vec{j} + (w_x y_i - w_y x_i) \vec{k} \quad (3.6)$$

O passo seguinte consiste em calcular $(P_i - O) \wedge (\vec{\omega} \wedge (P_i - O))$, através do determinante simbólico

$$(P_i - O) \wedge (\vec{\omega} \wedge (P_i - O)) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ (w_y z_i - w_z y_i) & (w_z x_i - w_x z_i) & (w_x y_i - w_y x_i) \end{vmatrix}$$

resulta,

$$(P_i - O) \wedge (\vec{\omega} \wedge (P_i - O)) = \begin{pmatrix} (w_x(y_i^2 + z_i^2) - w_y x_i y_i - w_z x_i z_i) \vec{i} + \\ (-w_x x_i y_i + w_y(x_i^2 + z_i^2) - w_z y_i z_i) \vec{j} + \\ (-w_x x_i z_i - w_y y_i z_i + w_z(x_i^2 + y_i^2)) \vec{k} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

O momento angular do corpo rígido em coordenadas cartesianas é

$$\vec{H}_O = \begin{pmatrix} m(G - O) \wedge \vec{v}_O + \\ \sum_i m_i (w_x(y_i^2 + z_i^2) - w_y x_i y_i - w_z x_i z_i) \vec{i} + \\ \sum_i m_i (-w_x x_i y_i + w_y(x_i^2 + z_i^2) - w_z y_i z_i) \vec{j} + \\ \sum_i m_i (-w_x x_i z_i - w_y y_i z_i + w_z(x_i^2 + y_i^2)) \vec{k} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

e levando em consideração as definições de momentos e produtos de inércia, o momento angular pode ser expresso em forma matricial

$$\vec{H}_O = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m(G - O) \wedge \vec{v}_O + \\ J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_{yy} & -J_{xz} \\ -J_{xz} & -J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Observe que nesta expressão temos uma notação mista, o primeiro termo utiliza notação vetorial e o segundo termo utiliza notação matricial.

3.2 Teorema do Momento Angular

O teorema do momento angular não requer a hipótese rigidez entre os pontos do sistema. é na verdade um teorema de sistemas de pontos materiais. Parte-se da definição do momento angular de um sistema de pontos materiais,

$$\vec{H}_O = \sum_i (P_i - O) \wedge m_i \vec{v}_i \quad (3.10)$$

Deriva-se a expressão do momento angular em relação ao tempo,

$$\frac{d\vec{H}_O}{dt} = \sum_i (\vec{v}_i - \vec{v}_O) \wedge m_i \vec{v}_i + \sum_i (P_i - O) \wedge m_i \vec{a}_i \quad (3.11)$$

Introduzindo a lei fundamental, e cancelando um dos produtos vetoriais,

$$\frac{d\vec{H}_O}{dt} = \sum_i \vec{v}_i \wedge m_i \vec{v}_O + \sum_i (P_i - O) \wedge \vec{R}_i^{ext} \quad (3.12)$$

Finalmente, da definição de centro de massa e reconhecendo que o segundo termo é o momento das forças externas ao sistema, tem-se a proposição do teorema do momento angular

$$\dot{\vec{H}}_O = m \vec{v}_G \wedge \vec{v}_O + \vec{M}_O^{ext} \quad (3.13)$$

A taxa de variação do momento angular é igual à soma do momento das forças externas e o termo $m \vec{v}_G \wedge \vec{v}_O$.

3.3 Exemplos no plano

Exemplo: Um disco parte do repouso e rola sem escorregar sobre o plano inclinado, ver fig. 3.1. Calcular sua velocidade após ter percorrido uma distância x . Dado: $J_G = mR^2/2$.

A variação da energia cinética é igual ao trabalho das forças externas ao corpo rígido $T - T_0 = \tau^{ext}$. A energia cinética em um dado instante é dada por

$$T = \frac{mv_G^2}{2} + \frac{1}{2} (0 \quad 0 \quad w_z) \begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w_z \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Efetando as operações de multiplicação,

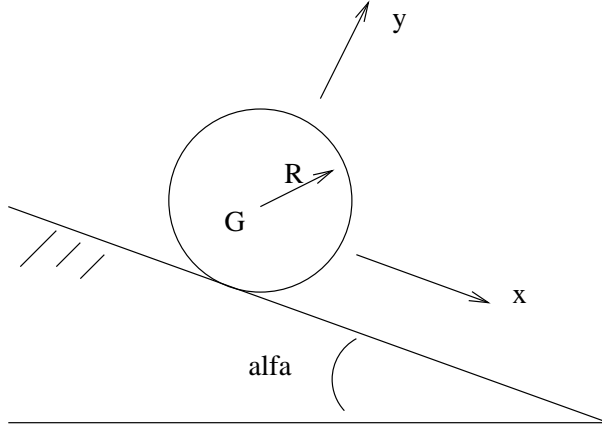


Figura 3.1: Disco sobre plano inclinado

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}J_{zz}w_z^2 \quad (3.15)$$

A velocidade do centro de massa G pode ser expressa em termos de w_z ,

$$\vec{v}_G = \vec{v}_{cir} + w_z \vec{k} \wedge (G - CIR) = -Rw_z \vec{i} \quad (3.16)$$

Introduzindo a eq. 3.16 na eq. 3.15

$$T = \frac{3}{4}mR^2w_z^2 \quad (3.17)$$

O trabalho das forças externas é o trabalho da força peso

$$\tau^{ext} = \int_0^x mg(-\cos \alpha \vec{j} + \sin \alpha \vec{i}) \cdot dx \vec{i} = \int_0^x mg \sin \alpha dx = mg \sin \alpha x \quad (3.18)$$

Finalmente, igualando a eq. 3.17 e a eq. 3.18,

$$\frac{3}{4}mR^2w_z^2 = mg \sin \alpha x \quad (3.19)$$

Portanto,

$$v_G^2 = R^2w_z^2 = \frac{3}{4}g \sin \alpha x \quad (3.20)$$

Exemplo: A barra parte do repouso da posição $\theta_0 = \pi/2$, com velocidade angular ω_0 no sentido horário, ver fig. 3.2. Obtenha o menor valor de ω_0 para que a barra não mude seu sentido de rotação. Dado: $J_G = mL^2/12$, momento de inércia da barra em relação ao centro de massa.

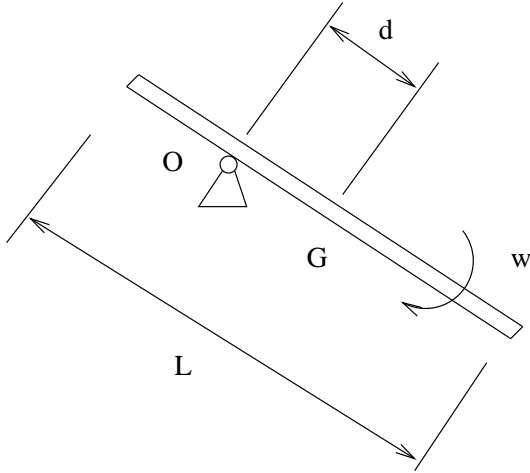


Figura 3.2: Barra articulada fora do centro de massa

A energia cinética da barra utilizando o ponto O como origem do sistema de coordenadas,

$$T_O = \frac{1}{2}mv_O^2 + mv_O \cdot \vec{\omega} \wedge (G - O) + \frac{1}{2}\omega^t J \omega \quad (3.21)$$

Os dois primeiros termos são nulos uma vez que o ponto O é fixo,

$$T_O = \frac{1}{2}J_{zzO}\omega_z^2 \quad (3.22)$$

O momento de inércia da barra em relação ao seu centro de massa é dado. Resta calcular o momento de inércia da barra em relação ao sistema de coordenadas passando por O ,

$$J_{zzO} = J_{zzG} + md^2 = \left(\frac{L^2}{12} + d^2\right)\frac{m}{2} \quad (3.23)$$

Para que o movimento não se inverta a barra deve chegar com energia cinética diferente de zero na posição vertical,

$$T = T_0 + \tau^{ext} = \frac{1}{2}m(L^2/12 + d^2) - mgd > 0 \quad (3.24)$$

Portanto,

$$\omega_0^2 > \frac{2gd}{(L^2/12 + d^2)} \quad (3.25)$$

Exemplo Uma roda gigante de raio R gira com velocidade angular $\vec{\omega}$, constante. Uma cadeira de massa m , momento de inércia J_A e centro de

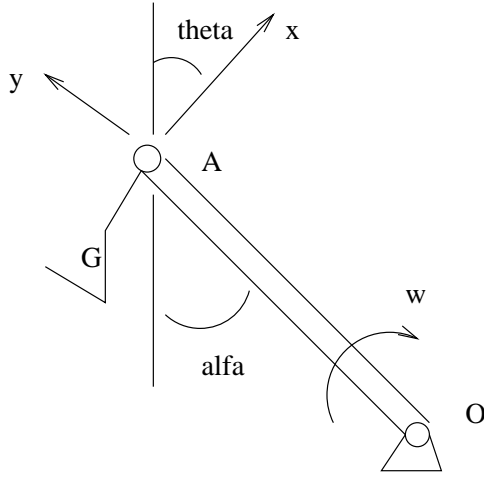


Figura 3.3: Roda Gigante

massa G está articulada em A . Usando o sistema de referência (A, x, y, z) solidário à cadeira, pede-se, para a situação mostrada na fig. 3.3:

- a) a aceleração do ponto A ;
- b) determinar $\ddot{\theta}$ em função de J_A ;
- c) determinar as reações na articulação A , em função de $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$ e demais dados.

A aceleração do ponto A é centrípeta $\vec{a}_A = -\omega^2 R(-\vec{u})$ onde $\vec{u} = \cos \alpha + \theta \vec{i} + \sin \alpha + \theta \vec{j}$ uma vez que o corpo rígido OA tem velocidade angular constante.

Para relacionar $\ddot{\theta}$ e J_A podemos utilizar o teorema do momento angular,

$$\vec{H}_A = m\vec{v}_G \wedge \vec{v}_A + \vec{M}_A^{ext} \quad (3.26)$$

O momento das forças externas em relação ao pólo A

$$\vec{M}_A^{ext} = mgh \sin \theta \vec{k} \quad (3.27)$$

onde $h = \|G - A\|$.

Resta desenvolver uma expressão para \vec{H}_A . Sabe-se,

$$\vec{H}_A = m(G - A) \wedge \vec{v}_A + J_A \dot{\theta} \vec{k} \quad (3.28)$$

Derivando a eq. 3.28 no tempo,

$$\dot{\vec{H}}_A = m\vec{v}_G \wedge \vec{v}_A + m(G - A) \wedge \vec{a}_A + J_A \ddot{\theta} \vec{k} \quad (3.29)$$

Igualando a eq. 3.27 e a eq. 3.29

$$J_A \ddot{\theta} \vec{k} = mgh \sin \theta \vec{k} - m(G - A) \wedge \vec{a}_A \quad (3.30)$$

O último termo pode ser expandido,

$$m(G - A) \wedge \vec{a}_A = m h \vec{i} \wedge \omega^2 R (\cos \alpha + \theta \vec{i} + \sin \alpha + \theta \vec{j}) \quad (3.31)$$

e simplificado,

$$m(G - A) \wedge \vec{a}_A = m \omega^2 R h \sin \theta + \alpha \vec{k} \quad (3.32)$$

A relação entre J_A e $\ddot{\theta}$ torna-se

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{J_A} (mgh \sin \theta - m \omega^2 R h \sin (\theta + \alpha)) \quad (3.33)$$

As reações na articulação A podem ser obtidas através do teorema do centro de massa. A aceleração do centro de massa é

$$\vec{a}_G = \vec{a}_A - \ddot{\theta} \vec{k} \wedge (G - A) - \dot{\theta} \vec{k} \wedge (-\dot{\theta} \vec{k} \wedge (G - A)) \quad (3.34)$$

Ou seja,

$$\vec{a}_G = -\omega^2 R (\cos (\alpha + \theta) \vec{i} + \sin (\alpha + \theta) \vec{j}) + \ddot{\theta} h \vec{j} + \dot{\theta}^2 h \vec{i} \quad (3.35)$$

Já a resultante das forças atuantes na cadeira

$$\vec{R} = mg(-\cos \alpha \vec{j} - \sin \alpha \vec{i}) + R_x \vec{i} + R_y \vec{j} \quad (3.36)$$

Na direção Ox resulta

$$R_x = m(-\omega^2 \cos (\alpha + \theta) + \dot{\theta}^2 h + g \sin \alpha) \quad (3.37)$$

e na direção Oy , resulta

$$R_y = m(-\omega^2 R \sin (\alpha + \theta) + \ddot{\theta} h + g \cos \alpha) \quad (3.38)$$

Exemplo: Um disco está apoiado sobre uma plataforma horizontal e o coeficiente de atrito entre ambos é μ , ver fig. 3.4. O sistema permanece em repouso até que o plano adquira aceleração $\vec{a} = a \vec{i}$ constante. Pede-se:

- calcule a aceleração do baricentro e a aceleração angular do disco, admitindo que ocorre escorregamento no plano de contato;
- repita o cálculo admitindo rolamento puro;
- determine o valor máximo de a que possibilita rolamento puro.

Do diagrama de corpo livre do disco e do teorema do centro de massa

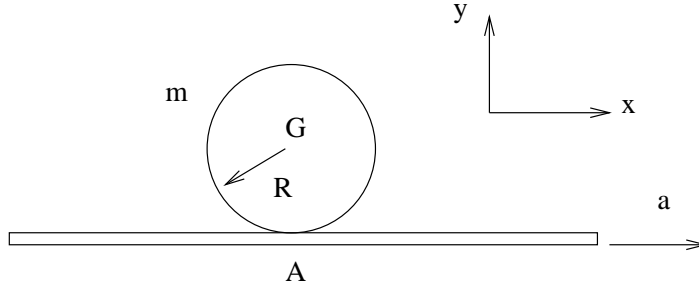


Figura 3.4: Plano Acelerado e Disco

$$m\vec{a}_G = \mu mg\vec{i} \rightarrow \vec{a}_G = \mu g\vec{i} \quad (3.39)$$

A aceleração angular é obtida através do teorema do momento angular

$$\dot{\vec{H}}_G = \vec{M}_{G \rightarrow} J_G \dot{\omega} \vec{k} = R\mu mg\vec{k} \quad (3.40)$$

Isolando a aceleração angular e substituindo $J_G = mR^2/2$

$$\dot{\omega} = \frac{2\mu g}{R} \quad (3.41)$$

Na condição de rolamento a projeção da aceleração do ponto de contato A na direção \vec{i} é igual à projeção da aceleração do plano na direção \vec{i} , isto é, $a_A = a$. A força no contato $F_a \vec{t}$ deve ser calculada através do teorema do centro de massa

$$m\vec{a}_G = F_a \vec{t} \rightarrow ma_G = F_a t \quad (3.42)$$

e do teorema do momento angular

$$J_G \dot{\omega} = RF_a t \quad (3.43)$$

No instante inicial a velocidade angular é nula e a relação entre aceleração angular e aceleração do centro de massa é obtida através da fórmula de Poisson

$$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (G - A) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G - A)] \quad (3.44)$$

O último termo é nulo e $(G - A) = R\vec{i}$, portanto

$$\frac{F_a t}{m} = a - \dot{\omega} R \quad (3.45)$$

Substituindo o valor de $F_a t$ da eq. 3.45 na eq. 3.43

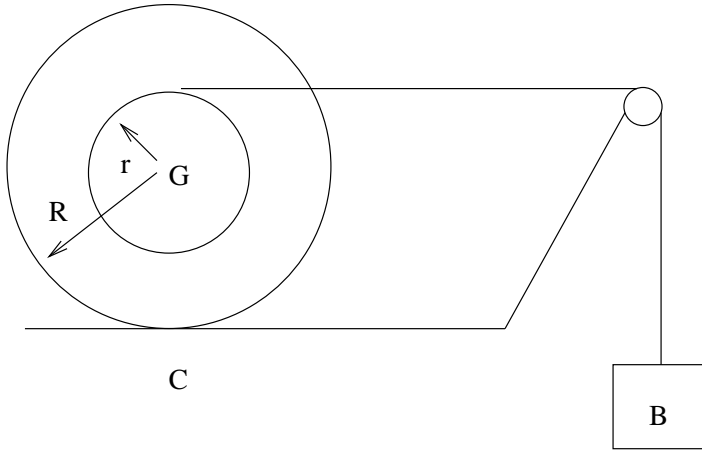


Figura 3.5: Roda Gigante

$$\dot{\omega} = \frac{2a}{3R} \quad (3.46)$$

Decorre ainda que $a_G = a/3$.

O maior valor da aceleração do plano que possibilita a hipótese de rolamento deve respeitar $F_a t \leq \mu mg$. Do teorema do movimento do centro de massa

$$ma_G = ma/3 = F_a t \leq \mu mg \rightarrow a \leq 3\mu g \quad (3.47)$$

Exemplo: Um carretel de peso mg parte do repouso. Um fio enrolado no carretel sustenta um bloco B de peso mg . O fio passa por uma polia ideal conforme a fig. 3.5. Sabendo que $r = R/2$ e que $J_C = 3mR^2/2$, pede-se:

- a) a velocidade de B em função de x ;
- b) a tração no fio;
- c) as componentes da reação em c .

A energia cinética em um instante genérico

$$T = \frac{mv_B^2}{2} + \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J_C \omega^2}{2} \quad (3.48)$$

A velocidade angular obedece a $\omega = v_D/(R+r)$ e $v_D = v_B$. Portanto, a energia cinética pode ser escrita em termos de v_B

$$T = \frac{5mv_B^2}{6} \quad (3.49)$$

Apenas a força peso no corpo B contribui para o trabalho das forças externas

$$\tau^{ext} = \int_0^x mg dx = mgx \quad (3.50)$$

Do teorema da energia cinética $T - T_0 = \tau^{ext}$

$$v_B^2 = \frac{6gx}{5} \quad (3.51)$$

Derivando a eq. 3.51 em relação ao tempo

$$2v_B a_B = \frac{6gv_B}{5} \rightarrow a_B = \frac{3g}{5} \quad (3.52)$$

Da lei fundamental

$$ma_B = mg - F_{trac} \rightarrow F_{trac} = mg + \frac{3mg}{5} = \frac{8mg}{5} \quad (3.53)$$

A reação no ponto de contato C pode ser avaliada através do teorema do movimento do centro de massa

$$ma_G \vec{i} = (F_{trac} - F_{at}) \vec{i} + (N - mg) \vec{j} \quad (3.54)$$

Resta determinar a aceleração a_G em termos da aceleração a_B

$$\vec{a}_G = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}} \wedge (G - B) + \vec{\omega} \wedge [\wedge \wedge (G - B)] \quad (3.55)$$

Substituindo $v_B = 3r\omega$ na eq. 3.51 obtém-se $\dot{\omega} = 3g/15r$. Projetando a eq. 3.55 na direção \vec{i}

$$a_G = \frac{3g}{5} + \frac{3g}{15} = \frac{4g}{5} \quad (3.56)$$

Portanto, a componente de atrito resulta

$$\frac{4mg}{5} = F_{trac} - F_{at} \rightarrow F_{at} = \frac{4mg}{5} \quad (3.57)$$

e a componente normal resulta $N = mg$.

Exemplo: Um cilindro de massa m e raio R desce um plano inclinado que forma um ângulo α com a horizontal, conforme fig. 3.6. Dados os coeficientes de atrito estático μ_s e dinâmico μ_d entre o cilindro e o plano, determine:

a) a aceleração do centro de massa G do cilindro e a aceleração angular $\dot{\omega}$ do cilindro, admitindo que não ocorre escorregamento;

b) repetir o item anterior admitindo que ocorre escorregamento no contato;

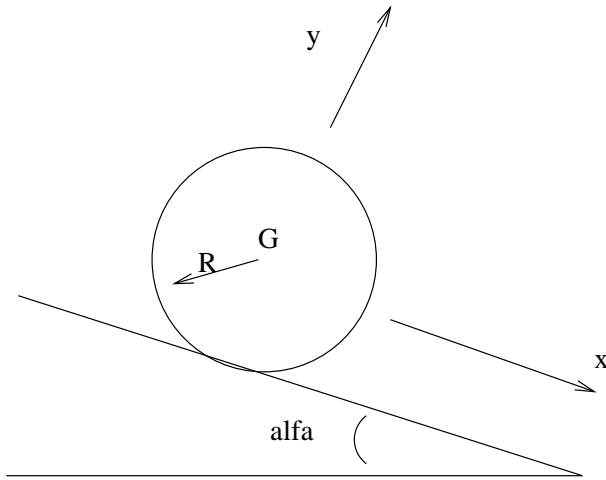


Figura 3.6: Cilindro escorregando no plano

- c) determine o ângulo α que delimita as condições dos tens a) e b);
 d) mostre que se há escorregamento, no movimento subsequente continua o escorregamento.

Do diagrama de corpo livre e do teorema do movimento do centro de massa temos

$$m\vec{a}_G = (mg \sin \alpha - F_{at})\vec{i} + (N - mg \cos \alpha)\vec{j} \quad (3.58)$$

Como a aceleração do centro de massa tem a direção \vec{i}

$$a_G = g \sin \alpha - F_{at}/m \quad (3.59)$$

O teorema do momento angular expresso em um sistema de coordenadas que passa pelo centro de massa resulta

$$J_G \omega_z \vec{k} = -R\mu mg \cos \alpha \vec{k} \quad (3.60)$$

Da hipótese de não escorregamento e sabendo que a trajetória do centro de massa é retilínea tem-se que

$$a_G = \dot{\omega} R \quad (3.61)$$

Substituindo a eq. 3.61 na eq. 3.59 e na eq. 3.60 obtém-se

$$\dot{\omega} = 2g \sin \alpha / R \quad (3.62)$$

e conseqüentemente $a_G = 2g \sin \alpha$

Por outro lado, admitindo que ocorre escorregamento no contato a força de atrito é conhecida, $F_{at} = \mu mg \cos \alpha$, da eq. 3.59 decorre

$$a_G = g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha \quad (3.63)$$

e da eq. 3.60, que representa o teorema do momento angular,

$$\dot{\omega} = -\frac{2\mu g \cos \alpha}{R} \quad (3.64)$$

O ângulo α que delimita a condição de escorregamento é tal que a velocidade do ponto de contato é nula

$$\vec{v}_C = \vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge (C - G) = \vec{0} \rightarrow v_C = R\omega \quad (3.65)$$

Integrando no tempo a aceleração do centro de massa $v_G = a_G t = g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha t$ e integrando a expressão da aceleração angular $\omega = -2\mu g \cos \alpha t / R$. Portanto,

$$(g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha)t = 2\mu g \cos \alpha t \quad (3.66)$$

Simplificando,

$$\tan \alpha = 3\mu \quad (3.67)$$

Finalmente, se $\alpha \leq 3\mu$ na eq. 3.66 observa-se que a velocidade do ponto de contato será sempre diferente de zero.

Exemplo: Um disco pesado de massa m e raio r , rola sem escorregar no interior de um tubo de raio R . Determinar as componentes da ação do tubo sobre o disco quando este se encontra na posição mais alta, admitindo que o disco não perde contato com o tubo antes de atingir a posição mais elevada. é conhecida a velocidade do centro de massa G na posição mais baixa $v_G = \sqrt{11g(R - r)/3}$.

A única força que realiza trabalho no disco é a força peso

$$\tau = -2mg(R - r) \quad (3.68)$$

A energia cinética do disco na posição mais baixa é dada por

$$T_0 = \frac{1}{2} J_C \omega^2 \quad (3.69)$$

onde $J_C = 3mr^2/2$ e $\omega^2 = 11g(R - r)/(3r^2)$

Do teorema da energia cinética $T - T_0 = \tau$, portanto

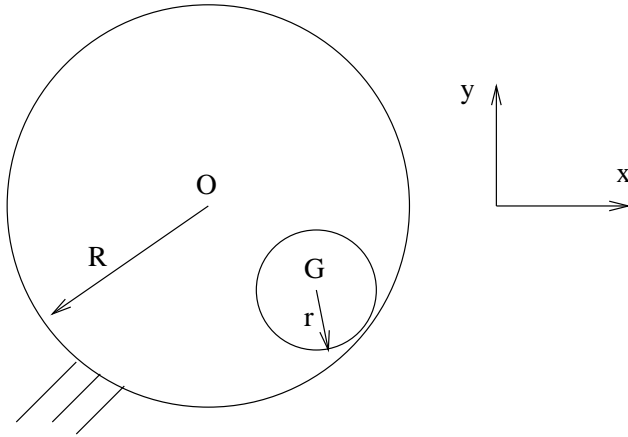


Figura 3.7: Cilindro rolando no interior de um tubo

$$T = \frac{3}{4}mg(R - r) \rightarrow \omega^2 = \frac{g(R - r)}{r^2} \quad (3.70)$$

Para determinar a aceleração angular utiliza-se o teorema do momento angular tendo o ponto de contato C como pólo

$$J_C \dot{\omega} = 0 \rightarrow \dot{\omega} = 0 \quad (3.71)$$

A aceleração do centro de massa tem componente transversal nula e componente radial

$$\vec{a}_G \cdot \vec{j} = -\Omega^2(R - r) = \frac{-\omega^2 r^2}{(R - r)^2}(R - r) \quad (3.72)$$

Finalmente, as reações no contato podem ser determinadas pelo teorema do movimento do centro de massa

$$m\vec{a}_G = -F_{at}\vec{i} - (mg + N)\vec{j} \quad (3.73)$$

Logo, $F_{at} = 0$ e

$$N + mg = \frac{\omega^2 r^2}{(R - r)^2}(R - r) = mg \rightarrow N = 0 \quad (3.74)$$

Capítulo 4

Algumas aplicações do TMA

4.1 Objetivos

- Rotação ao redor de um eixo fixo
- Movimento com um ponto fixo
- Movimento geral de um sólido
- Exemplos
- Precessão estacionária de um pião
- Efeito giroscópico

4.2 Rotação ao redor de um eixo fixo

Sejam Oz o eixo de rotação, Ox e Oy ligados ao sólido. O momento angular de um corpo rígido é dado por

$$\vec{H}_O = m(G - O) \wedge \vec{v}_O + [\vec{i} \vec{j} \vec{k}] J \omega \quad (4.1)$$

Uma vez que $\vec{v}_O = \vec{0}$,

$$\vec{H}_O = -J_{xz} \omega_z \vec{i} - J_{yz} \omega_z \vec{j} + J_{zz} \omega_z \vec{k} \quad (4.2)$$

Derivando \vec{H}_O observando que J_{xz} , J_{yz} , J_{zz} , \vec{k} são constantes e que $\vec{a}_O = \vec{0}$, tem-se

$$\dot{\vec{H}}_O = \dot{\omega}_z (-J_{xz} \vec{i} - J_{yz} \vec{j} + J_{zz} \vec{k}) + \omega_z^2 (-J_{xz} \vec{j} + J_{yz} \vec{i}) \quad (4.3)$$

Pelo teorema do momento angular

$$\dot{\vec{H}}_O = m\vec{v}_G \wedge \vec{v}_O + \vec{M}_O = \vec{M}_O \quad (4.4)$$

Igualando a eq. 4.3 e a eq. 4.4 tem-se

$$\begin{aligned} J_{zz}\dot{\omega}_z &= M_{Oz} \\ -J_{xz}\dot{\omega}_z + \omega_z^2 J_{yz} &= M_{Ox} \\ -J_{yz}\dot{\omega}_z - \omega_z^2 J_{xz} &= M_{Oy} \end{aligned}$$

Se o sólido apresentar $J_{xz} = 0$ e $J_{yz} = 0$ decorre que $M_{Ox} = 0$ e $M_{Oy} = 0$. Esta condição é procurada através do balanceamento de rotores.

4.3 Movimento com um ponto fixo

Seja O um ponto fixo e sejam ainda Ox , Oy e Oz eixos principais de inércia. Consequentemente os produtos de inércia são nulos e a expressão do momento angular resulta

$$\vec{H}_O = J_{xx}\omega_x\vec{i} + J_{yy}\omega_y\vec{j} + J_{zz}\omega_z\vec{k} \quad (4.5)$$

Derivando em relação ao tempo, observando que $\vec{v}_O = \vec{0}$, $\vec{a}_O = \vec{0}$, e que os momentos de inércia são constantes porque o sistema $Oxyz$ é solidário ao corpo

$$\dot{\vec{H}}_O = \begin{aligned} &J_{xx}\dot{\omega}_x\vec{i} + \\ &J_{yy}\dot{\omega}_y\vec{j} + \\ &J_{zz}\dot{\omega}_z\vec{k} + \\ &J_{xx}\omega_x\dot{\vec{i}} + \\ &J_{yy}\omega_y\dot{\vec{j}} + \\ &J_{zz}\omega_z\dot{\vec{k}} \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde

$$\begin{aligned} \dot{\vec{i}} &= \vec{\omega} \wedge \vec{i} = -\omega_y\vec{k} + \omega_z\vec{j} \\ \dot{\vec{j}} &= \vec{\omega} \wedge \vec{j} = +\omega_x\vec{k} - \omega_z\vec{i} \\ \dot{\vec{k}} &= \vec{\omega} \wedge \vec{k} = -\omega_x\vec{j} + \omega_y\vec{i} \end{aligned}$$

A taxa de variação do momento angular torna-se

$$\begin{aligned} \dot{\vec{H}}_O = & \begin{pmatrix} (J_{xx}\dot{\omega}_x - J_{yy}\omega_y\omega_z + J_{zz}\omega_y\omega_z)\vec{i} \\ (J_{yy}\dot{\omega}_y + J_{xx}\omega_x\omega_z - J_{zz}\omega_z\omega_x)\vec{j} \\ (J_{zz}\dot{\omega}_z - J_{xx}\omega_x\omega_y + J_{yy}\omega_y\omega_x)\vec{k} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Do teorema do momento angular

$$\dot{\vec{H}}_O = m\vec{v}_G \wedge \vec{v}_O + \vec{M}_O = \vec{M}_O \quad (4.8)$$

Igualando a eq. 4.7 com a eq. 4.8 tem-se

$$\begin{aligned} J_{xx}\dot{\omega}_x - (J_{yy} - J_{zz})\omega_y\omega_z &= M_{Ox} \\ J_{yy}\dot{\omega}_y - (J_{zz} - J_{xx})\omega_z\omega_x &= M_{Oy} \\ J_{zz}\dot{\omega}_z - (J_{xx} - J_{yy})\omega_x\omega_y &= M_{Oz} \end{aligned}$$

Se acaso $J_{xx} = J_{yy}$ a última equação é simplificada $J_{zz}\dot{\omega}_z = M_{Oz}$.

4.4 Movimento geral de um sólido

Seja $Gxyz$ um sistema de coordenadas que passa pelo centro de massa onde Gx , Gy , e Gz são eixos principais de inércia. O momento angular do corpo rígido é expresso por

$$\vec{H}_G = m(G - G) \wedge \vec{v}_G + [\vec{i} \ \vec{j} \ \vec{k}] J \omega \quad (4.9)$$

ou seja,

$$\vec{H}_G = [\vec{i} \ \vec{j} \ \vec{k}] J \omega \quad (4.10)$$

Expandindo esta expressão

$$\vec{H}_G = J_{xx}\omega_x\vec{i} + J_{yy}\omega_y\vec{j} + J_{zz}\omega_z\vec{k} \quad (4.11)$$

e derivando no tempo

$$\begin{aligned} \dot{\vec{H}}_G = & \begin{pmatrix} J_{xx}\dot{\omega}_x\vec{i} + \\ J_{yy}\dot{\omega}_y\vec{j} + \\ J_{zz}\dot{\omega}_z\vec{k} + \\ J_{xx}\dot{\omega}_x\vec{i} + \\ J_{yy}\dot{\omega}_y\vec{j} + \\ J_{zz}\dot{\omega}_z\vec{k} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde

$$\begin{aligned}\dot{\vec{i}} &= \vec{\omega} \wedge \vec{i} = -\omega_y \vec{k} + \omega_z \vec{k} \\ \dot{\vec{j}} &= \vec{\omega} \wedge \vec{j} = +\omega_x \vec{k} - \omega_z \vec{i} \\ \dot{\vec{k}} &= \vec{\omega} \wedge \vec{k} = -\omega_x \vec{j} + \omega_y \vec{i}\end{aligned}$$

A taxa de variação do momento angular torna-se

$$\begin{aligned}\dot{\vec{H}}_G &= (J_{xx}\dot{\omega}_x - (J_{yy} - J_{zz})\omega_y\omega_z)\vec{i} + \\ & (J_{yy}\dot{\omega}_y - (J_{zz} - J_{xx})\omega_z\omega_x)\vec{j} + \\ & (J_{zz}\dot{\omega}_z - (J_{xx} - J_{yy})\omega_y\omega_x)\vec{k}\end{aligned}\quad (4.13)$$

Do teorema do momento angular

$$\dot{\vec{H}}_G = m\vec{v}_G \wedge \vec{v}_G + \vec{M}_G = \vec{M}_G \quad (4.14)$$

Igualando a eq. 4.13 com a eq. 4.14 tem-se

$$\begin{aligned}J_{xx}\dot{\omega}_x - (J_{yy} - J_{zz})\omega_y\omega_z &= M_{Gx} \\ J_{yy}\dot{\omega}_y - (J_{zz} - J_{xx})\omega_z\omega_x &= M_{Gy} \\ J_{zz}\dot{\omega}_z - (J_{xx} - J_{yy})\omega_x\omega_y &= M_{Gz}\end{aligned}$$

Exemplo: A barra AB homogênea, de comprimento L e massa m é articulada em A e gira em torno do eixo vertical \vec{u} , ver fig. 4.1. Em B existe uma massa concentrada $2m$. O ângulo α é constante e a aceleração da gravidade é g . Pedese:

- a) a posição do centro de massa e o momento de inércia J_{yy} ;
- b) α em função da velocidade angular ω ;
- c) as reações em A em função de α .

A posição do baricentro é obtida através de sua definição

$$G - A = \frac{mL/2 + 2mL}{3m} \vec{i} \quad (4.15)$$

Pelo teorema de Steiner podemos associar o momento de inércia em relação ao eixo Gy , $J_{Gy} = mL^2/12$ com o momento de inércia que passa pelo eixo By

$$J_{By} = J_{Gy} + 2mL^2 + mL^2/4 = 7mL^2/3 \quad (4.16)$$

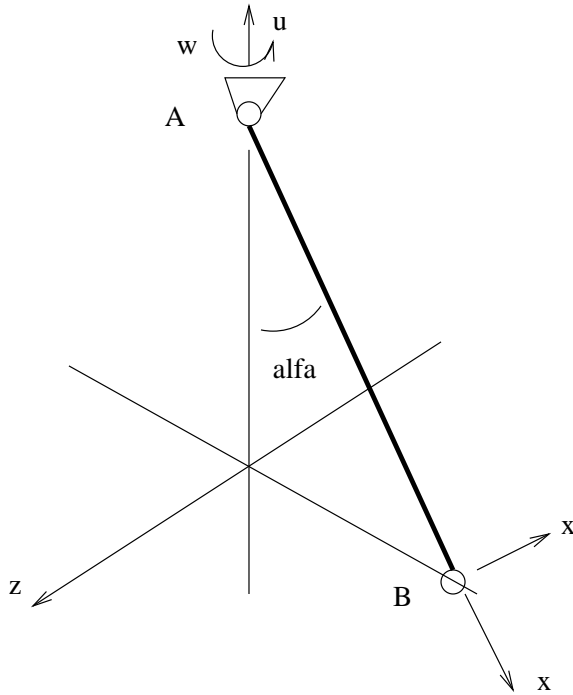


Figura 4.1: Barra articulada

Dado que A é ponto fixo, que os produtos de inércia são nulos e que $J_{xx} = 0$, o momento angular em relação ao ponto A torna-se

$$\vec{H}_A = (\vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega \cos \alpha \\ \omega \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

ou seja, $\vec{H}_A = J_{yy}\omega \sin \alpha \vec{j}$.

Derivando a expressão do momento angular

$$\dot{\vec{H}}_A = J_{yy}\dot{\omega} \sin \alpha \vec{j} = -J_{yy}\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (4.18)$$

O momento das forças atuantes no corpo rígido em relação ao ponto A é expresso por

$$\vec{M}_A = (B - A) \wedge (-2mg\vec{u}) + [(B - A)/2] \wedge (-mg\vec{u}) = \frac{-5mg \sin \alpha}{2} \vec{k} \quad (4.19)$$

Igualando a eq. 4.18 e eq. 4.19, consequência do teorema do momento angular, obtém-se o valor do quadrado da velocidade angular

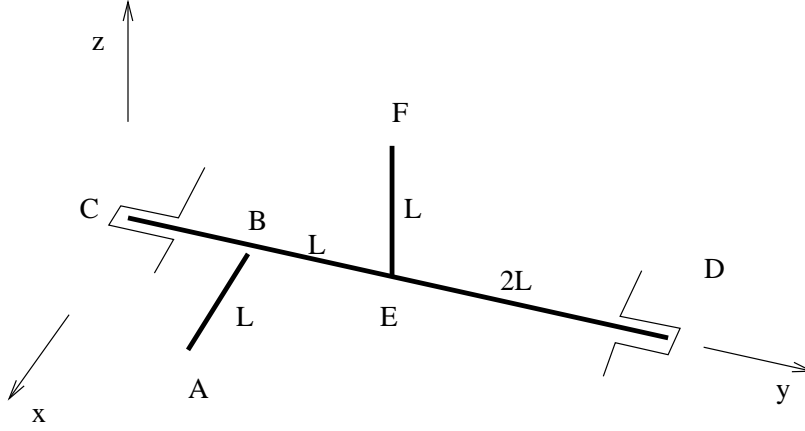


Figura 4.2: Eixo em rotação

$$\omega^2 = \frac{15g}{14L \cos \alpha} \quad (4.20)$$

Conhecida a velocidade angular pode-se explorar o teorema do movimento do centro de massa. A resultante das forças atuantes no corpo rígido é função da reação na articulação $R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k}$ e da força peso,

$$m \vec{a}_G = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k} - 3mg \vec{u} \quad (4.21)$$

onde $\vec{a}_G = 5L\omega^2/2(\cos \alpha \vec{j} - \sin \alpha \vec{i})$ e $\vec{u} = -\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}$.

Portanto, $R_x = -mg(3 \cos \alpha + 25 \tan \alpha/28)$, $R_y = mg(3 \sin \alpha + 25/28)$ e $R_z = 0$.

Exemplo Determinar as reações dinâmicas em D , sendo que a velocidade angular ω e um momento $\vec{M} = M \vec{j}$ está atuando no eixo, ver fig. 4.2.

O momento angular do corpo rígido em relação ao ponto C é dado por

$$\vec{H}_C = -J_{xy} \omega_y \vec{i} + J_{yy} \omega_y \vec{j} - J_{zy} \omega_y \vec{k} \quad (4.22)$$

onde $J_{yy} = 2(mL^2/12 + mL^2/4) = 2mL^2/3$,

$$J_{xy} = \int_0^L xL\rho dx = mL^2/2 \quad (4.23)$$

e

$$J_{zy} = \int_0^L z(2L)\rho dz = mL^2 \quad (4.24)$$

Portanto, o momento angular é simplificado

$$\vec{H}_C = mL^2\omega_y(-\vec{i}/2 + 2\vec{j}/3 - \vec{k}) \quad (4.25)$$

A taxa de variação do momento angular no tempo torna-se

$$\dot{\vec{H}}_C = mL^2\dot{\omega}_y(-\vec{i}/2 + 2\vec{j}/3 - \vec{k}) + mL^2\omega_y^2(\vec{k}/2 - \vec{i}) \quad (4.26)$$

O momento das forças em relação ao ponto C

$$\vec{M}_C = (4LZ_D - 11mgL)\vec{i} + (mgL/2 + M)\vec{j} - 4LX_D\vec{k} \quad (4.27)$$

Igualando a eq. 4.26 e a eq. 4.27, tendo em vista o teorema do momento angular resulta da direção Cy

$$\dot{\omega}_y = \frac{g}{2L} + \frac{M}{mL^2} \quad (4.28)$$

da direção Cz

$$X_D = \frac{mg}{8} + \frac{M}{4L} - \frac{mL\omega_y^2}{8} \quad (4.29)$$

Finalmente, na direção Cx

$$Z_D = \frac{43mg}{16} - \frac{M}{8L} - \frac{mL\omega_y^2}{4} \quad (4.30)$$

4.5 Precessão estacionária de um pião

O vetor de rotação de um pião é frequentemente descrito através de coordenadas angulares conhecidas por *ângulos de Euler*. Sejam dois sistemas de coordenadas $OXYZ$, fixo e $Oxyz$ solidário ao pião, conforme a fig. 4.3.

O vetor de rotação pode ser expresso por

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\vec{K} + \dot{\theta}\vec{j} + \dot{\psi}\vec{k} \quad (4.31)$$

porém $\vec{K} = \cos\theta\vec{k} - \sin\theta\vec{i}$, e decorre

$$\vec{\omega} = -\dot{\phi}\sin\theta\vec{i} + \dot{\theta}\vec{j} + (\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})\vec{k} \quad (4.32)$$

Conhecido o vetor de rotação do pião, a quantidade de movimento angular em relação ao pólo O é dada por

$$\vec{H}_O = m(G - O) \wedge v_O + [\vec{i} \ \vec{j} \ \vec{k}][J][\omega] \quad (4.33)$$

lembrando que os produtos de inércia são nulos e que a velocidade do ponto O é nula

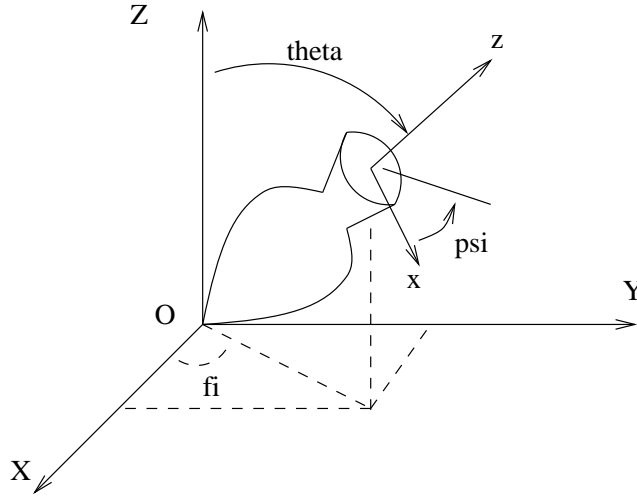


Figura 4.3: ângulos de Euler

$$\vec{H}_O = -J_{xx}\dot{\phi} \sin \theta \vec{i} + J_{yy}\dot{\theta} \vec{j} + (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) J_{zz} \vec{k} \quad (4.34)$$

Investiga-se agora a possibilidade de um movimento onde θ , $\dot{\phi}$ e $\dot{\psi}$ são constantes. Simplifica-se a expressão anterior por que $\dot{\theta} = 0$,

$$\vec{H}_O = -J_{xx}\dot{\phi} \sin \theta \vec{i} + (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) J_{zz} \vec{k} \quad (4.35)$$

Derivando em relação ao referencial $OXYZ$, lembrando que a aceleração do ponto O é nula,

$$\dot{\vec{H}}_O = -J_{xx}\dot{\phi} \sin \theta \dot{\vec{i}} + (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) J_{zz} \dot{\vec{k}} \quad (4.36)$$

onde a derivada do versor \vec{i} é

$$\dot{\vec{i}} = (-\dot{\phi} \sin \theta \vec{i} + \dot{\phi} \cos \theta \vec{k}) \wedge \vec{i} = \dot{\phi} \cos \theta \vec{j} \quad (4.37)$$

e a derivada do versor \vec{k} ,

$$\dot{\vec{k}} = (-\dot{\phi} \sin \theta \vec{i} + \dot{\phi} \cos \theta \vec{k}) \wedge \vec{k} = \dot{\phi} \sin \theta \vec{j} \quad (4.38)$$

A derivada da quantidade de movimento angular torna-se

$$\dot{\vec{H}}_O = -J_{xx}\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \vec{j} + (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) \dot{\phi} \sin \theta J_{zz} \vec{j} \quad (4.39)$$

Antes de utilizar o teorema do momento angular é necessário determinar o momento das forças atuantes no corpo rígido em relação ao pólo O . Seja $(G - O) = L\vec{k}$ para simplificar a notação.

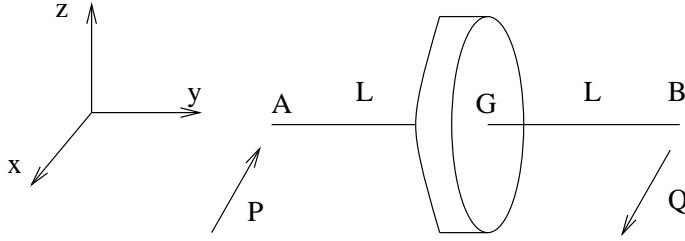


Figura 4.4: Rotor

$$\vec{M}_O = (G - O) \wedge (-mg\vec{K}) = L \sin \theta mg \vec{j} \quad (4.40)$$

Portanto, do TMA resulta uma condição para que a precessão estacionária possa ocorrer,

$$(-J_{xx}\dot{\phi} \cos \theta + (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})J_{zz})\dot{\phi} = Lmg \quad (4.41)$$

4.6 Efeito Giroscópico

Considere um rotor constituído por um disco de centro de massa G solidário ao eixo AB , com vetor de rotação $\vec{\omega}$ conforme a fig. 4.4.

O chassis de um veículo pode imprimir um binário representado pelas forças \vec{P} e \vec{Q} , opostas e de mesma intensidade. Do teorema do momento angular observa-se que

$$\dot{\vec{H}}_G = \vec{M}_G = (A - G) \wedge \vec{F}_1 + (B - G) \wedge \vec{F}_2 \quad (4.42)$$

A derivada do momento angular $\dot{\vec{H}}_G$ é ortogonal às forças \vec{P} e \vec{Q} . Do princípio da ação e reação, sabe-se que o rotor aplica ao chassis do veículo um binário oposto ao binário que o chassis aplica no rotor. O efeito giroscópico é o efeito do binário que o rotor exerce sobre o chassis.

Exemplo: Um sistema é composto por um carrinho de massa M , uma barra de massa desprezível e um disco de massa m e raio R , conforme a fig. 4.5. O vínculo em O permite que a barra gire apenas em torno do eixo Oz . O carrinho se desloca num plano horizontal com aceleração \vec{a} e o disco gira em torno de OA com velocidade angular $\omega \vec{i}$, constante. A barra move-se com velocidade angular $\dot{\alpha}$ e aceleração angular $\ddot{\alpha}$. Pede-se:

- determinar o binário transmitido ao carrinho por meio do vínculo no ponto O ;
- determinar o valor de \vec{a} para que α permaneça constante;

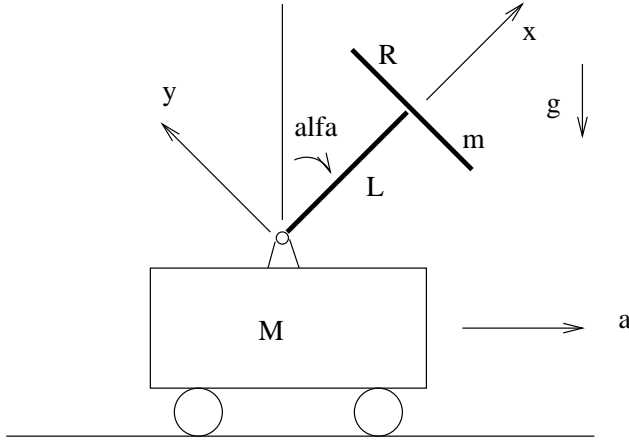


Figura 4.5: Rotor

c) determinar a força que a barra aplica sobre o carrinho nas condições do item anterior.

A partir do teorema do momento angular é possível determinar o binário que a barra transmite ao carrinho. Escolhido o ponto O como pólo, a quantidade de movimento angular é

$$\vec{H}_O = m(G - O) \wedge v_O + [\vec{i} \vec{j} \vec{k}] [J] [\omega] \quad (4.43)$$

Substituindo o vetor de rotação $\vec{\omega} = \omega \vec{i} - \dot{\alpha} \vec{k}$ na expressão acima

$$\vec{H}_O = m(G - O) \wedge v_O + J_{xx} \omega \vec{i} - J_{zz} \dot{\alpha} \vec{j} \quad (4.44)$$

A derivada no tempo do vetor quantidade de momento angular

$$\dot{\vec{H}}_O = m v_G \wedge v_O + m(G - O) \wedge a_O + J_{xx} \dot{\omega} \vec{i} - J_{zz} \ddot{\alpha} \vec{k} \quad (4.45)$$

onde $\dot{\vec{i}} = -\dot{\alpha} \vec{k} \wedge \vec{i} = -\dot{\alpha} \vec{j}$ e $a_O = a(-\cos \alpha \vec{j} + \sin \alpha \vec{i})$.

O termo $m(G_O) \wedge a_O$ pode ser descrito em componentes cartesianas por $-mLa \cos \alpha \vec{k}$. Resulta

$$\dot{\vec{H}}_O = m v_G \wedge v_O - mLa \cos \alpha \vec{k} - J_{xx} \omega \dot{\alpha} \vec{j} - J_{zz} \ddot{\alpha} \vec{k} \quad (4.46)$$

O momento das forças que atuam no corpo rígido *barra+disco*

$$\vec{M}_O = -mgL \sin \alpha \vec{k} + M_x \vec{i} + M_y \vec{j} \quad (4.47)$$

O teorema do momento angular, neste caso onde o pólo O não é fixo nem tampouco tem aceleração nula é dado por

$$\dot{\vec{H}}_O = m\vec{v}_G \wedge \vec{v}_O + \vec{M}_O \quad (4.48)$$

Introduzindo a eq. 4.46 e a eq. 4.47 na eq. 4.48 tem-se na direção \vec{i}

$$M_x = 0 \quad (4.49)$$

na direção \vec{j}

$$M_y = -J - xx\omega\dot{\alpha} \quad (4.50)$$

e na direção \vec{k}

$$J_{zz}\ddot{\alpha} + mL a \cos \alpha = mgL \sin \alpha \quad (4.51)$$

Portanto o binário transmitido ao carrinho é $M_y \vec{j} = -J_{xx}\omega\dot{\alpha}\vec{j}$

Introduzindo a condição $\ddot{\alpha} = 0$ na eq. 4.51, determina-se a aceleração do carrinho para que α seja constante

$$a = g \tan \alpha \quad (4.52)$$

Determina-se a força que a barra exerce sobre o carrinho através do teorema do movimento do centro de massa do corpo rígido *barra+disco*

$$m\vec{a}_G = mg(-\cos \alpha \vec{i} - \sin \alpha \vec{j}) + Y_O \vec{j} + X_O \vec{i} \quad (4.53)$$

onde a aceleração do centro de massa é determinada pela relação fundamental (Poisson)

$$\vec{a}_G = a(-\cos \alpha \vec{j} + \sin \alpha \vec{i}) - L\ddot{\alpha}\vec{j} - \dot{\alpha}^2 L\vec{i} \quad (4.54)$$

Então, nas condições do item (b), $a = g \tan \alpha$, decorre

$$X_O = \frac{mg}{\cos \alpha} \quad (4.55)$$

e que $Y_O = 0$.

Bibliografia

- [1] Beer, F. P. e E. R. Johnston, Mecânica Vetorial para Engenheiros, 1980.
- [2] Giacaglia, G. E. O., Mecânica Geral, 10^a edição, Editora Campus, 1982.
- [3] França, L. N. F. e A. Z. Matsumura, Mecânica Geral, 2^a edição, Editora Edgard Blücher Ltda., 2004.