Lista de Exercícios de CDI B
Capítulo 1: Revisão de derivadas

Definição de derivadas

Exemplo 1: Calcule, usando a definição de derivadas, a derivada da função $f(x) = x^3$.

Solução: $f(x) = x^3$. Portanto, $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$.

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{3x^2\Delta x}{\Delta x} + \frac{3x(\Delta x)^2}{\Delta x} + \frac{(\Delta x)^3}{\Delta x}\right] = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2\right] = 3x^2 + 3x.0 + 0^2 = 3x^2 + 0 + 0 = 3x^2.
\end{aligned}$$

Portanto, $\frac{df}{dx} = 3x^2$.

E1) Calcule, usando a definição, as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = 1$, b) $f(x) = x$, c) $f(x) = x^2$, d) $f(x) = \frac{1}{x}$, e) $f(x) = \cos x$, f) $f(x) = \operatorname{sen} x$, g) $f(x) = e^x$, h) $f(x) = \ln x$.

Obs.: em alguns casos pode ser necessário usar os seguintes limites:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \quad , \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad , \quad \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e \ .$$

Derivadas imediatas

Exemplo 2: calcule a derivada da função $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Solução: temos que $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$. Portanto,

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \ .$$

E2) Calcule as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = 1$, b) $f(x) = x$, c) $f(x) = x^2$, d) $f(x) = x^5$, e) $f(x) = \frac{1}{x}$, f) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, g) $f(x) = \sqrt{x}$, h) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, i) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, j) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$, k) $f(x) = x^\pi$, l) $f(x) = x^{\sqrt{2}}$, m) $f(x) = \cos x$, n) $f(x) = \operatorname{sen} x$, o) $f(x) = \cosh x$, p) $f(x) = \operatorname{senh} x$, q) $f(x) = 2^x$, r) $f(x) = 4^x$, s) $f(x) = e^x$, t) $f(x) = \log_2 x$, u) $f(x) = \log_{10} x$, v) $f(x) = \ln x$.

Derivadas da soma de funções e do produto de uma função por um número real

Exemplo 3: calcule a derivada da função $f(x) = x - \frac{3}{x}$.

Solução: primeiro, vamos preparar a função de modo que ela fique mais fácil de ser derivada:

$$f(x) = x - \frac{3}{x} = x - 3\frac{1}{x} = x - 3x^{-1}.$$

Agora, derivamos a função:

$$f'(x) = 1 - 3(-1)x^{-2} = 1 + 3x^{-2} = 1 + 3\frac{1}{x^2} = 1 + \frac{3}{x^2}.$$

E3) Calcule as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = x + x^3$, b) $f(x) = 2x^2 - \sqrt{x}$, c) $f(x) = \frac{2}{x}$, d) $f(x) = -\frac{4}{x^3}$, e) $f(x) = 3 - \frac{2}{x^2}$,
f) $f(x) = 3x^\pi - 2x$, g) $f(x) = x^{\sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{x}}$, h) $f(x) = 3\cos x - e^x$, i) $f(x) = 2^x - 3\log_2 x$,
j) $f(x) = 2x^3 + 3\cos x - 3^x$.

Derivadas de produtos de funções

Exemplo 4: calcule a derivada da função $f(x) = x^2 \cos x$.

Solução: calculamos a derivada usando a regra da derivada do produto:

$$\frac{d}{dx}\left[u(x).v(x)\right] = \frac{du(x)}{dx}v(x) + u(x)\frac{dv(x)}{dx}, \quad \text{ou} \quad (uv)' = u'v + uv' \ .$$

No caso deste exemplo, temos $u(x) = x^2$ e $v(x) = \cos x$. Aplicando a fórmula, obtemos:

$$f'(x) = 2x\cos x + x^2(-\operatorname{sen} x) = 2x\cos x - x^2 \operatorname{sen} x \ .$$

E4) Calcule as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = x\operatorname{sen} x$, b) $f(x) = x^2\cos x$, c) $f(x) = (2x-1)\cosh x$, d) $f(x) = x^2 2^x$, e) $f(x) = e^x \cos x$,
f) $f(x) = \sqrt{x}\cosh x$, g) $f(x) = \frac{1}{x^2}e^x$ h) $f(x) = \frac{1}{x}\ln x$, i) $f(x) = \operatorname{sen} x \log_3 x$, j) $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$,
k) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{senh} x$, l) $f(x) = x\ln x$, m) $f(x) = x^2 e^x \cos x$, n) $f(x) = \frac{1}{x}\ln x \operatorname{sen} x$,
o) $f(x) = \sqrt{x}2^x \log_3 x$, p) $f(x) = (x^2 - 2x + 4)\cos x$, q) $f(x) = (x^3 - \cos x + 4)2^x$,
r) $f(x) = (3x^3 - 9x^2 + 4x - 2)(2x^2 - 4x + 4)$.

Derivadas de funções compostas

Exemplo 5: calcule a derivada da função $f(x) = \cos x^2$.

Solução: calculamos a derivada usando a regra da cadeia:

$$\frac{d}{dx}f\left(g(x)\right) = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}.$$

No caso deste exemplo, temos $g(x) = x^2$. Aplicando a fórmula, obtemos:

$$f'(x) = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx} = \frac{d}{dg}\cos g \cdot \frac{dg}{dx} = -\operatorname{sen} g \cdot \frac{dg}{dx} = -\operatorname{sen} x^2 \cdot \frac{d}{dx}x^2 = -\operatorname{sen} x^2 \cdot 2x = -2x\operatorname{sen} x^2.$$

E5) Calcule as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$, b) $f(x) = \cos(3x+1)$, c) $f(x) = \operatorname{sen} x^2$, d) $f(x) = \cos(x^2 - 3)$,
e) $f(x) = \operatorname{sen}(2x^3 - 3x^2 + 4x + 5)$, f) $f(x) = e^{x^2}$, g) $f(x) = 2^{x^3}$, h) $f(x) = \ln x^2$, i) $f(x) = \log_2(x^2 - 1)$,
j) $f(x) = \cos\frac{1}{x}$, k) $f(x) = \operatorname{sen}\sqrt{x}$, l) $f(x) = \operatorname{sen}\sqrt{2x^2 - 3}$, m) $f(x) = e^{1/x}$, n) $f(x) = \ln\frac{1}{x^2}$,
o) $f(x) = \ln\sqrt{x}$, p) $f(x) = \cos\operatorname{sen} e^x$, q) $f(x) = e^{\cos x}$, r) $f(x) = \ln\cos e^x$.

Derivadas da razão de funções

Exemplo 6: calcule a derivada da função $f(x) = \frac{x^2-1}{2x-4}$.

Solução: faremos a derivada usando a fórmula

$$\frac{d}{dx}\frac{u}{v} = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Aplicando a fórmula, obtemos:

$$f'(x) = \frac{2x(2x-4)-(x^2-1).2}{(2x-4)^2} = \frac{4x^2-8x-2x^2+2}{4x^2-16x+16} = \frac{2x^2-8x+2}{4x^2-16x+16} = \frac{2(x^2-4x+1)}{2(2x^2-8x+8)} = \frac{x^2-4x+1}{2x^2-8x+8}.$$

E6) Calcule as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = \frac{e^x}{x}$, b) $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$, c) $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}$, d) $f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, e) $f(x) = \frac{1}{x^2-x-2}$,
f) $f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$, g) $f(x) = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$.

Derivadas de funções inversas

Exemplo 7: calcule a derivada da função $f(x) = \operatorname{arcsen} x$, $-1 \leq x \leq 1$.

Solução: $f(x) = \operatorname{arcsen} x$ é a função inversa de $g(x) = \operatorname{sen} x$. Faremos a derivada usando a fórmula

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))}.$$

Temos que $g(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow g'(x) = \cos x$. Portanto, $g'(f(x)) = g'(\operatorname{arcsen} x) = \cos(\operatorname{arcsen} x)$.
Vamos, agora, usar a identidade trigonométrica

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x \Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}\ .$$

Aplicando este resultado na fórmula anterior, temos

$$g'(\operatorname{arcsen} x) = \cos(\operatorname{arcsen} x) = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \operatorname{arcsen} x} = \pm\sqrt{1 - (\operatorname{sen} \operatorname{arcsen} x)^2} = \pm\sqrt{1-x^2}\ .$$

Precisamos ainda considerar que a função arco-seno tem como imagem $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Dentro desse intervalo, temos que $\cos y = \cos \operatorname{arcsen} x \geq 0$. Portanto, somente o resultado positivo deve ser tomado, de modo que

$$g'(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1-x^2}\ .$$

Aplicando a fórmula para a derivada da funç ao inversa, obtemos:

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ ,\ -1 \leq x \leq 1.$$

E7) Calcule as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = \arccos x$, $-1 \leq x \leq 1$; b) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, c) $f(x) = \operatorname{arccotg} x$, d) $f(x) = \operatorname{arccosh} x$,

e) $f(x) \operatorname{arcsenh} x$, f) $f(x) = \operatorname{arcsec} x$, g) $f(x) = \operatorname{arccosec} x$.

Obs.: você pode usar as relações

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1\ \ ,\ \ \cosh^2 - \operatorname{senh}^2 x = 1\ \ ,\ \ \sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 1\ \ ,\ \ \operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{cotg}^2 x = 1\ .$$

Respostas

E1) a) $f'(x)=0$, b) $f'(x)=1$, c) $f'(x)=2x$, d) $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$, e) $f'(x)=-\operatorname{sen}x$, f) $f'(x)=\cos x$, g) $f'(x)=e^x$, h) $f'(x)=\frac{1}{x}$.

E2) a) $f'(x)=0$, b) $f'(x)=1$, c) $f'(x)=2x$, d) $f'(x)=5x^4$, e) $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$, f) $f'(x)=-2\frac{1}{x^3}$, g) $f'(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$, h) $f'(x)=\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, i) $f'(x)=-\frac{1}{2}\frac{1}{x\sqrt{x}}$, j) $f'(x)=\frac{3}{5}\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$, k) $f'(x)=\pi x^{\pi-1}$, l) $f'(x)=\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$, m) $f'(x)=-\operatorname{sen}x$, n) $f'(x)=\cos x$, o) $f'(x)=\operatorname{senh}x$, p) $f'(x)=\cosh x$, q) $f'(x)=2^x\ln 2$, r) $f'(x)=4^x\ln 4$, s) $f'(x)=\mathrm{e}^x$, t) $f'(x)=\frac{1}{x}\log_2 e$, u) $f'(x)=\frac{1}{x}\log_{10}e$, v) $f'(x)=\frac{1}{x}$.

E3) a) $f'(x)=1+3x^2$, b) $f'(x)=4x-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$, c) $f'(x)=-\frac{2}{x^2}$, d) $f'(x)=\frac{8}{x^3}$, e) $f'(x)=\frac{4}{x^2}$, f) $f'(x)=3\pi x^{\pi-1}-2$, g) $f'(x)=\sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1}+\frac{3}{2}\frac{1}{x\sqrt{x}}$, h) $f'(x)=-3\operatorname{sen}x-e^x$, i) $f'(x)=2^x\ln 2-\frac{3}{x}\log_2 e$, j) $f'(x)=6x^2-3\operatorname{sen}x-3^x\ln 3$.

E4) a) $f'(x)=\operatorname{sen}x+x\cos x$, b) $f'(x)=2x\cos x-x^2\operatorname{sen}x$, c) $f'(x)=2\cosh x+(2x-1)\operatorname{senh}x$, d) $f'(x)=2x2^x+x^2 2^x\ln 2$, e) $f'(x)=e^x\cos x-e^x\operatorname{sen}x$, f) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cosh x+\sqrt{x}\operatorname{senh}x$, g) $f'(x)=-\frac{2}{x^3}e^x+\frac{1}{x^2}e^x$, h) $f'(x)=-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x^2}$, i) $f'(x)=\cos x\log_3 x+\frac{1}{x}\operatorname{sen}x\log_3 e$, j) $f'(x)=\cos^2 x-\operatorname{sen}^x$, k) $f'(x)=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}\operatorname{senh}x+\frac{1}{\sqrt{x}}\cosh x$, l) $f'(x)=\ln x+1$, m) $f'(x)=2xe^x\cos x+x2e^x\cos x-x^2e^x\operatorname{sen}x$, n) $f'(x)=-\frac{1}{x^2}\ln x\operatorname{sen}x+\frac{1}{x^2}\operatorname{sen}x+\frac{1}{x}\ln x\cos x$, o) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}2^x\log_3 x+\sqrt{x}2^x\ln 2\log_3 x+\frac{1}{\sqrt{x}}2^x\log_3 e$, p) $f'(x)=(2x-2)\cos x-(x^2-2x+4)\operatorname{sen}x$, q) $f'(x)=(3x^2+\operatorname{sen}x)2^x+(x^3-\cos x+4)2^x\ln 2$, r) $f'(x)=(9x^2-18x+4)(2x^2-4x+4)+(3x^3-9x^2+4x-2)(4x-4)$.

E5) a) $f'(x)=2\cos(2x)$, b) $f'(x)=3\operatorname{sen}(3x-1)$, c) $f'(x)=2x\cos x^2$, d) $f'(x)=-2x\operatorname{sen}(x^2-3)$, e) $f'(x)=(6x^2-6x+4)\cos(2x^3-3x^2+4x+5)$, f) $f'(x)=2xe^{x^2}$, g) $f'(x)=3x^2 2^{x^3}\ln 2$, h) $f'(x)=\frac{2}{x}$, i) $f'(x)=\frac{2x}{x^2-1}\log_2 e$, j) $f'(x)=\frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\frac{1}{x}$, k) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$, l) $f'(x)=\frac{2x}{\sqrt{2x^2-3}}\cos\sqrt{2x^2-3}$, m) $f'(x)=-\frac{1}{x^2}e^{1/x}$, n) $f'(x)=-\frac{2}{x}$, o) $f'(x)=\frac{1}{2x}$, p) $f'(x)=-\operatorname{sen}\operatorname{sen}e^x.\cos e^x.e^x$, q) $f'(x)=-\operatorname{sen}xe^{\cos x}$, r) $f'(x)=-\frac{e^x\operatorname{sen}e^x}{\cos e^x}$.

E6) a) $f'(x)=\frac{e^x}{x}-\frac{e^x}{x^2}$, b) $f'(x)=\frac{e^x}{x^2}-\frac{2e^x}{x^3}$, c) $f'(x)=\frac{1}{x^2}\cos x-\frac{2}{x^3}\operatorname{sen}x$, d) $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$, e) $f'(x)=-\frac{2x-1}{(x^2-x-2)^2}$, f) $f'(x)=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x.\sec x$, g) $f'(x)=-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}=-\operatorname{cotg}x.\operatorname{cosec}x$.

E7) a) $f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1\le x\le 1$; b) $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$, c) $f'(x)=-\frac{1}{1+x^2}$, d) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, e) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, f) $f'(x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, g) $f'(x)=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.