3 - Vetores

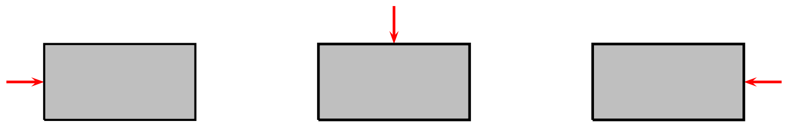
Quando medimos uma certa grandeza, podemos fazê-lo usando números, como é o caso de medidas como comprimento, massa e densidade. Cada uma dessas grandezas só tem uma característica, que é a intensidade. No entanto, existem outras grandezas, como a força e a velocidade, que além de uma intensidade têm também uma direção e um sentido. Essas grandezas necessitam de uma outra estrutura algébrica, que chamamos *vetores*.

Ex.1: uma bola pode ter $3g$ de massa e densidade $4g/cm^3$, que são medidas escalares.

Ex.2: uma pessoa pode ter altura dada por $1,76m$, que também é uma medida escalar.

Ex.3: a velocidade de um automóvel é uma grandeza vetorial, pois temos que especificar a direção para onde aponta a velocidade e o seu sentido.

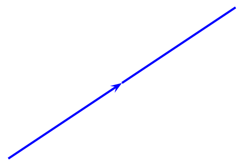
Ex.4: a força exercida sobre um bloco de concreto varia conforme variamos a direção e o sentido desta. Ela é uma grandeza vetorial.



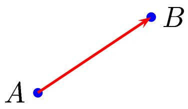
Esses objetos são utilizados na grande maioria das aplicações da engenharia, da física e da matemática, além de diversas outras áreas. Neste capítulo, faremos um estudo dos vetores, suas representações e as operações vetoriais básicas. Antes de enunciarmos a definição formal de vetores, é necessário que estudemos algumas outras definições, como as de reta orientada, segmento orientado e segmentos equipolentes.

3.1 - Segmento orientado

Antes de definirmos um segmento orientado precisamos da definição de uma *reta orientada*, ou *eixo*. Esta é uma reta em que se adota um sentido. Devemos lembrar que uma reta é, por definição, infinita. Um conceito que nos será mais útil é o de um segmento orientado de reta, dado a seguir.

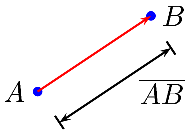


Um *segmento orientado* é um pedaço de uma reta orientada, definido por dois pontos, A e B, sendo A a *origem* e B a *extremidade* do segmento orientado. Tal segmento orientado é designado AB.



a) Módulo de um segmento orientado

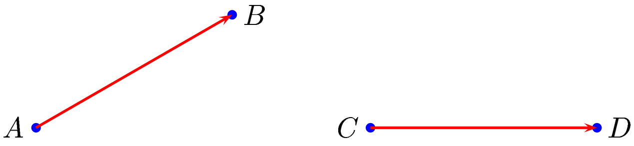
Estabelecida uma unidade de medida, o *módulo* (ou *medida*) de um segmento orientado é a medida desse segmento segundo aquela unidade de medida. O módulo de um segmento orientado AB é indicado por $\overline{AB}$.



Ex.1:
o segmento orientado AB ao lado pode ser medido como tendo módulo $\overline{AB} = 5,08cm$ ou $\overline{AB} = 2'$, dependendo se a unidade adotada é o centímetro ou a polegada.

Dois segmentos orientados AB e CD têm o mesmo módulo se $\overline{AB} = \overline{CD}$.

Ex.2:
o segmento orientado AB tem módulo $\overline{AB} = 3cm$ e o segmento orientado CD tem o mesmo módulo, $\overline{CD} = 3cm$.



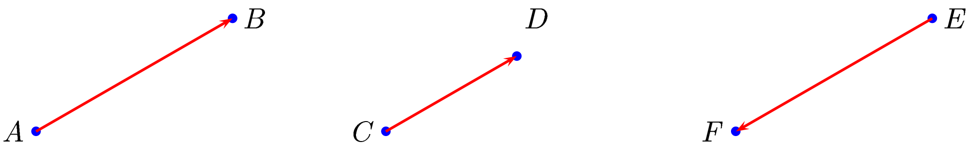
b) Segmento nulo

Um segmento orientado AA, cujo módulo é zero, é chamado *segmento nulo*.

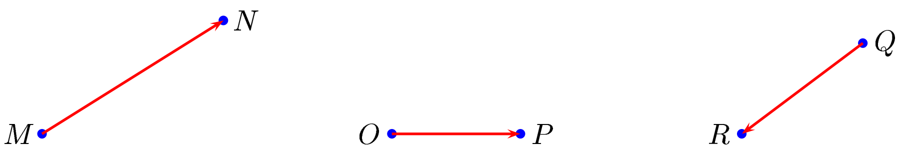
c) Direção de um segmento orientado

É a orientação no espaço do segmento orientado. Dois segmentos orientados AB e CD têm a mesma direção se as retas sobre as quais eles se baseiam são paralelas.

Ex.1: os segmentos orientados AB, CD e EF têm a mesma direção.



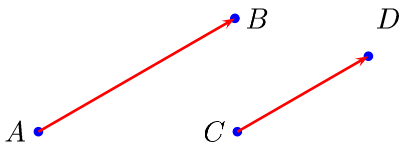
Ex.2: os segmentos orientados MN, OP e QR não têm a mesma direção.



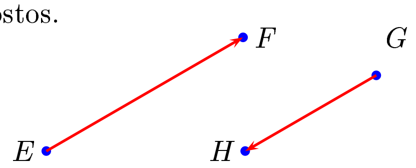
d) Sentido de um segmento orientado

Uma vez estabelecida uma direção, um segmento orientado pode ter dois sentidos.

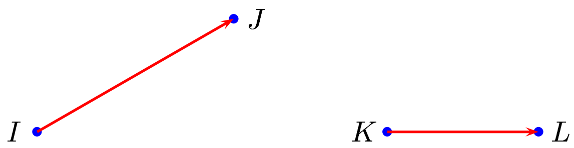
Ex.1: os segmentos AB e CD têm o mesmo sentido.



Ex.2: os segmentos EF e GH têm sentidos opostos.

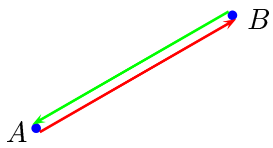


Ex.3: os segmentos IJ e KL não têm a mesma direção. Portanto, não podemos comparar os seus sentidos.



e) Segmentos opostos

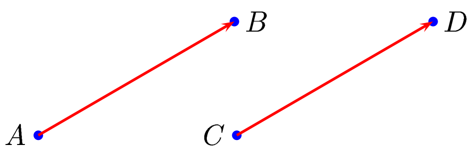
Dados dois pontos A e B, podemos definir os segmentos orientados AB e BA, que têm o mesmo módulo, a mesma direção, mas sentidos opostos. Estes são chamados *segmentos opostos*.



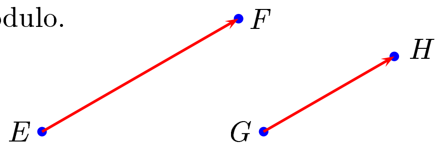
f) Segmentos equipolentes

Dois segmentos orientados são equipolentes se eles tiverem o mesmo módulo, a mesma direção e o mesmo sentido. Dados dois segmentos orientados AB e CD equipolentes, escrevemos $AB \sim CD$.

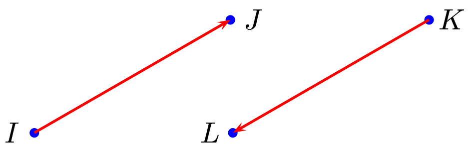
Ex.1: $AB \sim CD$.



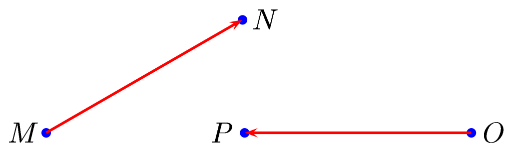
Ex.2: $EF \nsim GH$, pois estes não têm o mesmo módulo.



Ex.3: $IJ \nsim KL$, pois estes não têm o mesmo sentido.



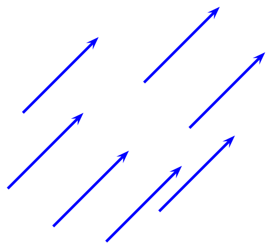
Ex.4: $MN \nsim OP$, pois estes não têm a mesma direção.



3.2 - Vetores

Dado um segmento orientado AB, o vetor $\overrightarrow{AB}$ é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a AB, isto é,

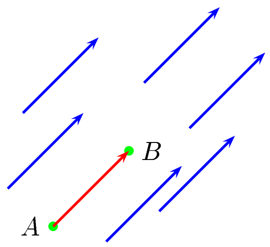
$$\overrightarrow{AB} = \{XY \mid XY \sim AB\}.$$



Portanto, um vetor é um conjunto de infinitos segmentos orientados, todos com mesmo módulo, direção e sentido. Esses segmentos orientados encontram-se espalhados por todo o espaço. Vetores não devem ser confundidos com segmentos orientados, que ocupam um lugar específico no espaço.

a) Representação de um vetor

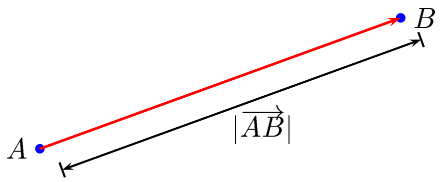
Um vetor $\overrightarrow{AB}$ pode ser representado por qualquer elemento $AB \in \overrightarrow{AB}$ (lembre-se que um vetor é um conjunto). Desta forma, dado qualquer ponto do espaço, podemos representar um vetor escolhendo um segmento orientado pertencente a ele que tenha sua origem naquele ponto. Esta liberdade de escolha de representação é o que possibilita a imensa variedade de operações e aplicações dos vetores, como veremos em breve.



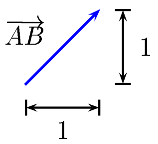
b) Módulo de um vetor

O módulo de um vetor, designado $|\overrightarrow{AB}|$, é o módulo de qualquer um de seus segmentos orientados.

Ex.1: $|\overrightarrow{AB}| = 5,08cm$ ou $|\overrightarrow{AB}| \approx 2'$, dependendo se a unidade adotada é centímetro ou polegada.



Ex.2: calcule o módulo do vetor representado abaixo:



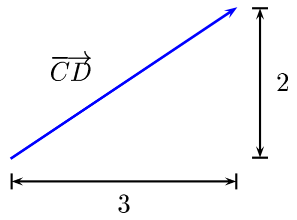
Solução: pelo teorema de Pitágoras, temos

$$h^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow h^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow h^2 = 1 + 1 \Rightarrow h^2 = 2 \Rightarrow h = \sqrt{2}.$$

Portanto, temos $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2}$.

Obs.: aqui não foi especificada uma unidade de medida. Daqui em diante, não especificaremos mais unidades, de forma que os módulos serão calculados em termos de alguma unidade de medida arbitrária.

Ex.3: calcule o módulo do vetor representado abaixo:



Solução: pelo teorema de Pitágoras, temos

$$h^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow h^2 = 3^2 + 2^2 \Rightarrow h^2 = 9 + 4 \Rightarrow h^2 = 13 \Rightarrow h = \sqrt{13}.$$

Portanto, temos $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{13}$.

c) Vetor nulo

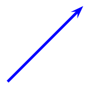
O vetor cujo módulo é zero é chamado *vetor nulo* e designado $\vec{0}$. Observe que existe um único vetor nulo, que é o conjunto de todos os segmentos orientados nulos.

$\vec{0}$ •

d) Direção de um vetor

A direção de um vetor é a direção de qualquer um de seus segmentos orientados.

Ex.1: indique a direção do vetor representado abaixo.



Solução: a direção é sudoeste-nordeste.

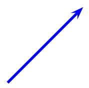
Ex.2: indique a direção do vetor representado abaixo.

Solução: a direção é oeste-leste.

e) Sentido de um vetor

O sentido de um vetor é o sentido de qualquer um de seus segmentos orientados.

Ex.1: indique o sentido do vetor representado abaixo.



Solução: o sentido é nordeste.

Ex.2: indique o sentido do vetor representado abaixo.

Solução: o sentido é leste.

f) Vetores iguais

Dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são iguais se $AB \sim CD$, onde $AB \in \overrightarrow{AB}$ e $CD \in \overrightarrow{CD}$.

g) Vetores opostos

Dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são opostos se, dados quaiquer $AB \in \overrightarrow{AB}$ e $CD \in \overrightarrow{CD}$, tivermos o segmento orientado AB oposto ao segmento orientado CD.

h) Notação

Podemos representar vetores usando símbolos $\vec{v}$, $\vec{u}$, etc..

Exs.:

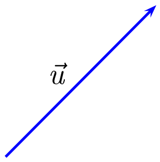
i) Versores

Um vetor $\vec{v}$ é *unitário* se $|\vec{v}| = 1$. Um vetor unitário também é chamado *versor* e é escrito $\hat{v}$. Apesar da notação distinta, versores não deixam de ser vetores.

Exs.: são versores os vetores representados abaixo (escolhendo o *cm* como unidade).

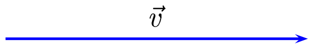
Obs.: note que um vetor pode ser versor em um sistema de unidades e não sê-lo em outro sistema de unidades.

Ex.1: represente o versor $\hat{u}$ correspondente ao vetor $\hat{u}$ dado abaixo.



Solução: a solução será um vetor de mesma direção e mesmo sentido que o vetor $\vec{u}$, mas de módulo igual a 1:

Ex.2: represente o versor $\hat{v}$ correspondente ao vetor $\vec{v}$ dado abaixo.



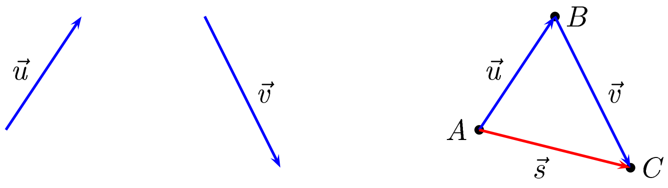
Solução:

3.3 - Operações básicas com vetores

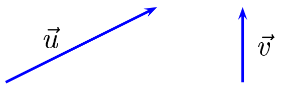
O fato de vetores não estarem restritos a uma determinada posição do espaço torna possível estabelecer operações entre eles. Existem quatro operações básicas com vetores: a soma de vetores e o produto de um vetor por um escalar. Nesta seção, faremos um estudo dessas operações. Restam ainda os produtos entre vetores: o produto escalar e o produto vetorial, que serão vistos no capítulo 5.

a) Soma de vetores

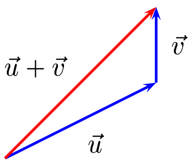
Dado um vetor $\vec{u}$, representado por um segmento orientado AB e um vetor $\vec{v}$, que podemos representar por um segmento orientado BC, a soma $\vec{s}$ dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, indicada por $\vec{s} = \vec{u}+\vec{v}$, é dada pelo vetor formado por todos os segmentos orientados equipolentes ao segmento orientado AC.



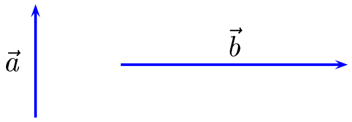
Ex.1: calcule a soma $\vec{u}+\vec{v}$, onde $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dados abaixo.



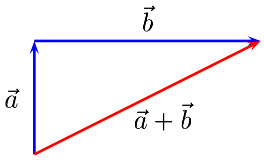
Solução:



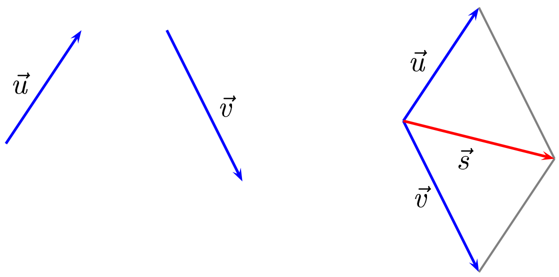
Ex.2: calcule a soma $\vec{a}+\vec{b}$, onde $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são dados abaixo.



Solução:

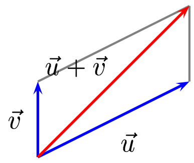


Também podemos somar vetores usando a chamada *regra do paralelogramo*, que consiste em desenhar representações dos dois vetores com suas origens no mesmo ponto e, a partir daí, desenhar um paralelogramo tomando como lados os dois vetores. A soma dos dois vetores será representada, então, pela diagonal desse paralelogramo.



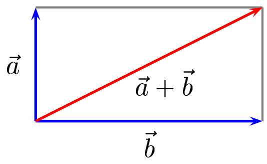
Ex.3: calcule a soma $\vec{u}+\vec{v}$ dos vetores do exemplo 1 usando a regra do paralelogramo.

Solução:



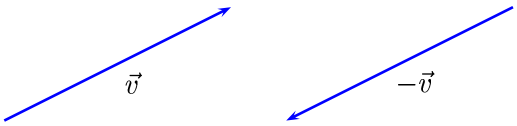
Ex.4: calcule a soma $\vec{a}+\vec{b}$ dos vetores do exemplo 2 usando a regra do paralelogramo.

Solução:



Notação para vetor oposto.

Podemos chamar o vetor oposto a um vetor $\vec{v}$ de $-\vec{v}$, onde $-\vec{v}$ tem mesmo módulo e mesmo sentido que $\vec{v}$, mas direção oposta a este.

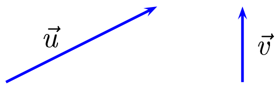


Subtração de vetores.

A subtração de um vetor por um outro, $\vec{u} - \vec{v}$, pode ser entendida como a soma de um vetor pelo vetor oposto ao outro, ou seja,

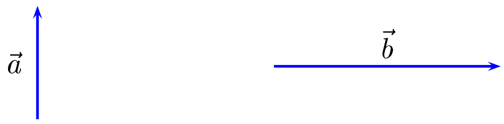
$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) \ .$$

Ex.1: calcule graficamente a subtração $\vec{u} - \vec{v}$ dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dados abaixo.



Solução: a subtração é feita tomando o vetor $-\vec{v}$ e somando este ao vetor $\vec{u}$, como mostrado abaixo.

Ex.2: calcule graficamente a subtração $\vec{a} - \vec{b}$ dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ dados abaixo.



Solução:

b) Produto de um vetor por um escalar

Dado um vetor $\vec{v}$ e um número (escalar) $k \in I\!R$, temos que o produto de um vetor $\vec{v}$ por um escalar k é dado por $\vec{p} = k.\vec{v}$, onde $\vec{p}$ é um vetor tal que:

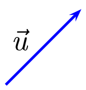
a) seu módulo é $|\vec{p}| = |k\vec{v}| = |k||\vec{v}|$,

b) a direção é a mesma do vetor $\vec{v}$ e

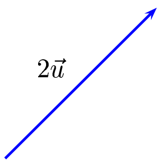
c) o sentido é o mesmo que o de $\vec{v}$ se $k > 0$ e oposto ao de $\vec{v}$ se $k < 0$.

A seguir, temos alguns exemplos dessa operação.

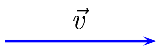
Ex.1: dado o vetor $\vec{u}$ abaixo, calcule graficamente $2\vec{u}$.



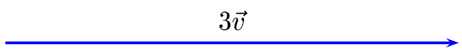
Solução: temos o vetor



Ex.2: dado o vetor $\vec{v}$ abaixo, calcule graficamente $3\vec{v}$.

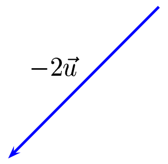


Solução: temos o vetor abaixo:



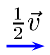
Ex.3: dado o vetor $\vec{u}$ do exemplo 1, calcule graficamente $-2\vec{u}$.

Solução:



Ex.4: dado o vetor $\vec{v}$ do exemplo 2, calcule graficamente $\frac{1}{2}\vec{v}$.

Solução:

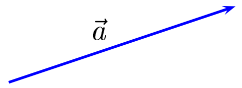


Divisão de um vetor por um escalar.

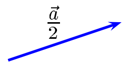
A divisão de um vetor por um escalar, $\frac{\vec{v}}{a}$, $a \neq 0$, pode ser interpretada como a multiplicação do vetor $\vec{v}$ pelo inverso do escalar a:

$$\frac{\vec{v}}{a} = \frac{1}{a} \cdot \vec{v} \ .$$

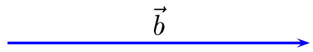
Ex.1: calcule graficamente $\frac{\vec{a}}{2}$, onde $\vec{a}$ é o vetor dado abaixo.



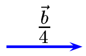
Solução:



Ex.2: calcule graficamente $\frac{\vec{b}}{4}$, onde $\vec{b}$ é o vetor dado abaixo.



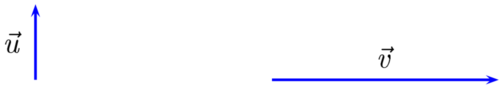
Solução:



Operações mistas.

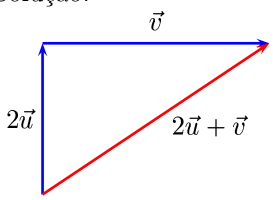
Podemos utilizar as duas operações aprendidas até agora para produzir outros vetores a partir de um dois ou mais vetores dados, como ilustrado nos exemplos a seguir.

Ex.1: dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ abaixo, calcule:
a) $2\vec{u} + \vec{v}$, b) $3\vec{u} - \vec{v}$.



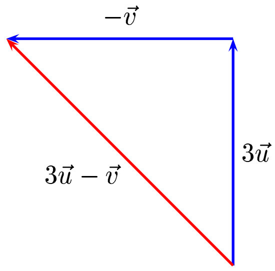
Solução:

a)

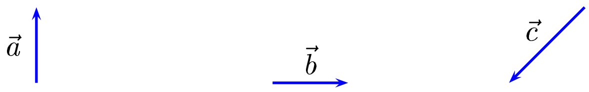


,

b)

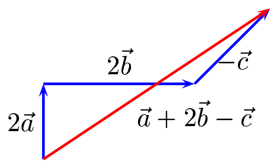


Ex.2: dados os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ abaixo, calcule:
a) $\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$, b) $-2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}$.



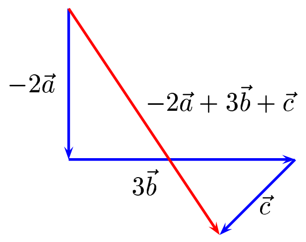
Solução:

a)



,

b)



3.4 - Aplicações

Vetores são muito usados em diversas alicações, principalmente em física e engenharia. Forças em uma rampa. Pêndulo. Campo magnético. Rotações. Trabalho. Exemplos desses assuntos serão dados em uma versão futura deste capítulo.

Com isto, terminamos este capítulo. No próxmo capítulo, faremos um estudo dos vetores no plano e no espaço em termos de componentes.