6 - Integrais indefinidas

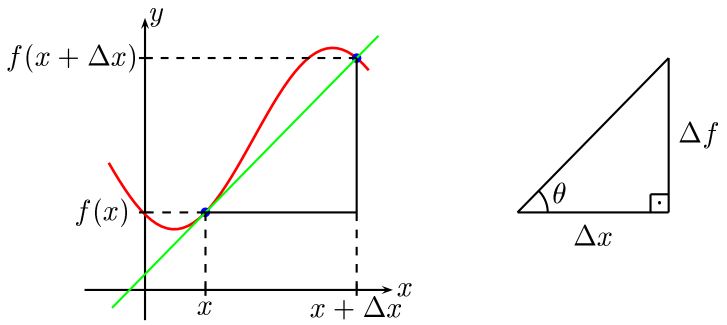
O Cálculo Diferencial e Integral, como o próprio nome diz, tem duas colunas fundamentais: a derivada e a integral. Neste capítulo, estudaremos o conceito de *integral indefinida* que, de um modo geral, é a operação inversa à derivada. Porém, antes de estudá-la vamos estabelecer os conceitos de *diferencial* e de *primitiva*.

6.1 - Diferenciais

Um conceito que está ligado ao de derivada é o de diferencial. Para introduzir essa idéia vamos voltar ao significado geométrico da derivada de uma função $f(x)$ com relação à variável independente x descrita na seção 4.2 do capítulo 4.

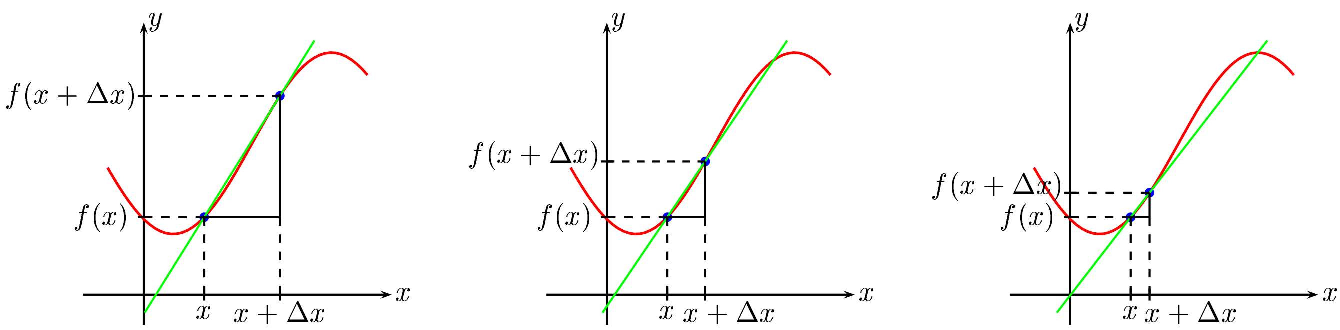
Primeiro consideramos a curva descrita por $y = f(x)$, dependente da variável x. Podemos tomar a reta que passa pelos pontos $(x, f(x))$ e $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$. A tangente do ângulo de inclinação dessa reta será dada por

$$\text{tg } \theta = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \ .$$



Quando vamos diminuindo o valor de Δx, a reta se aproxima da tangente à curva $y = f(x)$ no ponto x. No limite em que $\Delta \to 0$, temos que a tangente dessa reta é a derivada de $f(x)$ com relação a x:

$$\text{tg } \theta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx} \ .$$



Vamos agora focalizar a variação causada em $f(x)$ por uma variação em x. Considerando uma variação Δx, temos

$$x \to x + \Delta x \quad \Rightarrow \quad f(x) \to f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f \ .$$

Queremos agora uma função que relacione a variação Δf com a variação Δx. Através da fórmula da tangente nós temos

$$\text{tg } \theta = \frac{\Delta f}{\Delta x} \Rightarrow \Delta f = \text{tg } \theta \cdot \Delta x \Rightarrow \Delta f = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \Delta x \ .$$

Vamos agora considerar um incremento infinitesimal dx em x que acarreta um incremento infinitesimal df em f. Isto pode ser conseguindo tomando o limite $\Delta x \to 0$ na expressão acima:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \Delta x \right] \ .$$

Pelo teorema T4 do capítulo 3, temos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \ .$$

Definindo $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = df$ e $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x = dx$ e lembrando da definição de derivada, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x)$, temos

$$\boxed{df = f'(x)\, dx} \ .$$

A expressão acima relaciona o que chamamos de diferencial de f com a diferencial de x. Note que na notação de Leibniz da derivada, temos

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \ ,$$

de modo que a derivada de uma função $f(x)$ com relação à variável independente x pode ser interpretada como sendo o quociente entre as diferenciais df e dx. A seguir, vamos determinar as diferenciais de algumas funções.

Ex.1: calcule a diferencial da função $f(x) = x^2$.

Solução: temos que $df = f'(x)\, dx \Rightarrow df = 2x\, dx$.

Ex.2: calcule a diferencial da função $f(x) = x^3 + 1$.

Solução: temos que $df = f'(x)\, dx \Rightarrow df = (3x^2 + 0)\, dx \Rightarrow df = 3x^2\, dx$.

Ex.3: calcule a diferencial da função $f(x) = 3x^5 - 4x^2 + x$.

Solução: temos que $df = f'(x)\, dx \Rightarrow df = (3.5x^4 - 4.2x + 1)\, dx \Rightarrow df = (15x^4 - 8x + 1)\, dx$.

No capítulo 9 estaremos vendo algumas aplicações das diferenciais.

6.2 - Primitivas

Uma primitiva $F(x)$ de uma função $f(x)$ é uma função cuja derivada é igual a $f(x)$, isto é, se $F'(x) = f(x)$.

D1 - Dada uma função $f(x)$ definida em um intervalo $I \in I\!R$, uma *primitiva* de $f(x)$ é uma função $F(x)$ definida em I tal que $F'(x) = f(x)$.

Ex.1: verifique se $F(x) = 2x$ é uma primitiva de $f(x) = 2$.

Solução: temos $F'(x) = 2 = f(x)$, de modo que $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$.

Ex.2: verifique se $F(x) = x^3$ é uma primitiva de $f(x) = 3x^2$.

Solução: temos $F'(x) = 3x^2 = f(x)$, de modo que $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$.

Ex.3: verifique se $F(x) = x^3 + 2$ é uma primitiva de $f(x) = 3x^2$.

Solução: temos $F'(x) = 3x^2 + 0 = 3x^2 = f(x)$, de modo que $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$.

Ex.4: verifique se $F(x) = x^3 - \frac{1}{3}$ é uma primitiva de $f(x) = 3x^2$.

Solução: temos $F'(x) = 3x^2 + 0 = f(x)$, de modo que $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$.

Ex.5: verifique se $F(x) = x^3 + x$ é uma primitiva de $f(x) = 3x^2$.

Solução: temos $F'(x) = 3x^2 + 1 \neq f(x)$, de modo que $F(x)$ não é uma primitiva de $f(x)$.

Dos exemplos acima, podemos ver que existem várias (na realidade, inúmeras) primitivas para uma mesma função $f(x)$. Particularmente, se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, então $G(x) = F(x) + c$, onde c é qualquer constante real, também é primitiva de $f(x)$. Isto é expresso no teorema a seguir.

T1 - Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, então $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, também é uma primitiva de $f(x)$.

Demonstração: se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, então $F'(x) = f(x)$. Temos, então, que, dada uma função $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$,

$$G'(x) = F'(x) + 0 = f(x) \ .$$

Portanto, $G(x)$ também é uma primitiva de $f(x)$.

Ex.6: mostre que $F(x) = 3x + 2$ e $G(x) = 3x + 2 + k$, $k \in \mathbb{R}$, são primitivas de $f(x) = 3$.

Solução: $F'(x) = 3.1 + 0 = 3$ e $G'(x) = 3.1 + 0 = 3$, de modo que ambas são primitivas de $f(x) = 3$.

6.3 - Integrais indefinidas

A integral indefinida de uma função $f(x)$ é a família de todas as primitivas dessa função. Portanto, ela é um conjunto infinito de funções relacionadas por uma constante.

D2 - A *integral indefinida* de uma função $f(x)$ definida em um intervalo $I \in \mathbb{R}$ é dada por $\int f(x)\, dx = F(x) + c$, onde $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ e c é uma constante real arbitrária.

O símbolo $\int f(x)\, dx$ merece uma explicação. A integral, como veremos no capítulo seguinte, é uma soma de infinitos pedaços, do tipo $S\, f(x).\Delta x$. Quando esses pedaços são infinitesimais, temos $\Delta x \to dx$, de modo que o símbolo fica $S\, f(x).dx$. O símblo S de soma foi se transformando ($S \to \mathcal{S} \to \int$) até tornar-se o símbolo de integral hoje utilizado.

Quando calculamos uma integral, temos que nos perguntar qual a função cuja derivada resulta na função que estamos querendo integrar. Alguns exemplos de cálculos de integrais são dados a seguir.

Obs.: sempre que escrevermos integral estaremos nos referindo à integral indefinida.

Ex.1: calcule a integral de $f(x) = 4$.

Solução: $\int f(x)\,dx = \int 4\,dx = 4x + c$.

Ex.2: calcule a integral de $f(x) = x$.

Solução: $\int f(x)\,dx = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$.

Ex.3: calcule a integral de $f(x) = x^2$.

Solução: $\int f(x)\,dx = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c$.

Ex.4: calcule a integral de $f(x) = x^3$.

Solução: $\int f(x)\,dx = \int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + c$.

Ex.5: calcule a integral de $f(x) = x^4$.

Solução: $\int f(x)\,dx = \int x^4\,dx = \frac{x^5}{5} + c$.

De um modo geral, podemos deduzir as seguintes regras.

T2 - A integral indefinida de qualquer função constante $f(x) = k$, $k \in I\!R$, será dada por $\int f(x)\,dx = kx + c$.

Demonstração: a função $F(x) = kx$ é uma primitiva de $f(x) = k$, pois $F'(x) = k = f(x)$. Portanto, $\int f(x)dx = kx + c = F(x) + c$ é a integral indefinida de $f(x) = k$.

T3 - A integral indefinida de qualquer função de potências naturais $f(x) = x^n$, $n \in I\!N$, será dada por $\int f(x)\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, dentro do domínio de $f(x)$.

Demonstração: a função $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ é uma primitiva de $f(x) = x^n$, pois $F'(x) = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n = f(x)$. Portanto, $\int f(x)dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c = F(x) + c$ é a integral indefinida de $f(x) = x^n$.

A seguir, usaremos esses teoremas na integração de algumas funções.

Ex.6: calcule a integral de $f(x) = 8$.

Solução: $\int f(x)\,dx = \int 8\,dx = 8x + c$.

Ex.7: calcule a integral de $f(x) = -4$.

Solução: $\int f(x)\,dx = \int (-4)\,dx = -4x + c$.

Ex.8: calcule a integral de $f(x) = x^7$.

Solução: $\int f(x)\,dx = \int x^7\,dx = \frac{x^8}{8} + c$.

Ex.9: calcule a integral de $f(x) = x^{21}$.

Solução: $\int f(x)\,dx = \int x^{21}\,dx = \frac{x^{22}}{22} + c$.

Ex.10: calcule a integral de $f(x) = x^0$.

Solução: $\int f(x)\,dx = \int x^0\,dx = \frac{x^1}{1} + c = x + c$, definida somente para $x \neq 0$, pois $f(x) = x^0$ somente é definida para $x \in I\!R - \{0\}$.

Devemos salientar que a integral indefinida representa um conjunto de funções que agrupa todas as primitivas de uma determinada função. Os teoremas abaixo exprimem as relações entre a derivada e a integral indefinida de uma função.

T4 - Dada uma função $f(x)$ definida em um intervalo $I \in I\!R$, temos, nesse intervalo, $\displaystyle\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$.

O teorema acima mostra que a derivada da integral de uma função é a própria função.

Demonstração: sabemos que $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, onde $F'(x) = f(x)$ e $c \in I\!R$. Temos, então,

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = \frac{d}{dx}[F(x) + c] = F'(x) + 0 = f(x) .$$

T5 - Dada uma função $f(x)$ definida em um intervalo $I \in I\!R$, temos, nesse intervalo, $\int \frac{df(x)}{dx}\, dx = f(x) + c\ ,\ c \in I\!R$.

Este teorema mostra que a integral da derivada de uma função é a própria função mais uma constante arbitrária.

Demonstração: sabemos que $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$, de modo que $f(x)$ é uma primitiva de $\frac{df(x)}{dx}$. Temos, então, que

$$\int \frac{df(x)}{dx}\, dx = f(x) + c\ ,\ c \in I\!R\ .$$

Ex.11: calcule $\frac{d}{dx} \int x^3\, dx$.

Solução: $\frac{d}{dx} \int x^3\, dx = x^3$.

Ex.12: calcule $\int \frac{d}{dx} x^6\, dx$.

Solução: $\int \frac{d}{dx} x^6\, dx = x^6 + c$.

6.4 - Integrais indefinidas de combinações lineares de funções

Vamos agora estudar as regras para integrarmos combinações lineares de funções. Começaremos por estudarmos como integrar somas de funções e produtos de funções por números reais.

a) Integral indefinida da soma de duas funções

Se considerarmos a soma de duas funções, $h(x) = f(x) + g(x)$, a integral indefinida dessa soma será a soma das integrais das duas funções mais uma constante arbitrária, isto é, de modo semelhante ao que acontece com a derivada, a integral da soma é igual à soma das integrais, mais uma constante arbitrária. Essa regra é expressa no teorema a seguir.

T6 - Dadas duas funções $f(x)$ e $g(x)$, temos $\displaystyle\int [f(x) + g(x)]\ dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx + c'\ ,\ c' \in I\!R$.

Demonstração: suponhamos que $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ e $G(x)$ é ma primitiva de $g(x)$. Então,

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c_1 \quad \text{e} \quad \int g(x)\, dx = G(x) + c_2\ ,$$

onde c_1 e c_2 são constantes reais arbitrárias. Podemos, então, fazer a soma

$$\int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx = F(x) + c_1 + G(x) + c_2 = F(x) + G(x) + c_1 + c_2\ .$$

Combinando as duas constantes arbitrárias, $c_3 = c_1 + c_2$, temos, então,

$$\int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx = F(x) + G(x) + c_3\ ,$$

onde c_3 também é uma constante real arbitrária.

Agora, sabemos que $S(x) = F(x) + G(x)$ é uma primitiva de $s(x) = f(x) + g(x)$, pois $S'(x) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$. Portanto,

$$\int s(x)\, dx = S(x) + c_4 \Rightarrow \int [f(x) + g(x)]\ dx = F(x) + G(x) + c_4\ ,$$

onde c_4 é uma constante arbitrária. Isolando os termos $F(x) + G(x)$ em ambas as integrais, temos

$$F(x) + G(x) = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx - c_3 \quad , \quad F(x) + G(x) = \int [f(x) + g(x)]\ dx - c_4\ .$$

Igualando as duas equações, temos

$$\int [f(x)+g(x)]\,dx - c_4 = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx - c_3 \Rightarrow \int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx - c_3 + c_4 \ .$$

Chamando $-c_3+c_4=c'$, temos, então,

$$\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx + c' \ ,$$

o que prova o teorema.

Alguns exemplos são apresentados a seguir.

Ex.1: calcule a integral da função $f(x)=x+x^2$.

Solução:

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int (x+x^2)\,dx = \int x\,dx + \int x^2\,dx + c' = \frac{x^2}{2}+c_1+\frac{x^3}{3}+c_2+c' = \frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+c_1+c_2+c' = \\ &= \frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+c \ ,\end{aligned}$$

onde fizemos $c=c_1+c_2+c'$.

Ex.2: calcule a integral da função $f(x)=1+x^4$.

Solução:

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int (1+x^4)\,dx = \int 1\,dx + \int x^4\,dx + c' = x+c_1+\frac{x^5}{5}+c_2+c' = x+\frac{x^5}{5}+c_1+c_2+c' = \\ &= x+\frac{x^5}{5}+c \ ,\end{aligned}$$

onde fizemos $c=c_1+c_2+c'$.

Podemos fazer essas integrais de forma mais direta, antecipando a combinação das constantes arbitrárias, como no exemplo seguinte.

Ex.3: calcule a integral da função $f(x)=x^6+3$.

Solução:

$$\int f(x)\,dx = \int (x^6+3)\,dx = \frac{x^7}{7}+3x+c \ .$$

Note que uma integral indefinida sempre resulta em uma função mais uma constante arbitrária. Esta é a "marca" da integral indefinida e a constante jamais pode faltar.

b) Integral indefinida do produto de uma função por um número real

A integral indefinida do produto de uma função por um número real é dada pelo produto da integral indefinida da função pelo número real mais uma constante arbitrária. Essa regra é expressa no teorema a seguir.

T7 - Dada uma função $f(x)$ e um número $k\in\mathbb{R}$, temos $\displaystyle\int [kf(x)]\,dx = k\int f(x)\,dx + c' \ , \ c'\in\mathbb{R}$.

Demonstração: suponhamos que $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$. Então,

$$\int f(x)\,dx = F(x)+c_1 \ ,$$

onde c_1 é uma constante real arbitrária. Temos então que, dado um número $k \in I\!R$,

$$k \int f(x)\,dx = k\,[F(x) + c_1] = kF(x) + kc_1 \ .$$

Substituindo $c_2 = kc_1$, temos, então,

$$k \int f(x)\,dx = kF(x) + c_2 \ ,$$

onde c_2 também é uma constante real arbitrária.

Agora, sabemos que $P(x) = kF(x)$ é uma primitiva de $p(x) = kf(x)$, pois $P'(x) = kF'(x) = kf(x)$. Portanto,

$$\int p(x)\,dx = P(x) + c_3 \Rightarrow \int [kf(x)]\ dx = kF(x) + c_3 \ ,$$

onde c_3 é uma constante arbitrária. Isolando os termos $kF(x)$ em ambas as integrais, temos

$$kF(x) = k \int f(x)\,dx - c_2 \quad , \quad kF(x) = \int [kf(x)]\ dx - c_3 \ .$$

Igualando as duas equações, temos

$$\int [kf(x)]\ dx - c_3 = k \int f(x)\,dx - c_2 \Rightarrow \int [kf(x)]\ dx = k \int f(x)\,dx - c_2 + c_3 \ .$$

Chamando $-c_2 + c_3 = c'$, temos, então,

$$\int [kf(x)]\ dx = k \int f(x)\,dx + c' \ ,$$

o que prova o teorema.

Alguns exemplos são apresentados a seguir.

Ex.1: calcule a integral da função $f(x) = 3x^2$.

Solução:

$$\int f(x)\,dx = \int 3x^2\,dx = 3 \int x^2\,dxc' = 3\frac{x^3}{3} + c_1 + c' = x^3 + c \ ,$$

onde fizemos $c = c_1 + c'$.

Ex.2: calcule a integral da função $f(x) = 5x$.

Solução:

$$\int f(x)\,dx = \int 5x\,dx = 5 \int x\,dxc' = 5\frac{x^2}{2} + c_1 + c' = \frac{5}{2}x^2 + c \ ,$$

onde fizemos $c = c_1 + c'$.

Ex.3: calcule a integral da função $f(x) = 0x^3$.

Solução:

$$\int f(x)\,dx = \int 0x^3\,dx = 0 \int x^3\,dxc' = 0\frac{x^4}{4} + c_1 + c' = 0 + c = c \ ,$$

onde fizemos $c = c_1 + c'$.

É particularmente interessante notar que, de acordo com o exemplo 3, $\int 0\,dx = c$.

Também aqui podemos fazer essas integrais de forma mais direta, antecipando a combinação das constantes arbitrárias, como no exemplo seguinte.

Ex.4: calcule a integral da função $f(x) = 4x^6$.

Solução: $\int f(x)\,dx = \int 4x^6\,dx = 4\frac{x^7}{7} + c = \frac{4}{7}x^7 + c$.

c) Integral indeifinida de uma combinação linear de funções

A integral indefinida da combinação linear de funções é a combinação linear das derivadas destas mais uma constante arbitrária, conforme explicitado no teorema a seguir.

T8 - A integral indefinida de uma combinação linear $h(x) = k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \cdots + k_n f_n(x)$ é dada por $\int h(x)\, dx = k_1 \int f_1(x)\, dx + k_2 \int f_2(x)\, dx + \cdots + k_n \int f_n(x)\, dx + c'$, onde c' é uma constante real arbitrária, para qualquer $x \in I$, onde I é um intervalo onde todas as funções componentes têm integrais.

Demonstração: tomemos uma certa combinação linear $h(x) = k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \cdots + k_n f_n(x)$ de funções cujas integrais sejam definidas em um certo intervalo I. Temos que

$$\int h(x)\, dx = \int [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \cdots + k_n f_n(x)]\, dx \ .$$

Usando o teorema T6, temos que

$$\int h(x)\, dx = \int [k_1 f_1(x)]\, dx + \int [k_2 f_2(x)]\, dx + \cdots + \int [k_n f_n(x)] + c''\, dx \ ,$$

onde c_1 é uma constante real arbitrária. Aplicando agora o teorema T7, ficamos com

$$\int h(x)\, dx = k_1 \int f_1(x)\, dx + c_1 + k_2 \int f_2(x)\, dx + c_2 + \cdots + k_n \int f_n(x)\, dx + c_n + c'' \ ,$$

onde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são constantes arbitrárias reais. Combinando as constantes arbitrárias e escrevendo $c' = c_1 +$ $+ c_2 + \cdots + c_n + c''$, temos, então,

$$\int h(x)\, dx = k_1 \int f_1(x)\, dx + k_2 \int f_2(x)\, dx + \cdots + k_n \int f_n(x)\, dx + c' \ ,$$

o que prova o teorema.

A seguir, mostramos alguns exemplos com integrais de funções polinomiais.

Ex.1: calcule a integral da função $f(x) = 2x + 3x^2$.

Solução:
$$\begin{aligned} \int f(x)\, dx &= \int (2x + 3x^2)\, dx = 2\int x\, dx + 3\int x^2\, dx + c' = 2\left(\frac{x^2}{2} + c_1\right) + 3\left(\frac{x^3}{3} + c_2\right) + c' = \\ &= 2\frac{x^2}{2} + 2c_1 + 3\frac{x^3}{3} + 3c_2 + c' = x^2 + x^3 + 2c_1 + 3c_2 + c' = x^2 + x^3 + c \ . \end{aligned}$$

Ex.2: calcule a derivada da função $g(x) = 3 - x^2$.

Solução:
$$\begin{aligned} \int g(x)\, dx &= \int (3 - x^2)\, dx = \int 3\, dx - \int x^2\, dx + c' = 3x + c_1 - \left(\frac{x^3}{3} + c_2\right) + c' = \\ &= 3x + c_1 - \frac{x^3}{3} - c_2 + c' = 3x - \frac{x^3}{3} + c_1 - c_2 + c' = 3x - \frac{x^3}{3} + c \ . \end{aligned}$$

É mais prático fazermos essas derivadas de forma mais direta, como nos exemplos a seguir.

Ex.3: calcule a integral da função $h(x) = 2 + 3x - 5x^2$.

Solução:
$$\int h(x)\, dx = \int (2 + 3x - 5x^2)\, dx = 2x + 3\frac{x^2}{2} - 5\frac{x^3}{3} + c = 2x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{3}x^3 + c \ .$$

Ex.4: calcule a integral da função $m(x) = x^3 - 3x$.

Solução:
$$\int m(x)\, dx = \int (x^3 - 3x)\, dx = \frac{x^4}{4} - 3\frac{x^2}{2} + c = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + c \ .$$

Ex.5: calcule a integral da função $n(x) = 2x^5 + 4x^3 - 2x + 1$.

Solução:
$$\begin{aligned} \int n(x)\,dx &= \int (2x^5 + 4x^3 - 2x + 1)\,dx = 2\frac{x^6}{6} + 4\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^2}{2} + x + c = \\ &= \frac{2}{6}x^6 + \frac{4}{4}x^4 - 2\frac{2}{2}x^2 + x + c = \frac{1}{3}x^6 + x^4 - x^2 + x + c\ . \end{aligned}$$

6.5 - Aplicação: velocidade e posição

Em movimentos retilíneos, isto é, movimentos que ocorrem em somente uma dimensão, sabemos que a velocidade de um corpo é dado pela derivada da sua função deslocamento com relação ao tempo, isto é,

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}\ .$$

Portanto, a função deslocamento é a função cuja derivada é a velocidade $v(t)$. Observando isto, podemos inferir que a função $x(t)$ é uma primitiva da função $v(t)$. Em Física, a funç ao podição é definida como sendo a integral de $v(t)$ mediante condições de contorno apropriadas:

$$x(t) = \int v(t)\,dt\ +\ \text{condições de contorno},$$

onde essas condições de contorno aparecem sob a forma da determinação da posição do corpo em um certo instante de tempo. Vejamos alguns exemplos.

Ex.1: um automóvel move-se a uma velocidade constante de 80 km/h, tendo saído de uma distância de 2 km da origem. Escreva a equação de movimento desse carro.

Solução: a velocidade é constante e de 80 km/h, de modo que $v(t) = 80\ km/h$. Usando a fórmula para a obtenção da função posição, temos
$$x(t) = \int v(t)\,dt \Rightarrow x(t) = \int 80t\,dt \Rightarrow x(t) = 80t + c\ ,$$

onde c é uma constante que será determinada pela condição de contorno. Essa condição é dada pela informação segundo a qual o automóvel saiu a uma distância de 2 km da origem, o que significa que $x(0) = 2\ km$. Aplicando essa condição à fórmula para a função posição, temos

$$x(0) = 2 \Rightarrow 80.0 + c = 2 \Rightarrow c = 2\ .$$

Portanto, a condição de contorno determina o valor da constante c e a equação de movimento do carro é

$$x(t) = 80t + 2\ .$$

Ex.2: uma locomotiva acelera de uma distância de 3 km da origem a uma velocidade que obedece à equação $v(t) = 30 + 10t$. Escreva a equação de movimento dessa locomotiva.

Solução: temos
$$x(t) = \int v(t)\,dt \Rightarrow x(t) = \int (30 + 10t)\,dt \Rightarrow x(t) = 30t + 10\frac{t^2}{2} + c = 30t + 5t^2 + c\ ,$$

onde c é uma constante que será determinada pela condição de contorno. Essa condição é dada por $s(0) = 3\ km$. Aplicando essa condição à fórmula para a função posição, temos

$$x(0) = 3 \Rightarrow 30.0 + 5.0^2 + c = 3 \Rightarrow c = 3\ .$$

Portanto, a equação de movimento da locomotiva é

$$x(t) = 30t + 5t^2 + 3\ .$$

O exemplo 1 visto aqui é um caso de movimento retilíneo uniforme, enquanto o exemplo 2 é um caso de movimento retilíneo uniformemente variado. Como nos exemplos vistos, é possível recuperar as equações de movimento a partir das equações das velocidades, mediante condições de contorno apropriadas.

No movimento retilíneo uniforme, a equação da velocidade é simplesmente uma constante: $v(t) = v$, $v \in I\!R$. A equação de movimento é dada por

$$x(t) = \int v(t)\, dt \Rightarrow x(t) = \int v\, dt \Rightarrow x(t) = vt + c\ .$$

A condição de contorno é dada pelo conhecimento da posição do corpo no instante $t = 0$ (em qualquer unidade). Se essa posição é dada por x_0, temos

$$x(0) = x_0 \Rightarrow v.0 + c = x_0 \Rightarrow c = x_0\ .$$

Ficamos, então, com a função

$$x(t) = vt + x_0 \Rightarrow x(t) = x_0 + vt\ ,$$

que é a equação de movimento de um corpo em movimento retilíneo uniforme.

No caso do movimento retilíneo uniformemente variado, a aceleração é uma constante, isto é, $a(t) = a$, $a \in I\!R$. Como a aceleração é a derivada da velocidade com relação o tempo, temos que

$$v(t) = \int a(t)\, dt \Rightarrow v(t) = \int\ dt \Rightarrow v(t) = at + c\ ,$$

onde c é dado por uma condição de contorno apropriada. Considerando que no instante $t = 0$ a velocidade é dada por v_0, temos, então,

$$v(0) = v_0 \Rightarrow a.0 + c = v_0 \Rightarrow c = v_0\ ,$$

de modo que

$$v(t) = at + v_0 \Rightarrow v(t) = v_0 + at\ .$$

A funç ao posição pode ser obtida a partir da integração dessa função:

$$x(t) = \int v(t)\, dt \Rightarrow x(t) = \int (v_0 + at)\, dt \Rightarrow x(t) = v_0 t + a\frac{t^2}{2} + c \Rightarrow x(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 + c\ .$$

Aplicando a condição de contorno $x(0) = x_0$, temos

$$x(0) = x_0 \Rightarrow v_0.0 + \frac{1}{2}a.0^2 + c = x_0 \Rightarrow c = x_0\ .$$

Portanto, temos para a equação de movimento

$$x(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 + x_0 \Rightarrow x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2\ ,$$

que é equação de movimento usada para o movimento retilíneo uniformemente variado.

A obtenção da equaç ao da velocidade a partir da equação da aceleração e da equação de movimento a partir da equação da velocidade por meio de integrais não está restrita a esses dois tipos de movimento. A técnica pode ser aplicada para qualquer tipo de movimento retilíneo.

Em Física, integrais estão constantemente acompanhadas de condições de contorno que determinam os valores das constantes arbitrárias que as acompanham.