2 - Trigonometria na circunferência

Como foi dito no final do capítulo anterior, se quisermos estudar ângulos mais gerais, é necessário passarmos do estudo dos triângulos para o das circunferências. Isto nos levará a uma noção mais geral de ângulo que inclui ângulos negativos e ângulos maiores que 90^o.

2.1 - Arcos e ângulos

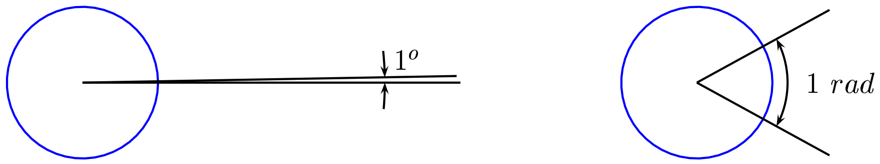
Tomemos uma circunferência de raio r:

Um *arco* é uma secção da circunferência, como visto na figura acima. Cada arco determina um ângulo central na circunferência, que é um ângulo determinado por duas semiretas que têm suas origens no centro da circunferências e suas extremidades nos dois extremos do arco. Esses ângulos assim determinados podem ir de 0^o até 360^o, generalizando o conceito de ângulos em um triângulo retângulo. Existem duas unidades de medida mais utilizadas na medida de ângulos: o *grau* (indicado por ^{o}) e o *radiano* (indicado por rad), que são definidas abaixo.

D1 - Um ângulo de 1^o é o ângulo que está relacionado ao arco que divide a circunferência em 360 partes iguais.

D2 - Um ângulo de 1 radiano é o ângulo que está relacionado ao arco cujo comprimento é igual ao raio r da circunferência.

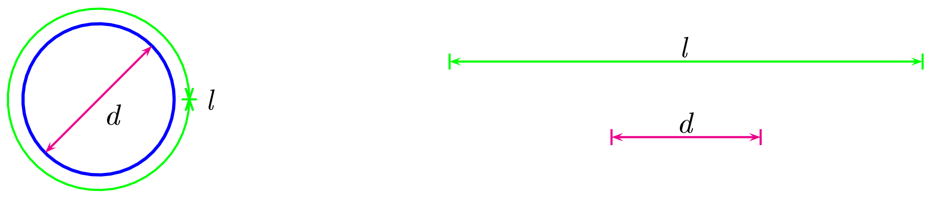
Os ângulos unitários em graus e em radianos são mostrados nas figuras a seguir.



Obs.: note que o ângulo é definido em termos da razão entre duas unidades de comprimento: o comprimento do arco e o raio da circunferência. Portanto, um ângulo tem a dimensão $\frac{comprimento}{comprimento}$*, ou seja, é adimensional.*

De acordo com a definição D1, o arco relativo a uma circunferência completa produz um ângulo central de 360^o. Para medir isto em radianos, temos que partir do fato, já conhecido dos gregos antigos, de que se medirmos o arco total de uma circunferência e dividirmos o resultado pelo seu diâmetro, conseguimos sempre o mesmo resultado: o número chamado π. Este não pode ser expresso por um número finito de algarismos decimais (é um número *irracional*). Os primeiros algarismos de π são dados por

$$\pi = 3,141592653589\ldots \ .$$



Em uma circunferência de raio r, comprimento total de arco l e diâmetro $d = 2r$, temos

$$\pi = \frac{l}{d} \Rightarrow \pi.d = l \Rightarrow l = \pi.d \Rightarrow l = \pi.2r \Rightarrow l = 2\pi r.$$

O comprimento do arco que envolve uma circunferência de raio r é, então, dado por $2\pi r$. O ângulo em radianos do grau correspondente a esse arco é dado por $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$. Portanto, o arco que envolve a circunferência corresponde a um ângulo central de 2π radianos.

Comparando as medidas em graus e em radianos, podemos relacionar ângulos em graus com ângulos medidos em radianos. Um ângulo de 180^o, correspondente a um arco que cobre metade do comprimento total de arco da circunferência, equivale a $\pi\ rad$. Podemos utilizar esta relação para descobrir o equivalente em radianos de uma medida em graus ou a medida em graus de um ângulo em radianos através da regra de três

$$\begin{array}{lcl} 180^o & \text{———} & \pi\ rad \\ \alpha & \text{———} & x \end{array} \quad .$$

Ex.1: escreva o ângulo 30^0 em radianos.

Solução: usamos a seguinte regra de três:

$$\begin{array}{lcl} 180^o & \text{———} & \pi\ rad \\ 30^o & \text{———} & x \end{array} \qquad \Rightarrow 180^o x = 30^o \pi\ rad \Rightarrow x = \frac{30^o}{180^o}\pi\ rad \Rightarrow x = \frac{1}{6}\pi\ rad \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}\ rad.$$

Ex.2: escreva o ângulo 45^0 em radianos.

Solução: usamos a seguinte regra de três:

$$\begin{array}{lcl} 180^o & \text{———} & \pi\ rad \\ 45^o & \text{———} & x \end{array} \qquad \Rightarrow 180^o x = 45^o \pi\ rad \Rightarrow x = \frac{45^o}{180^o}\pi\ rad \Rightarrow x = \frac{1}{4}\pi\ rad \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}\ rad.$$

Ex.3: escreva o ângulo 60^0 em radianos.

Solução: usamos a seguinte regra de três:

$$\begin{array}{lcl} 180^o & \text{———} & \pi\ rad \\ 60^o & \text{———} & x \end{array} \qquad \Rightarrow 180^o x = 60^o \pi\ rad \Rightarrow x = \frac{60^o}{180^o}\pi\ rad \Rightarrow x = \frac{1}{3}\pi\ rad \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}\ rad.$$

Ex.4: escreva o ângulo $\frac{\pi}{2}$ rad em graus.

Solução: usamos a seguinte regra de três:

$$\begin{array}{lcl} 180^o & \text{———} & \pi\ rad \\ \alpha & \text{———} & \frac{\pi}{2}\ rad \end{array} \qquad \Rightarrow 180^o \cdot \frac{\pi}{2}\ rad = \alpha\pi\ rad \Rightarrow 180^o \cdot \frac{1}{2} = \alpha \Rightarrow 90^o = \alpha \Rightarrow \alpha = 90^o.$$

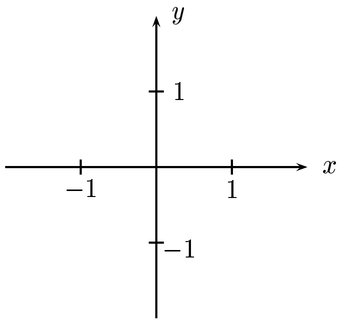
Ex.5: escreva o ângulo $\frac{3\pi}{2}$ rad em graus.

Solução: usamos a seguinte regra de três:

$$\begin{array}{lcl} 180^o & \text{———} & \pi\ rad \\ \alpha & \text{———} & \frac{3\pi}{2}\ rad \end{array} \qquad \Rightarrow 180^o \cdot \frac{3\pi}{2}\ rad = \alpha\pi\ rad \Rightarrow 180^o \cdot \frac{3}{2} = \alpha \Rightarrow 270^o = \alpha \Rightarrow \alpha = 270^o.$$

2.2 - Ciclo trigonométrico

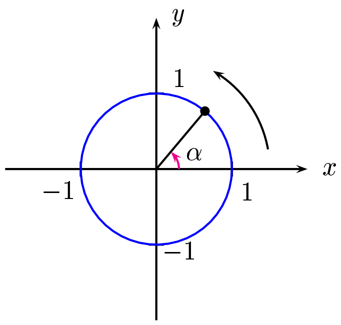
O ciclo trigonométrico é a arena onde podemos operar com a trigonometria de forma rápida e eficaz. Nesta seção, definiremos essa construção geométrica e estudaremos as medidas dos senos e cossenos definidos sobre ela. O ciclo trigonométrico também permite a generalização da idéia de ângulo, que será feita na seção seguinte.



a) Definição.

Consideremos um plano onde é definido um sistema de coordenadas ortogonais $x \times y$. Sobre esse sistema, vamos desenhar uma circunferência de raio igual a 1 cujo centro está no centro do sistema de coordenadas.

Nesta circunferência, podemos identificar os pares ordenados $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ e $(-1, -1)$, que a dividem em quatro quadrantes.



Vamos, agora, adotar a convenção de que sempre mediremos um arco partindo do ponto $(1, 0)$, e que este será positivo se for percorrido o sentido *anti-horário* (contrário ao sentido dos ponteiros de um relógio). Chamamos tal circunferência de *orientada*, pois ela tem um sentido (orientação) estabelecido sobre ela. O arco define um ângulo central nessa circunferência.

A esta circunferência orientada damos o nome de *ciclo trigonométrico*, ou *circunferência trigonométrica*, sendo esta um meio muito útil no estudo da trigonometria.

b) Ângulos no ciclo trigonométrico.

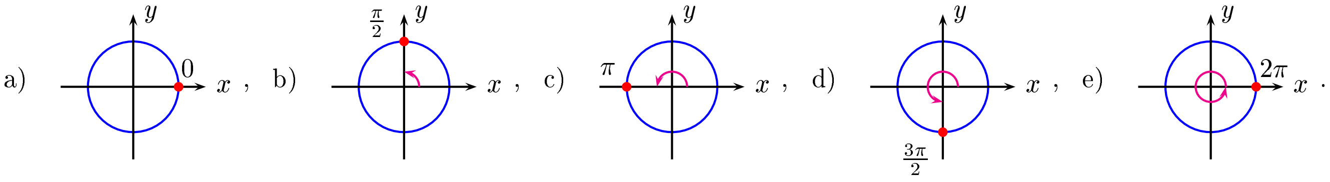
O ciclo trigonométrico é bastante propício para se trabalhar com ângulos em radianos. Lembrando que o comprimento do arco total de uma circunferência de raio r é dado por $l = 2\pi r$, temos que o ciclo trigonométrico, de raio $r = 1$, tem um arco total de $l = 2\pi$. A semicircunferência que vai do ponto $(1, 0)$ ao ponto $(-1, 0)$ do ciclo trigonométrico tem um arco de comprimento π, com um ângulo central equivalente. Tomando-se frações de π, podemos identificar imediatamente alguns ângulos em radianos nessa circunferência orientada.

Nota: *a partir de agora não escreveremos mais a unidade rad após o ângulo. Como este é uma medida adimensional (como foi explicado na sessão anterior), a unidade de medida não é necessária.*

Os ângulos que estaremos usando são, em geral, múltiplos de $\pi/2$, $\pi/4$, $\pi/6$ e $\pi/3$, pois estes envolvem pontos de fácil localização no ciclo trigonométrico e também ângulos notáveis. No entanto, qualquer outro ângulo pode também ser representado no ciclo trigonométrico de maneira semelhante. Alguns desses múltiplos são dados nos exemplos a seguir.

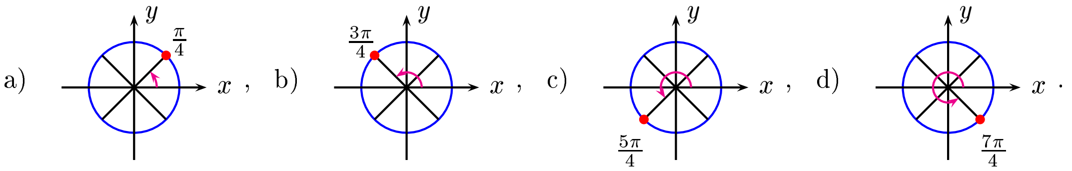
Ex.1: represente os seguintes ângulos no ciclo trigonométrico: a) 0, b) $\frac{\pi}{2}$, c) π, d) $\frac{3\pi}{2}$, e) 2π.

Solução: isto pode ser feito dividindo o ciclo trigonométrico em quatro pedaços, cada um correspondendo a um arco de $\frac{\pi}{2}$.



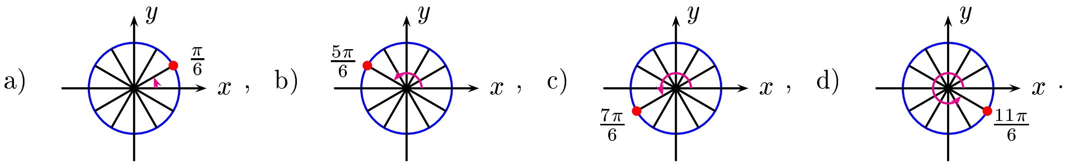
Ex.2: represente os seguintes ângulos no ciclo trigonométrico: a) $\frac{\pi}{4}$, b) $\frac{3\pi}{4}$, c) $\frac{5\pi}{4}$, d) $\frac{7\pi}{4}$.

Solução: isto pode ser feito dividindo o ciclo trigonométrico em oito pedaços, cada um correspondendo a um arco de $\frac{\pi}{4}$.



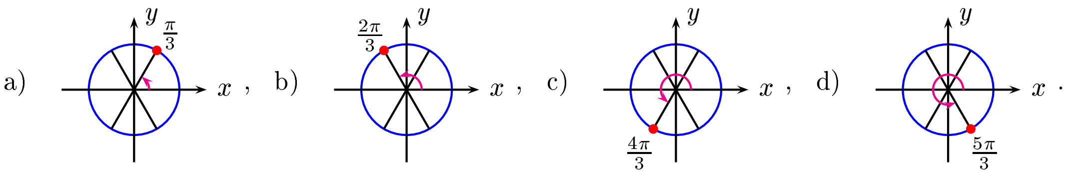
Ex.3: represente os seguintes ângulos no ciclo trigonométrico: a) $\frac{\pi}{6}$, b) $\frac{5\pi}{6}$, c) $\frac{7\pi}{6}$, d) $\frac{11\pi}{6}$.

Solução: isto pode ser feito dividindo o ciclo trigonométrico em doze pedaços, cada um correspondendo a um arco de $\frac{\pi}{6}$.



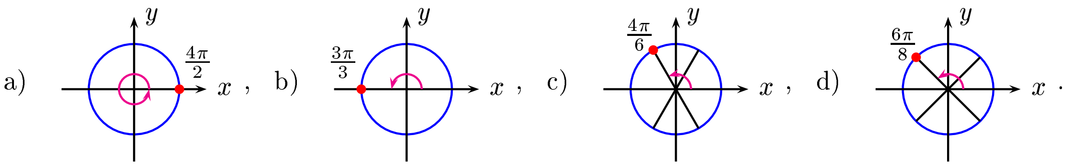
Ex.4: represente os seguintes ângulos no ciclo trigonométrico: a) $\frac{\pi}{3}$, b) $\frac{2\pi}{3}$, c) $\frac{4\pi}{3}$, d) $\frac{5\pi}{3}$.

Solução: isto pode ser feito dividindo o ciclo trigonométrico em seis pedaços, cada um correspondendo a um arco de $\frac{\pi}{3}$.



Ex.5: represente os seguintes ângulos no ciclo trigonométrico: a) $\frac{4\pi}{2}$, b) $\frac{3\pi}{3}$, c) $\frac{4\pi}{6}$, d) $\frac{6\pi}{8}$.

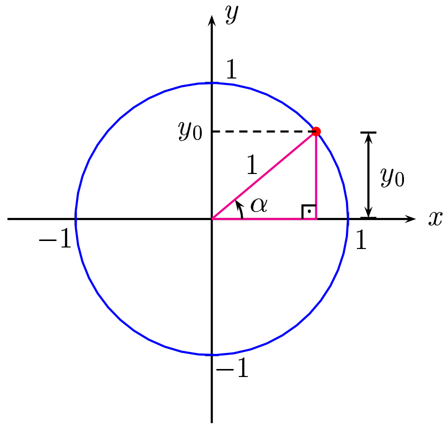
Solução: note que $\frac{4\pi}{2} = 2\pi$, $\frac{3\pi}{3} = \pi$, $\frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$ e $\frac{6\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}$.



c) Senos e cossenos.

Uma das maiores vantagens do ciclo trigonométrico é que nele o seno e o cosseno de um ângulo central adquirem um significado geométrico. Vamos estudar o seno de um certo ângulo α definido em um ciclo trigonométrico (figura a seguir).

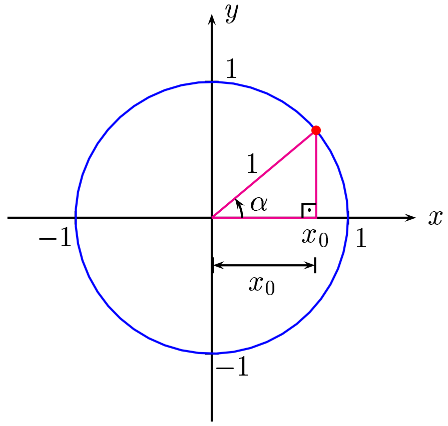
O valor do seno do ângulo α será dado por: $\text{sen}\ \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$. No caso do ciclo, o cateto oposto é igual à posição no eixo y do ponto P indicado e a hipotenusa é igual ao raio da circunferência, que é igual a 1. Portanto, temos



$$\text{sen}\ \alpha = \frac{\text{coordenada em } y}{1} = \text{coordenada em } y\ .$$

Isto facilita imensamente a identificação do seno de um ângulo. Ele será simplesmente a coordenada em y do ponto que ele define sobre o ciclo trigonométrico.

O caso do cosseno é semelhante. Este é dado por: $\cos\alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$. O cateto adjacente é agora a coordenada em x do ponto P definido pelo ângulo α no ciclo trigonométrico e a hipotenusa continua sendo igual a 1. Temos, então,

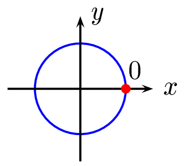


$$\cos\alpha = \frac{\text{coordenada em } x}{1} = \text{coordenada em } x\ ,$$

isto é, o cosseno do ângulo é a coordenada em x do ponto P definido por ele sobre o ciclo trigonométrico.

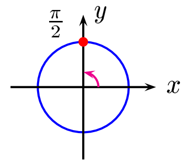
Ex.1: calcule o seno e o cosseno do ângulo 0.
Solução: observando a figura abaixo, temos:

$$\text{sen}\ 0 = 0 \quad , \quad \cos 0 = 1.$$



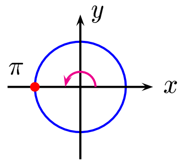
Ex.2: calcule o seno e o cosseno do ângulo $\frac{\pi}{2}$.
Solução: observando a figura abaixo, temos:

$$\text{sen}\ \frac{\pi}{2} = 1 \quad , \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$



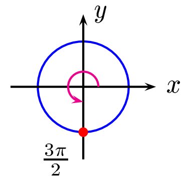
Ex.3: calcule o seno e o cosseno do ângulo π.
Solução: observando a figura abaixo, temos:

$$\text{sen}\ \pi = 0 \quad , \quad \cos\pi = -1.$$



Ex.4: calcule o seno e o cosseno do ângulo $\frac{3\pi}{2}$.
Solução: observando a figura abaixo, temos:

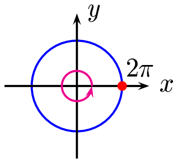
$$\text{sen}\ \frac{3\pi}{2} = -1 \quad , \quad \cos\frac{3\pi}{2} = 0.$$



Ex.5: calcule o seno e o cosseno do ângulo 2π.

Solução: observando a figura abaixo, temos:

$$\operatorname{sen} 2\pi = 0 \quad , \quad \cos 2\pi = 1.$$

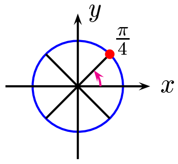


Obs.: note que os ângulos 0 e 2π definem o mesmo ponto no ciclo trigonométrico e, portanto, têm senos e cossenos iguais.

Ex.6: calcule o seno e o cosseno do ângulo $\frac{\pi}{4}$.

Solução: observando a figura abaixo, vemos que $\frac{\pi}{4}$ corresponde ao ângulo 45^o. Como sabemos (da seção 1.6) que sen $45^o = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\cos 45^o = \frac{1}{\sqrt{2}}$, temos:

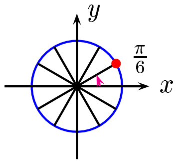
$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$



Ex.7: calcule o seno e o cosseno do ângulo $\frac{\pi}{6}$.

Solução: observando a figura abaixo, vemos que $\frac{\pi}{6}$ corresponde ao ângulo 30^o. Como sabemos (da seção 1.6) que sen $30^o = \frac{1}{2}$ e $\cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$, temos:

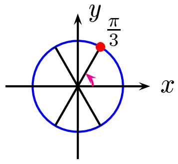
$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad , \quad \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



Ex.8: calcule o seno e o cosseno do ângulo $\frac{\pi}{3}$.

Solução: observando a figura abaixo, vemos que $\frac{\pi}{3}$ corresponde ao ângulo 60^o. Como sabemos (da seção 1.6) que sen $60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos 60^o = \frac{1}{2}$, temos:

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \cos \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}.$$

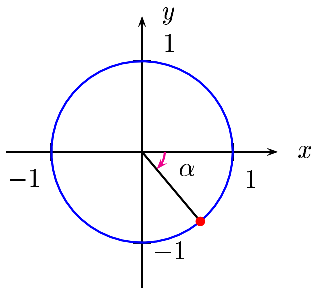


2.3 - Ângulos generalizados

A idéia do ciclo trigonométrico torna possível definirmos ângulo cujos valores não estão dentro da faixa $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. Esses ângulos serão vistos a seguir.

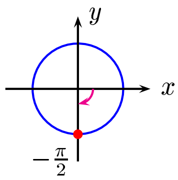
a) Ângulos negativos.

Consideremos arcos no ciclo trigonométrico que, partindo do ponto $(0, 1)$, seguem no sentido *horário*. Podemos estabelecer que esses arcos definem ângulos centrais negativos na circunferência orientada.



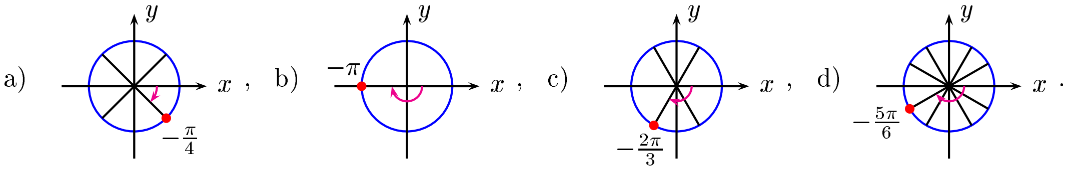
Ex.1: represente o ângulo $-\frac{\pi}{2}$ no ciclo trigonométrico.

Solução:
podemos fazê-lo por meio de um arco de comprimento $\frac{\pi}{2}$ no sentido horário, como mostra a figura. Note que este ângulo define a mesma posição no ciclo trigonomético que o ângulo $\frac{3\pi}{2}$.



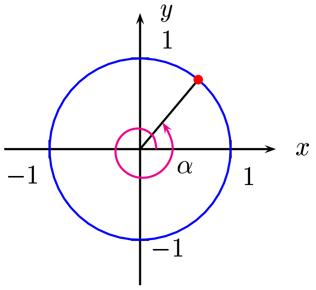
Ex.2: represente os seguintes ângulos no ciclo trigonométrico: a) $-\frac{\pi}{4}$, b) $-\pi$, c) $-\frac{2\pi}{3}$, d) $-\frac{5\pi}{6}$.

Solução:



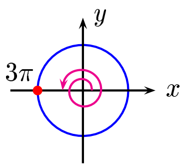
b) Ângulos maiores que 2π.

Consideremos, agora, arcos no ciclo trigonométrico que, partindo do ponto $(0, 1)$, seguem no sentido anti-horário e que têm comprimentos maiores que 2π, isto é, que são maiores que uma volta na circunferência. Esses arcos definirão ângulos cujos valores são também maiores que 2π.



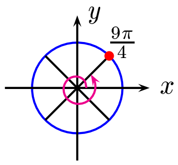
Ex.1: represente o ângulo 3π no ciclo trigonométrico.

Solução:
podemos fazê-lo por meio de um arco de comprimento 3π, que dá uma volta completa na circunferência e termina no ponto indicado na figura ao lado. Note que este ângulo define a mesma posição no ciclo trigonomético que o ângulo π.



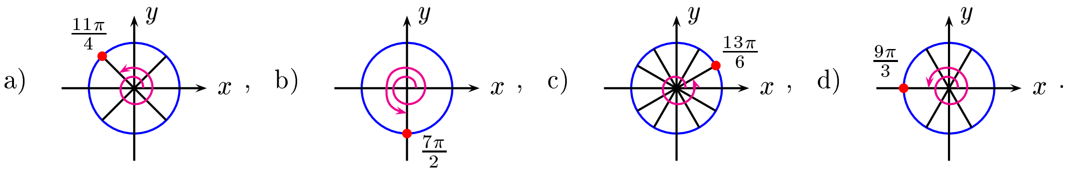
Ex.2: represente o ângulo $\frac{9\pi}{4}$ no ciclo trigonométrico.

Solução:



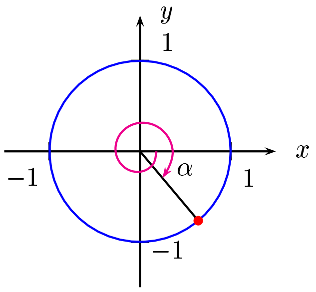
Ex.3: represente os seguintes ângulos no ciclo trigonométrico: a) $\frac{11\pi}{4}$, b) $\frac{7\pi}{2}$, c) $\frac{13\pi}{6}$, d) $\frac{9\pi}{3}$.

Solução:



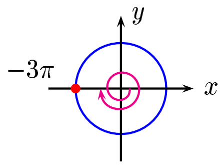
c) Ângulos menores que -2π.

Tomando, agora, arcos de comprimentos maiores que 2π tomados no sentido horário, estes definem ângulos centrais na circunferência menores que -2π.



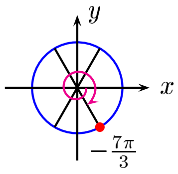
Ex.1: represente o ângulo -3π no ciclo trigonométrico.

Solução:
podemos fazê-lo por meio de um arco de comprimento 3π, que dá uma volta completa na circunferência no sentido horário e termina no ponto indicado na figura abaixo. Note que este ângulo define a mesma posição no ciclo trigonomético que o ângulo π.



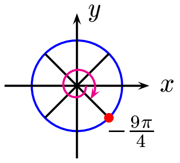
Ex.2: represente o ângulo $-\frac{7\pi}{3}$ no ciclo trigonométrico.

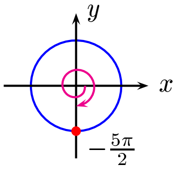
Solução:

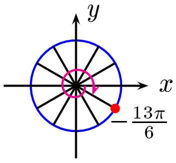


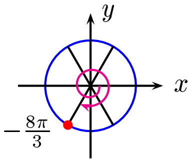
Ex.3: represente os seguintes ângulos no ciclo trigonométrico: a) $-\frac{9\pi}{4}$, b) $-\frac{5\pi}{2}$, c) $-\frac{13\pi}{6}$, d) $-\frac{8\pi}{3}$.

Solução:

a) 

, b) 

, c) 

, d) 

.

2.4 - Redução ao primeiro quadrante

Quando formos calcular os senos e cossenos de alguns ângulos, podemos fazê-lo comparando as posições destes no ciclo trigométrico com relação às posições de outros ângulos conhecidos. Por exemplo, uma lista de senos e cossenos dos ângulos notáveis estudados por nós na seção 1.6 é dada, em radianos, por

$$\boxed{\text{sen}\ \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}}\ ,\ \boxed{\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}}\ ;\ \boxed{\text{sen}\ \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}}\ ,\ \boxed{\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}}\ ;\ \boxed{\text{sen}\ \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}}\ ,\ \boxed{\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}}\ .$$

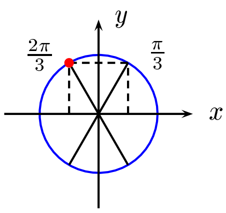
Ex.1: calcule o seno e o cosseno do ângulo $\frac{2\pi}{3}$.

Solução: na figura abaixo, podemos ver que o ângulo $\frac{2\pi}{3}$ define um ponto P sobre o ciclo trigonométrico que tem a mesma coordenada em y que o ponto Q definido pelo ângulo $\frac{\pi}{3}$. Portanto, seus senos são iguais, isto é:

$$\text{sen}\ \frac{2\pi}{3} = \text{sen}\ \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

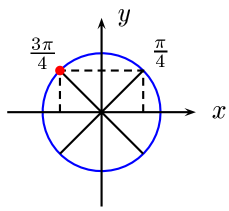
Também da figura podemos ver que a coordenada em x do ponto P definido pelo ângulo $\frac{2\pi}{3}$ tem o mesmo módulo da coordenada em x do ponto Q definido pelo ângulo $\frac{\pi}{3}$, mas com sinal oposto. Portanto,

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$



Ex.2: calcule o seno e o cosseno do ângulo $\frac{3\pi}{4}$.

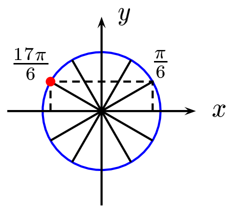
Solução:
este ângulo define um ponto P que pode ser comparado ao ponto Q definido pelo ângulo $\frac{\pi}{4}$. Ambos têm a mesma coordenada em y mas coordenadas em x opostas. Portanto,



$$\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}=\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,$$
$$\cos\frac{3\pi}{4}=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ .$$

Ex.3: calcule o seno e o cosseno do ângulo $\frac{17\pi}{6}$.

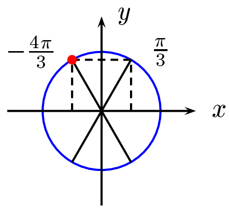
Solução:
este ângulo define um ponto P que pode ser comparado ao ponto Q definido pelo ângulo $\frac{\pi}{6}$. Ambos têm a mesma coordenada em y mas coordenadas em x opostas. Portanto,



$$\operatorname{sen}\frac{17\pi}{6}=\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\ ,$$
$$\cos\frac{17\pi}{6}=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

Ex.4: calcule o seno e o cosseno do ângulo $-\frac{8\pi}{6}$.

Solução:
temos que $-\frac{8\pi}{6}=-\frac{4\pi}{3}$. Este ângulo define um ponto P que pode ser comparado ao ponto Q definido pelo ângulo $\frac{\pi}{3}$. Ambos têm a mesma coordenada em y mas coordenadas em x opostas. Portanto,

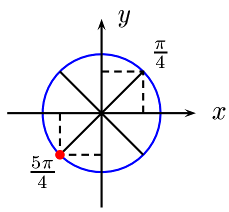


$$\operatorname{sen}\left(-\frac{8\pi}{6}\right)=\operatorname{sen}\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,$$
$$\cos\left(-\frac{8\pi}{6}\right)=\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}\ .$$

Ex.5: calcule o seno e o cosseno do ângulo $\frac{5\pi}{4}$.

Solução:
na figura abaixo, podemos ver que o ângulo $\frac{5\pi}{4}$ define um ponto P sobre o ciclo trigonométrico que tem uma coordenada cujo módulo é igual ao da coordenada em y do ponto Q definido pelo ângulo $\frac{\pi}{4}$, mas com sinal oposto. Portanto, temos:

$$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}=-\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ .$$

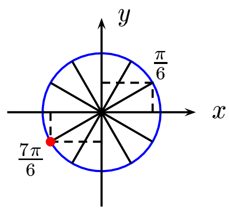


Também da figura podemos ver que a coordenada em x do ponto P definido pelo ângulo $\frac{5\pi}{4}$ tem o mesmo módulo da coordenada em x do ponto Q definido pelo ângulo $\frac{\pi}{4}$, mas com sinal oposto. Portanto,

$$\cos\frac{5\pi}{4}=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ex.6: calcule o seno e o cosseno do ângulo $\frac{7\pi}{6}$.

Solução:
este ângulo define um ponto P que pode ser comparado ao ponto Q definido pelo ângulo $\frac{\pi}{6}$. Ambos têm coordenadas em y e em x opostas. Portanto,

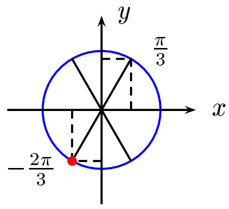


$$\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}=-\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}\ ,$$
$$\cos\frac{7\pi}{6}=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

Ex.7: calcule o seno e o cosseno do ângulo $-\frac{2\pi}{3}$.

Solução:
este ângulo define um ponto P que pode ser comparado ao ponto Q definido pelo ângulo $\frac{\pi}{3}$. Ambos têm coordenadas em y e em x opostas. Portanto,

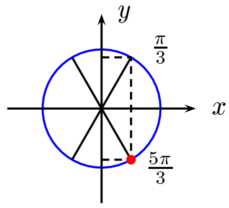
$$\text{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,$$
$$\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}\ .$$



Ex.8: calcule o seno e o cosseno do ângulo $\frac{5\pi}{3}$.

Solução:
este ângulo define um ponto P que pode ser comparado ao ponto Q definido pelo ângulo $\frac{\pi}{3}$. Ambos têm coordenadas em y opostas, mas as mesmas coordenadas em x. Portanto,

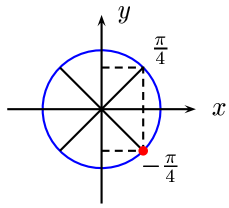
$$\text{sen}\,\frac{5\pi}{3} = -\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,$$
$$\cos\frac{5\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\ .$$



Ex.9: calcule o seno e o cosseno do ângulo $-\frac{\pi}{4}$.

Solução:
este ângulo define um ponto P que pode ser comparado ao ponto Q definido pelo ângulo $\frac{\pi}{4}$. Ambos têm coordenadas em y opostas, mas as mesmas cordenadas em x. Portanto,

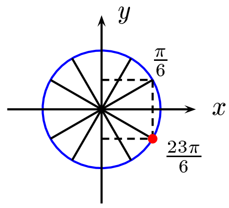
$$\text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\text{sen}\,\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,$$
$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ .$$



Ex.10: calcule o seno e o cosseno do ângulo $\frac{23\pi}{6}$.

Solução:
este ângulo define um ponto P que pode ser comparado ao ponto Q definido pelo ângulo $\frac{\pi}{6}$. Ambos têm coordenadas em y opostas, mas as mesmas coordenadas em x. Portanto,

$$\text{sen}\,\frac{23\pi}{6} = -\text{sen}\,\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}\ ,$$
$$\cos\frac{23\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$



Os cálculos das tangentes, secantes, co-secantes e co-tangentes desses ângulos podem ser efetuados a partir dos senos e cossenos destes.

2.5 - Seno e cosseno da soma de ângulos

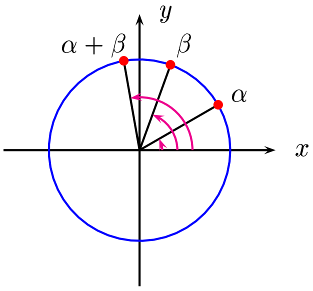
Existem duas fórmula úteis no cálculo dos senos e cossenos de alguns ângulos. Estas são as fórmulas para o seno e o cosseno da soma de dois ângulos:

$$\boxed{\text{sen}\,(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\ \text{sen}\,\beta}\ ,$$

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\ \text{sen}\,\beta}\ .$$

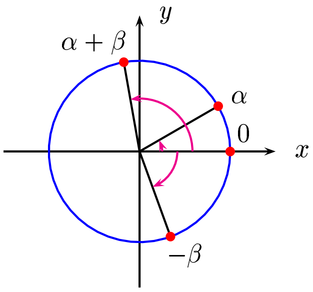
Estas são demonstradas a seguir.

Demonstração: agora, vamos deduzir fórmulas que permitem calcular o cosseno e o seno da soma de dois ângulos. Começaremos por deduzir a fórmula para o cálculo do cosseno da soma de dois ângulos. Para isso, observemos a figura ao lado, onde estão indicadas as posições no ciclo trigonométrico de um ângulo α e de um ângulo β. O ângulo resultante da soma de α e β também é indicado na figura.



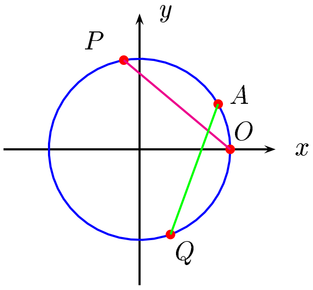
Agora, vamos representar somente os ângulos α e $\alpha+\beta$. Além destes, também representamos o ponto relativo ao ângulo $-\beta$ e o ponto relativo ao ângulo 0. A seguir, representamos os pontos designados por esses pontos no ciclo trigonométrico pelas letras O, A, P e Q. As coordenadas desses pontos são dadas abaixo:

$$O(1,0);\ A(\cos\alpha, \text{sen }\alpha);\ P\left(\cos(\alpha+\beta), \text{sen }(\alpha+\beta)\right);$$
$$Q\left(\cos(-\beta), \text{sen }(-\beta)\right) = (\cos\beta, -\text{sen }\beta).$$



Da figura, podemos notar que os arcos OP e QA são iguais (ambos medem $\alpha+\beta$). Isto significa que os segmentos de retas $\overline{OP}$ e $\overline{QA}$ também têm o mesmo comprimento.

Os comprimentos $\overline{OP}$ e $\overline{QA}$ correspondem às distâncias d_{OP} e d_{QA}, respectivamente. Utilizando a fórmula para a distância entre dois pontos (capítulo 1 do curso de Geometria Analítica), temos



$$\begin{aligned} d_{OP} &= \sqrt{[\cos(\alpha+\beta)-1]^2 + [\text{sen }(\alpha+\beta)-0]^2} = \sqrt{\cos^2(\alpha+\beta) - 2\cos(\alpha+\beta) + 1 + \text{sen}^2\,(\alpha+\beta)} = \\ &= \sqrt{\cos^2(\alpha+\beta) + \text{sen}^2\,(\alpha+\beta) - 2\cos(\alpha+\beta) + 1} \end{aligned}$$

Usando a identidade $\cos^2\theta + \text{sen}^2\,\theta = 1$, temos

$$d_{OP} = \sqrt{1 - 2\cos(\alpha+\beta) + 1} = \sqrt{2 - 2\cos(\alpha+\beta)}\ .$$

Para a distância $\overline{QA}$, temos

$$\begin{aligned} d_{QA} &= \sqrt{[\cos\alpha - \cos(-\beta)]^2 + [\text{sen }\alpha - \text{sen }(-\beta)]^2} = \sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + [\text{sen }\alpha - (-\text{sen }\beta)]^2} = \\ &= \sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\text{sen }\alpha + \text{sen }\beta)^2} = \\ &= \sqrt{\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \text{sen}^2\,\alpha + 2\,\text{sen }\alpha\ \text{sen }\beta + \text{sen}^2\,\beta} = \\ &= \sqrt{\cos^2\alpha + \text{sen}^2\,\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \text{sen}^2\,\beta + 2\,\text{sen }\alpha\ \text{sen }\beta} = \\ &= \sqrt{1 - 2\cos\alpha\cos\beta + 1 + 2\,\text{sen }\alpha\ \text{sen }\beta} = \sqrt{2 - 2\cos\alpha\cos\beta + 2\,\text{sen }\alpha\ \text{sen }\beta}\ . \end{aligned}$$

Como as duas distâncias são iguais, temos

$$\begin{aligned} & d_{OP} = d_{QA} \Rightarrow \sqrt{2 - 2\cos(\alpha+\beta)} = \sqrt{2 - 2\cos\alpha\cos\beta + 2\,\text{sen }\alpha\ \text{sen }\beta} \Rightarrow \\ & \Rightarrow 2 - 2\cos(\alpha+\beta) = 2 - 2\cos\alpha\cos\beta + 2\,\text{sen }\alpha\ \text{sen }\beta \Rightarrow \\ & \Rightarrow -2\cos(\alpha+\beta) = -2\cos\alpha\cos\beta + 2\,\text{sen }\alpha\ \text{sen }\beta \Rightarrow -\cos(\alpha+\beta) = -\cos\alpha\cos\beta + \text{sen }\alpha\ \text{sen }\beta \Rightarrow \\ & \Rightarrow \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen }\alpha\ \text{sen }\beta\ . \end{aligned}$$

Temos, então, a seguinte fórmula:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen }\alpha\ \text{sen }\beta\ .$$

A fórmula para o seno da soma de dois ângulos pode ser obtida através da seguinte relação entre o seno e o cosseno de um ângulo (seção 1.7 do capítulo 1): $\text{sen}\,\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$. Podemos, então, escrever

$$\text{sen}\,(\alpha+\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+(-\beta)\right) \ .$$

Usando a fórmula para o cosseno da soma de dois ângulos, temos

$$\begin{aligned} \text{sen}\,(\alpha+\beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos(-\beta) - \text{sen}\,\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\text{sen}\,(-\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta + \text{sen}\,\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\text{sen}\,\beta = \\ &= \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta \ . \end{aligned}$$

Temos, então, a fórmula

$$\text{sen}\,(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta \ .$$

As duas relações aqui obtidas serão utilizadas nos exemplos que seguem.

Ex.1: Calcule $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)$.

Solução:
$$\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{2} - \text{sen}\,\frac{\pi}{6}\text{sen}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.0 - \frac{1}{2}.1 = -\frac{1}{2} \ .$$

Ex.2: Calcule $\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)$.

Solução:
$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{6}\text{sen}\,\frac{\pi}{2} + \text{sen}\,\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.1 - \frac{1}{2}.0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

Ex.3: Calcule $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\pi\right)$.

Solução:
$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\pi\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos(-\pi) - \text{sen}\,\frac{\pi}{3}\text{sen}\,(-\pi) = \frac{1}{2}.(-1) - \frac{\sqrt{3}}{2}.0 = -\frac{1}{2} \ .$$

Ex.4: Calcule $\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}-\pi\right)$.

Solução:
$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}-\pi\right) = \cos\frac{\pi}{3}\text{sen}\,(-\pi) + \text{sen}\,\frac{\pi}{3}\cos(-\pi) = \frac{1}{2}.0 + \frac{\sqrt{3}}{2}.(-1) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

Ex.5: Calcule o cosseno do ângulo $\frac{7\pi}{12}$.

Solução: sabendo que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$, temos

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \text{sen}\,\frac{\pi}{3}\text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \ .$$

Ex.6: Calcule o seno do ângulo $\frac{7\pi}{12}$.

Solução: sabendo que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$, temos

$$\text{sen}\,\frac{7\pi}{12} = \text{sen}\,\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\text{sen}\,\frac{\pi}{4} + \text{sen}\,\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \ .$$

Com isto, terminamos este capítulo. Os conceitos aqui aprendidos (ou revistos) serão muito úteis no estudo de vetores que será feito a seguir. Esses conhecimentos também serão fundamentais para a definição de funções trigonométicas no curso de Cálculo Diferencial e Integral.