Lista de Exercícios de EQD
Capítulo 2: Equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem homogêneas com coeficientes constantes

Método dos polinômios característicos

Exemplo 1: resolva a equação diferencial $3y' - 7y = 0$.

Solução: a equação característica fica

$$3r - 7 = 0 \Rightarrow 3r = 7 \Rightarrow r = \frac{7}{3}\ .$$

Portanto, a solução geral é

$$y = A\, e^{\frac{7}{3}x}\ ,$$

onde A é uma constante arbitrária.

E1) Resolva as seguintes equações diferenciais:

a) $y' - 4y = 0$, b) $2y' - 8y = 0$, c) $7y' - 4y = 0$, d) $y' = 0$, e) $y' + ky = 0$.

Problemas de valores de contorno

Exemplo 2: resolva a equação diferencial $3y' - 7y = 0$ com a condição de contorno $y(0) = 4$.

Solução: a equação diferencial já foi resolvida no exemplo 1 desta lista. A solução geral é dada por

$$y(x) = A\, e^{\frac{7}{3}x}\ .$$

De acordo com a condição de contorno, devemos ter

$$y(0) = 4 \Rightarrow A\, e^{\frac{7}{3}\cdot 0} = 4 \Rightarrow A\, e^0 = 4 \Rightarrow A.1 = 4 \Rightarrow A = 4\ .$$

Temos, então, a solução

$$y(x) = 4\, e^{\frac{7}{3}x}\ .$$

E2) Resolva os seguintes problemas de valores de contorno:

a) $y' - 4y = 0$, $y(0) = 1$; b) $y' - 4y = 0$, $y(0) = 0$; c) $y' + 3y = 0$, $y(0) = \frac{1}{2}$; d) $y' - 5y = 0$, $y(3) = 1$; e) $y' + 4y = 0$, $y(1) = 4$.

Aplicações

Exemplo 3: um criador de coelhos começa com uma população de 20 coelhos. Considerando todos os fatores externos, a taxa de procriação dos coelhos é de 0,4 coelhos por mês. Calcule a população de coelhos ao final de um ano.

Solução: o aumento de coelhos será diretamente proporcional à quantidde de coelhos existente. Sendo assim, podemos montar a equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP\ ,$$

onde $P = P(t)$ é a população de coelhos, t é o tempo e k é a taxa de procriação por mês. Temos, então, $k = 0,4$ mês^{-1} e a condição de contorno segundo a qual a população inicial era de 20 coelhos, isto é, $P(0) = 20$ coelhos.

Vamos, agora, resolver a equação diferencial, que podemos escrever como

$$\dot{P} = kP\ .$$

A equação característica fica

$$r = k \ ,$$

de modo que a solução geral fica

$$P(t) = A\,e^{kt} \ .$$

Substituindo k, temos

$$P(t) = A\,e^{0,4t} \ .$$

Aplicando a condição de contorno, temos

$$P(0) = 20 \Rightarrow A\,e^{0,4.0} = 20 \Rightarrow A\,e^{0} = 20 \Rightarrow A = 20 \ .$$

Portanto, a equação que determina a população de coelhos em função do tempo é

$$P(t) = 20\,e^{0,4t} \ .$$

Usando essa equação para $t = 1$ ano=12 meses, temos

$$P(12) = 20\,e^{0,4.12} \approx 2.430,208 \ .$$

Como só pode haver um número inteiro de coelhos, temos que após 1 ano haverá 2.430 coelhos.

E3) Resolva os problemas abaixo.

a) Em um laboratório, uma população inicial de 150 bactérias se reproduz segundo a taxa de 5 bactérias por dia. Quantas bactérias haverá após 3 dias?

b) A população do Brasil no último censo (2.000) era de aproximandamente 173.000.000 de habitantes. Supondo uma taxa de natalidade de $0,014$ habitante por ano, faça uma estimativa da população brasileira no ano 2.050.

c) Foram colocados 6 peixes em um tanque rescém construído. Ao final de 8 meses havia no tanque 65 peixes. Qual foi a taxa de procriação mensal desses peixes?

d) Calcule uma estimativa da população de peixes no tanque do problema anterior após um ano considerando que existe espaço e comida suficiente para todos.

Exemplo 4: o tório 234 é um material radioativo que decai a uma taxa de $0,02828$ dia^{-1}. Dada uma quantidade de 100 mg de tório, calcule a massa não decaída do elemento após uma semana.

Solução: a velocidade do decaimento depende da quantidade do produto. Com base nisto, podemos montar a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dm}{dt} = -km \ ,$$

onde $m = m(t)$ é a quantidade (em mg) do material não decaído, t é o tempo e k é a taxa de decaimento por dia. Temos, então, $k = 0,02828$ dias^{-1} e a condi cão de contorno segundo a qual a massa inicial era de 100 mg, isto é, $m(0) = 100\ mg$.
Vamos, agora, resolver a equação diferencial, que podemos escrever como

$$\dot{m} = -km \ .$$

A equação característica fica

$$r = -k \ ,$$

de modo que a solução geral fica

$$m(t) = A\,e^{-kt} \ .$$

Substituindo k, temos

$$m(t) = A\,e^{-0,02828t} \ .$$

Aplicando a condição de contorno, temos

$$m(0) = 100 \Rightarrow A\,e^{-0,02828.0} = 100 \Rightarrow A\,e^{0} = 100 \Rightarrow A = 100\ .$$

Portanto, a equação que determina a massa não decaída fica

$$m(t) = 100\,e^{-0,02828t}\ .$$

Usando essa equação para $t = 1$ semana=7 dias, temos

$$m(7) = 100\,e^{-0,02828.7} \approx 82,040\ .$$

Portanto, após uma semana restarão $82,040$ mg do tório radioativo.

E4) Resolva os problemas abaixo.

a) O plutônio 241 é um material radioativo que decai a uma taxa de $0,0525$ ano^{-1}. Dada uma quantidade de 50 mg de plutônio, calcule a massa não decaída do elemento após 10 anos.

b) O einstênio 253 é um material radioativo que decai a uma taxa de $0,0346$ dia^{-1}. Dada uma quantidade de 100 mg de einstênio, calcule a massa não decaída do elemento após 30 dias.

c) Calcule a meia-vida do plutônio 241 (em anos).

d) Calcule a meia-vida do einstênio 253 (em dias).

Exemplo 5: uma pessoa investe R\$ $1.000,00$ em um fundo de renda fixa com taxa de rentabilidade de $k = 18,7\%$ ao ano calculada continuamente. Após 6 anos, qual será o valor que a pessoa possui neste fundo?

Solução: temos que

$$s(t) = s_0\,e^{kt}\ ,$$

onde neste caso $s_0 = 1.000$ e $k = 0,187$ ao ano. Temos, então,

$$s(t) = 1.000\,e^{0,187t}\ .$$

Após seis anos, temos

$$s(6) = 1.000\,e^{0,187.6} = 1.000\,e^{1,122} \approx 3.070,99\ .$$

Portanto, ao final de 6 anos a pessoa terá R\$ $3.070,99$ naquele fundo de investimentos.

E5) Resolva os problemas abaixo.

a) Uma empresa investe R\$ $8.500,00$ em um fundo de ações com rentablidade de $1,57\%$ ao mês. Quanto a empresa terá nesse fundo após três meses?

b) Um estudante deposita R\$ $50,00$ na poupança a uma taxa de 13% ao ano. Se ele não depositar nem retirar dinheiro nessa poupança, quanto ele terá após 6 anos?

c) Uma pessoa faz um empréstimo de R\$ $500,00$ a juros de $11,4\%$ ao mês. Quanto essa pessoa deverá após 8 meses?

Respostas

E1) a) $y = A\,e^{4x}$, b) $y = A\,e^{4x}$, c) $y = A\,e^{\frac{4}{7}x}$, d) $y = A$, e) $y = A\,e^{-kx}$.

E2) a) $y = e^{4x}$, b) $y = 0$, c) $y = \frac{1}{2}\,e^{-3x}$, d) $y = e^{-15+5x}$, e) $y = 4\,e^{4-4x}$.

E3) a) 490.352.605 bactérias, b) 348.379.218 habitantes, c) $0,397$ peixes por mês, d) 703 peixes.

E4) a) $29,58$ mg, b) $35,42$ mg, c) 13 anos, d) 20 dias.

E5) a) R\$ $8.909,92$, b) R\$ $109,07$, c) R\$ $1.244,64$.