Lista de Exercícios de EQD
Capítulo 1: Introdução

Classificação

Exemplo 1: identifique o tipo (ordinária ou parcial) e as ordens das seguintes equações diferenciais:
a) $\frac{\partial\psi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial t}=0$, b) $\frac{d^2y}{dx^2}+my=0$, c) $y^{(n)}+kx=0$, $y^{(n)}=\frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}}$.

Solução: a) parcial, 1^a ordem; b) ordinária, 2^a ordem; c) ordinária, ordem n.

E1) Identifique o tipo (ordinária ou parcial) e as ordens das seguintes equações diferenciais:
a) $\frac{dy}{dx}=0$, b) $y'+kx=0$, c) $y''+by'+y=0$, d) $\frac{\partial u}{\partial t}+m\frac{\partial u}{\partial x}=0$, e) $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+k\frac{\partial\psi}{\partial t}=0$,
f) $\operatorname{sen} y\ y''+e^x y'=x^2$.

Exemplo 2: identifique se as seguintes equações diferenciais são ou não lineares:
a) $y'+ky=0$, b) $y'+ky=\operatorname{sen} x$, c) $y'+ky=y^2$, d) $y'+ky=\operatorname{sen} y$.

Solução: a) linear, b) linear, c) não linear, d) não linear.

E2) Identifique se as seguintes equações diferenciais são ou não lineares:
a) $y'+2y=0$, b) $y''+2y=0$, c) $y'+3y''+2x=0$, d) $y'''+2x^2y=0$, e) $\operatorname{sen} x\ y'+ky=0$,
f) $y'+2y^2=0$, g) $y'-\operatorname{sen} y=x$, h) $e^y y'+x=0$, i) $y''-e^x y+\operatorname{sen} x=0$,
j) $\frac{\partial u}{\partial t}+ku=\frac{\partial u}{\partial x}$, k) $\frac{\partial\psi}{\partial t^2}-im\frac{\partial\psi}{\partial x}+\operatorname{sen} x=0$, l) $\frac{\partial\psi}{\partial x}+\operatorname{sen}\psi=0$.

Exemplo 3: identifique se as seguintes equações diferenciais são ou não homogêneas:
a) $y'+ky=0$, b) $y'+ky+x=0$, c) $y'+ky+xy=0$.

Solução: a) homogênea, b) não homogênea, c) homogênea.

E3) Identifique se as seguintes equações diferenciais são ou não homogêneas:

a) $y'=0$, b) $y'+kx=0$, c) $y'+ky=0$, d) $y''+kxy=0$, e) $xy''-y=0$, f) $y'+\operatorname{sen} y=0$,
g) $y'+\operatorname{sen} y=x$, h) $y'+x\operatorname{sen} y=1$.

Soluções

Exemplo 4: verifique que $y=3\cos(2x)$ é solução da equação diferencial $y''+4y=0$.

Solução: para verificar isto, temos que obter a derivada segunda da função dada:

$$y'=-6\operatorname{sen}(2x)\quad,\quad y''=-12\cos(2x)\ .$$

Substituindo no lado esquerdo da equação diferencial, temos

$$y''+4y=0\Rightarrow -12\cos(2x)+4.3\cos(2x)=-12\cos(2x)+12\cos(2x)=0\ .$$

Portanto, a função dada é solução da equação diferencial $y''+4y=0$.

E4) Verifique que as funções dadas abaixo são soluções das respectivas equações diferenciais.

a) $y'=e^{-x}$, $y'+y=0$; b) $y=e^{\frac{4}{3}x}$, $3y'-4y=0$; c) $y=2\cos x$, $y''+y=0$;
d) $y=-3\operatorname{sen} x+4\cos x$, $y''+y=0$; e) $x=3e^{-2t}$, $x''-4x=0$; f) $x=-2\cos(2t)-\frac{1}{2}+t^2$, $x''+4x=4t^2$;
g) $y=2e^{2x}-3xe^{2x}$, $y''-4y'+4y=0$; h) $y=e^x\operatorname{sen}(2x)$, $y''-2y'+5y=0$.

Problemas de valores de contorno

Exemplo 5: encontre a solução particular da equação diferencial $y'' - 4y = 0$ sujeita às condições de contorno $y(0) = 1$ e $y'(0) = 4$, sendo que a solução geral é dada por $y = a\cos(2x) + b\,\text{sen}\,(2x)$.

Solução: primeiro, precisamos derivar a solução geral:

$$y' = -2a\,\text{sen}\,(2x) + 2b\cos(2x)\ .$$

Agora, aplicamos as condições de contorno:

$$y(0) = 1 \Rightarrow a\cos 0 + b\,\text{sen}\,0 = 1 \Rightarrow a.1 + b.0 = 1 \Rightarrow a = 1\ ,$$
$$y'(0) = 2 \Rightarrow -2a\,\text{sen}\,0 + 2b\cos 0 = 4 \Rightarrow -2a.0 + 2.b.1 = 4 \Rightarrow 2b = 4 \Rightarrow b = 2\ .$$

Portanto, a solução particular da equação diferencial com as condições de contorno dadas é

$$y = \cos(2x) + 2\,\text{sen}\,(2x)\ .$$

E5) Encontre as soluções particulares dos seguintes problemas de valores de contorno, tendo conhecimento das soluções gerais das equações diferenciais.

a) $y' - 3y = 0$, de solução geral $y = ae^{3x}$ e condição de contorno $y(0) = 4$;
b) $y'' + y = 0$, de solução geral $y = a\cos x + b\,\text{sen}\,x$ e condições de contorno $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = 3$;
c) $y'' + y = 0$, de solução geral $y = a\cos x + b\,\text{sen}\,x$ e condições de contorno $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$;
d) $y' - 4y = 3 + 4x$, de solução geral $y = ae^{4x} - 1 - x$ e condição de contorno $y(0) = 0$.

Respostas

E1) a) ordinária, 1^a ordem; b) ordinária, 1^a ordem; c) ordinária, 2^a ordem; d) parcial, 1^a ordem; e) parcial, 2^a ordem; f) ordinária, 2^a ordem.

E2) a) linear, b) linear, c) linear, d) linear, e) linear, f) não linear, g) não linear, h) não linear, i) linear, j) linear, k) linear, l) não linear.

E3) a) homogênea, b) não homogênea, c) homogênea, d) homogênea, e) homogênea, f) homogênea, g) não homogênea, não homogênea.

E4) Este problema não precisa de respostas.

E5) a) $y = 4e^x$, b) $y = 3\,\text{sen}\,x$, c) $y = \cos x + 4\,\text{sen}\,x$, d) $y = 2e^{4x} - 1 - x$.