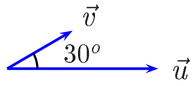
Lista de Exercícios de CVE
Capítulo 5: Produtos entre vetores

Produto escalar.

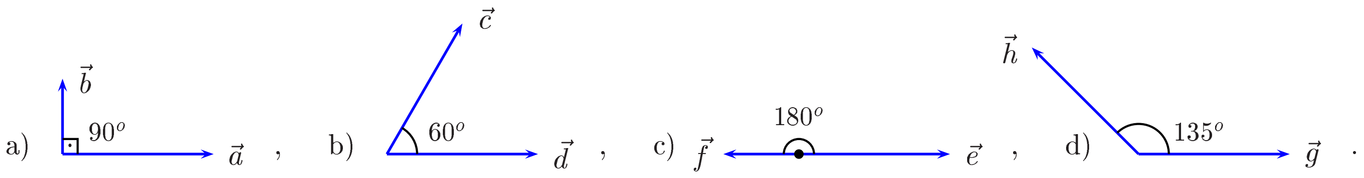
Exemplo 1: calcule o produto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$ entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ abaixo.



Solução: sabemos que $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$, onde θ é o ângulo entre os dois vetores. Temos, então,

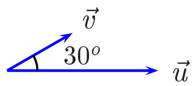
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta = 2.1.\cos 30^o = 2.\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

E1) Calcule os produtos escalares entre os vetores abaixo (dados: $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 2$, $|\vec{d}| = 2$, $|\vec{e}| = 2$, $|\vec{f}| = 1$, $|\vec{g}| = 2$, $|\vec{h}| = 2$):



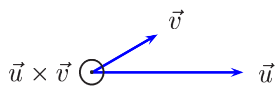
Produto vetorial.

Exemplo 2: calcule o produto vetorial $\vec{u}\times\vec{v}$ entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ abaixo.



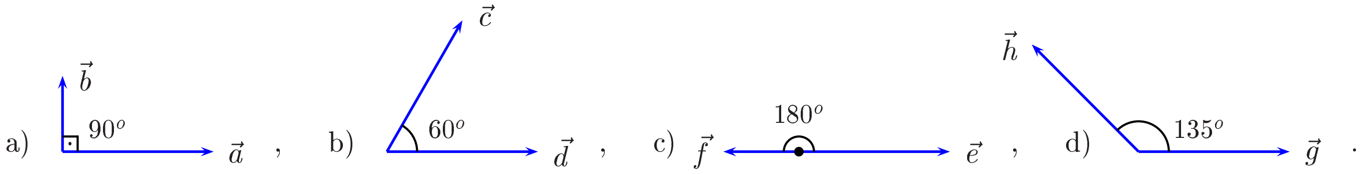
Solução:
sabemos que $\vec{u}\times\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\,\text{sen}\,\theta\ \hat{n}$, onde θ é o ângulo entre os dois vetores e $\hat{n}$ é um versor que é ortogonal a estes e cuja direção é dada pela regra da mão direita. Temos, então,

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta\ \hat{n} = 2.1.\,\text{sen}\,30^o\ \hat{n} = 2.\frac{1}{2}\ \hat{n} = 1\ \hat{n}.$$



A direção e o sentido do vetor resultante são indicados na figura ao lado.

E2) Calcule os produtos vetoriais entre os vetores abaixo (dados: $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 2$, $|\vec{d}| = 2$, $|\vec{e}| = 2$, $|\vec{f}| = 1$, $|\vec{g}| = 2$, $|\vec{h}| = 2$):



Produto escalar em termos de componentes.

Exemplo 3: dados os vetores $\vec{u} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ e $\hat{v} = -\hat{i} + 2\hat{j}$, calcule $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

Solução: $\vec{u}\cdot\vec{v} = (3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})\cdot(-\hat{i} + 2\hat{j}) = 3.(-1) + 2.2 + (-1).0 = -3 + 4 + 0 = 1.$

E3) Dados os vetores $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = -2\hat{i} + \hat{j}$ e $\vec{c} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, calcule:

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}$, b) $\vec{b}\cdot\vec{a}$, c) $\vec{a}\cdot\vec{c}$, d) $\vec{b}\cdot\vec{c}$, e) $\hat{a}\cdot\hat{a}$, f) $\hat{i}\cdot\hat{i}$, g) $\hat{i}\cdot\hat{j}$.

Produto vetorial em termos de componentes.

Exemplo 4: dados os vetores $\vec{u} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ e $\hat{v} = -\hat{i} + 2\hat{j}$, calcule $\vec{u}\times\vec{v}$.

Solução:

$$\begin{aligned}\vec{u}\times\vec{v} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \left[2.0\hat{i} + (-1).(-1)\hat{j} + 3.2\hat{k}\right] - \left[(-1).2\hat{i} + 3.0\hat{j} + 2.(-1)\hat{k}\right] = \\ &= (0\hat{i} + \hat{j} + 6\hat{k}) - (-2\hat{i} + 0\hat{j} - 2\hat{k}) = (0+2)\hat{i} + (1-0)\hat{j} + (6+2)\hat{k} = 2\hat{i} + \hat{j} + 8\hat{k}.\end{aligned}$$

E4) Dados os vetores $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = -2\hat{i} + \hat{j}$ e $\vec{c} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, calcule:

a) $\vec{a}\times\vec{b}$, b) $\vec{b}\times\vec{a}$, c) $\vec{a}\times\vec{c}$, d) $\vec{b}\times\vec{c}$, e) $\hat{a}\times\hat{a}$, f) $\hat{i}\times\hat{i}$, g) $\hat{i}\times\hat{j}$.

Produto misto.

Exemplo 5: dados os vetores $\vec{u} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, $\hat{v} = -\hat{i} + 2\hat{j}$ e $\vec{w} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$, calcule $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$.

Solução:

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = [3.2.3 + 2.0.2 + (-1).(-1).(-1)] - [3.0.(-1) + 2.(-1).3 + (-1).2.2] = \\ &= (18 + 0 - 1) - (0 - 6 - 4) = 17 - (-10) = 17 + 10 = 27.\end{aligned}$$

E5) Dados os vetores $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = -2\hat{i} + \hat{j}$ e $\vec{c} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, calcule:

a) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$, b) $\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$, c) $\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{b})$.

Respostas

E1) a) 0, b) 2, c) -2, d) $-2\sqrt{2}$.

E2) a) $2\hat{n}$ $\odot$, b) $2\sqrt{3}\hat{n}$ $\otimes$, c) $\vec{0}$, d) $2\sqrt{2}\hat{n}$ $\odot$.

E3) a) -8, b) -8, c) 0, d) -1, e) 14, f) 1, g) 0.

E4) a) $-\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$, b) $\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$, c) $\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$, d) $-\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$, e) $\vec{0}$, f) $\vec{0}$, g) $\vec{k}$.

E5) a) -2, b) -2, c) 2.