Lista de Exercícios de CVE
Capítulo 6: Aplicações algébricas e geométricas de vetores

Vetores como pares ou ternas ordenadas.

Exemplo 1: escreva $\vec{v} = 5\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ em termos de ternas ordenadas.

Solução: $\vec{v} = (5, -3, 3)$.

E1) Escreva os seguintes vetores em termos de ternas ordenadas:

a) $\vec{a} = 3\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k}$, b) $\vec{b} = \hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + \hat{k}$, c) $\vec{c} = 4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$, d) $\vec{d} = -2\hat{\imath} + 3\hat{k}$.

Exemplo 2: dados os vetores $\vec{u} = (3, -2, 3)$ e $\vec{v} = (-1, 2, 0)$, calcule $\vec{u} - 3\vec{v}$.

Solução: $\vec{u} - 3\vec{v} = (3, -2, 3) - 3(-1, 2, 0) = (3, -2, 3) - (-3, 6, 0) = (3 + 3, -2 - 6, 3 - 0) = (6, -8, 3)$.

E2) Dados os vetores $\vec{a} = (3, -4, 1)$, $\vec{b} = (0, -4, 3)$ e $\vec{c} = (2, -1, 1)$, calcule:

a) $\vec{a} + \vec{b}$, b) $\vec{b} + \vec{c}$, c) $2\vec{a}$, d) $-\vec{b}$, e) $2\vec{a} - \vec{b}$, f) $4\vec{b} + 3\vec{c}$, g) $-2\vec{a} + 4\vec{c}$.

Exemplo 3: dados os vetores $\vec{u} = (3, -2, 3)$ e $\vec{v} = (-1, 2, 0)$, calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Solução: $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, -2, 3) \cdot (-1, 2, 0) = 3.(-1) + (-2).2 + 3.0 = -3 - 4 + 0 = -7$.

E3) Dados os vetores $\vec{a} = (3, -4, 1)$, $\vec{b} = (0, -4, 3)$ e $\vec{c} = (2, -1, 1)$, calcule:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, b) $\vec{b} \cdot \vec{c}$, c) $\vec{a} \cdot \vec{c}$.

Exemplo 4: dados os vetores $\vec{u} = (3, -2, 3)$ e $\vec{v} = (-1, 2, 0)$, calcule $\vec{u} \times \vec{v}$.

Solução:

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \left[-2.0\hat{\imath} + 3.(-1)\hat{\jmath} + 3.2\hat{k}\right] - \left[3.2\hat{\imath} + 3.0\hat{\jmath} + (-2).(-1)\hat{k}\right] = \\ &= (0\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 6\hat{k}) - (6\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 2\hat{k}) = (0 - 6)\hat{\imath} + (-3 - 0)\hat{\jmath} + (6 - 2)\hat{k} = -6\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 4\hat{k} = (-6, -3, 4). \end{aligned}$$

E4) Dados os vetores $\vec{a} = (3, -4, 1)$, $\vec{b} = (0, -4, 3)$ e $\vec{c} = (2, -1, 1)$, calcule:

a) $\vec{a} \times \vec{b}$, b) $\vec{b} \times \vec{c}$, c) $\vec{a} \times \vec{c}$.

Exemplo 5: dados os vetores $\vec{u} = (2, -1, 2)$, $\vec{v} = (3, -2, 3)$ e $\vec{w} = (-1, 2, 0)$, calcule $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$.

Solução:

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = [2.(-2).0 + (-1).3.(-1) + 2.3.2] - [2.3.2 + (-1).3.0 + 2.(-2).(-1)] = \\ &= (0 + 3 + 12) - (12 + 0 + 4) = 15 - 16 = -1. \end{aligned}$$

E5) Dados os vetores $\vec{a} = (3, -4, 1)$, $\vec{b} = (0, -4, 3)$ e $\vec{c} = (2, -1, 1)$, calcule:

a) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$, b) $\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c})$.

Exemplo 6: escreva o vetor definido pelos pontos $P(2, -1, 4)$ e $Q(-2, 4, 6)$.

Solução: $\overrightarrow{PQ} = (-2, 4, 6) - (2, -1, 4) = (-2 - 2, 4 + 1, 6 - 4) = (-4, 5, 2)$.

E6) Escreva os vetores definidos pelos seguintes pontos:

a) $A(1, -2)$ e $B(4, 6)$, b) $C(2, 0, -4)$ e $D = (-3, 5, 7)$.

Aplicações.

Exemplo 7: calcule o ângulo (até uma precisão de 1^o) entre os vetores $\vec{u} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 4\hat{k}$ e $\vec{v} = 6\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}$.

Solução: da definição do produto escalar, temos

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}.$$

Calculando os módulos, temos

$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21} \quad , \quad |\vec{v}| = \sqrt{6^2 + (-3)^3 + 2^2} = \sqrt{36+9+4} = \sqrt{49} = 7.$$

O produto escalar é dado por

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1.6 + (-2).(-3) + 4.2 = 6 + 6 + 8 = 20.$$

Substituindo esses resultados na fórmula para o ângulo, temos

$$\cos\theta \frac{20}{7\sqrt{21}} \Rightarrow \theta = \arccos\ \frac{20}{7\sqrt{21}}.$$

O resultado acima é exato. Se quisermos aproximar o resultado para um ângulo com precisão de até 1^o, podemos escrever

$$\theta \approx 51^o.$$

E7) Calcule os ângulos (até uma precisão de 1^o) entre os seguintes vetores:

a) $\vec{a} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 3\hat{k}$ e $\vec{b} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$; b) $\vec{c} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$ e $\vec{d} = -\hat{\imath} - \hat{\jmath} - \hat{k}$;
c) $\vec{e} = 4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 2\hat{k}$ e $\vec{f} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$; d) $\vec{g} = 2\hat{\imath}$ e $\vec{h} = 3\hat{k}$.

Obs.: use os resultados $\arccos 0 = 90^o$, $\arccos \frac{11}{14} \approx 38^o$, $\arccos(-1) = 180^o$, $\arccos \frac{6}{\sqrt{102}} \approx 53^o$.

Exemplo 8: calcule a projeção do vetor $\vec{u} = (2,3,4)$ sobre o vetor $\vec{v} = (1,-1,0)$.

Solução:

$$\begin{aligned}\vec{u}_v &= \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\right)\vec{v} = \frac{(2,3,4)\cdot(1,-1,0)}{(1,-1,0)\cdot(1,-1,0)}(1,-1,0) = \frac{2.1+3.(-1)+4.0}{1.1+(-1).(-1)+0.0}(1,-1,0) = \frac{2-3}{1+1}(1,-1,0) = \\ &= -\frac{1}{2}(1,-1,0) = \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right).\end{aligned}$$

E8) Calcule as projeções do vetor $\vec{a} = (-1,2,3)$ sobre os seguintes vetores:

a) $\vec{b} = (2,1,1)$, b) $\vec{c} = (-1,1,4)$, c) $\vec{d} = (1,0,0)$.

Exemplo 9: escreva um versor ortogonal aos vetores $\vec{u} = (2,3,4)$ e $\vec{v} = (1,-1,0)$.

Solução: para fazermos isto, primeiro temos que calcular um vetor que seja ortogonal aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Como sabemos que o produto vetorial entre eles é um vetor ortogonal a ambos, escrevemos

$$\begin{aligned}\vec{n} = \vec{u}\times\vec{v} &= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \left[3.0\hat{\imath} + 4.1\hat{\jmath} + 2.(-1)\hat{k}\right] - \left[4.(-1)\hat{\imath} + 2.0\hat{\jmath} + 3.1\hat{k}\right] = \\ &= (0\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 2\hat{k}) - (-4\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 3\hat{k}) = (0+4)\hat{\imath} + (4-0)\hat{\jmath} + (-2-3)\hat{k} = 4\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 5\hat{k} = (4,4,-5).\end{aligned}$$

Portanto, o vetor $\vec{n}$ acima é ortogonal aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Para calcularmos o versor $\hat{n}$, temos que saber o módulo de $\vec{n}$:

$$|\vec{n}| = \sqrt{4^2 + 4^2 + (-5)^2} = \sqrt{16+16+25} = \sqrt{57}\ .$$

Temos, então, que

$$\hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{(4,4,-5)}{\sqrt{57}} = \left(\frac{4}{\sqrt{57}}, \frac{4}{\sqrt{57}}, -\frac{5}{\sqrt{57}}\right).$$

Outro versor possível seria o que tem mesma direção e sentido oposto a $\hat{n}$, ou seja, o versor $-\hat{n}$.

E9) Escreva um versor ortogonal aos seguintes vetores:

a) $\vec{a} = (3, -1, 2)$ e $\vec{b} = (-4, 2, -3)$; b) $\vec{c} = (0, -4, 3)$ e $\vec{d} = (2, -1, 1)$; c) $\vec{e} = (4, 0, -4)$ e $\vec{f} = (0, -2, 2)$.

Exemplo 10: escreva o vetor de módulo 5 ortogonal aos vetores $\vec{u} = (2, 3, 4)$ e $\vec{v} = (1, -1, 0)$ e com o mesmo sentido que $\vec{u} \times \vec{v}$.

Solução: do exemplo 9, temos que um versor que tem a mesma direção e sentido que $\vec{u} \times \vec{v}$ é dado por

$$\hat{n} = \frac{(4, 4, -5)}{\sqrt{57}} = \left(\frac{4}{\sqrt{57}}, \frac{4}{\sqrt{57}}, -\frac{5}{\sqrt{57}} \right).$$

O versor que queremos pode ser calculado multiplicando-se o versor $\hat{n}$ pelo módulo desejado, isto é,

$$\vec{w} = 5\hat{n} = 5 \left(\frac{4}{\sqrt{57}}, \frac{4}{\sqrt{57}}, -\frac{5}{\sqrt{57}} \right) = \left(\frac{20}{\sqrt{57}}, \frac{20}{\sqrt{57}}, -\frac{20}{\sqrt{57}} \right).$$

E10) Escreva os vetores pedidos abaixo:

a) um vetor de módulo 2 ortogonal a $\vec{a} = (3, -1, 2)$ e $\vec{b} = (-4, 2, -3)$ e com o mesmo sentido que $\vec{a} \times \vec{b}$;
b) um vetor de módulo 3 ortogonal a $\vec{c} = (0, -4, 3)$ e $\vec{d} = (2, -1, 1)$ e com o sentido oposto a $\vec{c} \times \vec{d}$;
c) um vetor de módulo $\sqrt{3}$ ortogonal a $\vec{e} = (4, 0, -4)$ e $\vec{f} = (0, -2, 2)$ e com o mesmo sentido que $\vec{e} \times \vec{f}$.

Exemplo 11: dados os vetores $\vec{u} = (3, -1, 2)$ e $\vec{v} = (2, 1, 2)$, calcule a área do paralelogramo formado por eles.

Solução: a área do paralelogramo formado pelos dois vetores é dada por $A = |\vec{u} \times \vec{v}|$.

$$\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \left[-1.2\hat{i} + 2.2\hat{j} + 3.1\hat{k} \right] - \left[2.1\hat{i} + 3.2\hat{j} + (-1).2\hat{k} \right] = \\
&= (-2\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}) - (2\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}) = (-2-2)\hat{i} + (4-6)\hat{j} + (3+2)\hat{k} = \\
&= -4\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k} = (-4, -2, 5).
\end{aligned}$$

Temos, então,

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{16 + 4 + 25} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

Portanto, $A = 3\sqrt{5}$.

E11) Calcule as áreas dos paralelogramos formados pelos seguintes vetores:

a) $\vec{a} = (3, -1, 4)$ e $\vec{b} = (2, 1, 3)$; b) $\vec{c} = (-2, 1, 0)$ e $\vec{d} = (0, -3, 1)$.

Exemplo 12: calcule o volume do paralelepípedo formado pelos vetores $\vec{u} = (3, -1, 0)$, $\vec{v} = (2, 1, -1)$ e $\vec{w} = (2, 1, 1)$.

Solução: o volume do paralelepípedo formado pelos três vetores é dado por $V = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$.

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) &= \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \\
&= [3.1.1 + (-1).(-1).2 + 0.2.1] - [3.(-1).1 + (-1).2.1 + 0.1.2] = \\
&= (3 + 2 + 0) - (-3 - 2 + 0) = 5 - (-5) = 5 + 5 = 10.
\end{aligned}$$

Temos, então, $V = |10| \Rightarrow V = 10$.

E12) Calcule os volumes dos paralelepípedos formados pelos seguintes vetores:

a) $\vec{a} = (-1, 2, 1)$, $\vec{b} = (3, 4, 2)$ e $\vec{c} = (3, -3, 4)$; b) $\vec{d} = (0, 4, -2)$, $\vec{e} = (2, -1, 3)$ e $\vec{f} = (3, 0, -4)$.

Respostas

E1) a) $(3,-1,2)$, b) $(1,3,1)$, c) $(4,3,0)$, d) $(-2,0,3)$.

E2) a) $(3,-8,4)$, b) $(2,-5,4)$, c) $(6,-8,2)$, d) $(0,4,-3)$, e) $(6,-4,-1)$, f) $(6,-19,15)$, g) $(2,4,2)$.

E3) a) 19, b) 7, c) 11.

E4) a) $-8\hat{\imath}-9\hat{\jmath}-12\hat{k}$, b) $-\hat{\imath}+6\hat{\jmath}+8\hat{k}$, c) $-3\hat{\imath}-\hat{\jmath}+5\hat{k}$.

E5) a) -19, b) 19.

E6) a) $\overrightarrow{AB}=(3,8)$, b) $\overrightarrow{CD}=(-5,5,11)$.

E7) a) 38^o, b) 180^o, c) 53^o, d) 90^o.

E8) a) $\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, b) $\left(-\frac{7}{9},\frac{7}{9},\frac{28}{9}\right)$, c) $(-1,0,0)$.

E9) a) $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ ou $\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, b) $\left(-\frac{1}{\sqrt{101}},\frac{6}{\sqrt{101}},\frac{8}{\sqrt{101}}\right)$ ou $\left(\frac{1}{\sqrt{101}},-\frac{6}{\sqrt{101}},-\frac{8}{\sqrt{101}}\right)$,
c) $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ou $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

E10) a) $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{4}{\sqrt{6}}\right)$, b) $\left(\frac{3}{\sqrt{101}},-\frac{18}{\sqrt{101}},-\frac{24}{\sqrt{101}}\right)$, c) $(-1,-1,-1)$.

E11) a) $5\sqrt{3}$, b) $\sqrt{41}$.

E12) a) 57, b) 62.