5 - Limites e derivadas de combinações lineares de funções

Neste capítulo, iremos nos concentrar no estudo de limites e derivadas de funções obtidas a partir das operações lineares de funções, que são a soma de duas funções ou o produto de uma função por um número real. Também introduziremos o conceito de derivadas de ordens superiores. As funções que vamos usar neste capítulo são somente as funções constantes ou de potências naturais, vistas no capítulo 3.

5.1 - Combinações lineares de funções

Nesta seção, introduziremos combinações lineares de funções, que são obtidas pela soma de funções e pelo produto de funções por números reais. Apesar de mostrarmos os gráficos de algmas funções assim obtidas, nossa preocupação maior será com os aspectos algébricos destas. No capítulo 9 serão mostradas técnicas que utilizam derivadas para auxiliar no desenho dessas funções.

a) Soma de funções

A soma de duas funções é uma função e o domínio desta é dado pela intersecção entre os domínios das funções das quais ela é a soma. Isto é expresso na definição a seguir.

D1 - Dadas duas funções, $f(x)$ e $g(x)$, a *soma* dessas funções é dada por $h(x) = f(x) + g(x)$ para todo $x \in D(f) \cap D(g)$.

A seguir, apresentaremos algumas funções que são somas de outras.

Ex.1: calcule a soma das funções $f(x) = x$ e $g(x) = x^3$.

Solução: $h(x) = f(x) + g(x) = x + x^3$.

Ex.2: calcule a soma das funções $f(x) = 1$ e $g(x) = x^2$.

Solução: $h(x) = f(x) + g(x) = 1 + x^2$.

A soma de funções apresenta as seguintes propriedades:

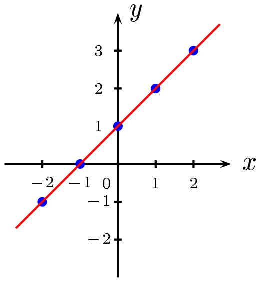
P1) $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$, $x \in D(f) \cap D(g)$ (comutativa).
P2) $f(x) + [g(x) + h(x)] = [f(x) + g(x)] + h(x)$, $x \in D(f) \cap D(g) \cap D(h)$ (associativa).
P3) Existe uma função $o(x) = 0$ tal que $f(x) + o(x) = f(x)$ (existência do elemento neutro).
P4) Para toda $f(x)$ existe uma função $-f(x)$ tal que $f(x) + [-f(x)] = o(x) = 0$ (elemento inverso).

Algumas funções que podem ser obtidas mediante a soma das funções já vistas por nós são representadas graficamente a seguir.

Ex.3: faça o gráfico da função $f(x) = 1 + x$.

Solução:

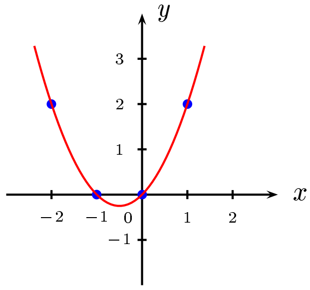
x	$f(x)$
-2	-1
-1	0
0	1
1	2
2	3



Ex.4: faça o gráfico da função $f(x) = x + x^2$.

Solução:

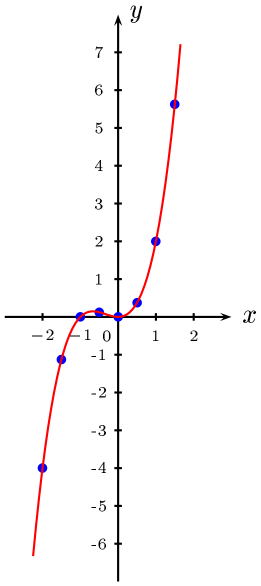
x	$f(x)$
-2	2
-1	0
0	0
1	2
2	6



Ex.5: faça o gráfico da função $f(x) = x^2 + x^3$.

Solução:

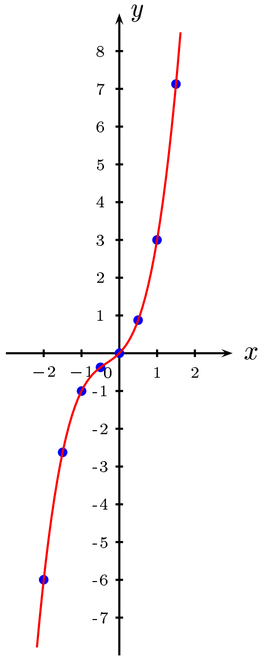
x	$f(x)$
-2	-4
$-1,5$	$-1,125$
-1	0
$-0,5$	$0,125$
0	0
$0,5$	$0,375$
1	2
$1,5$	$5,625$
2	12



Ex.6: faça o gráfico da função $f(x) = x + x^2 + x^3$.

Solução:

x	$f(x)$
-2	-6
$-1,5$	$-2,625$
-1	-1
$-0,5$	-0.375
0	0
$0,5$	$0,875$
1	3
$1,5$	$7,125$
2	14



b) Produto de uma função por um número real

A outra operação linear com funções é o produto de uma função por um número real, definido a seguir.

D2 - Dada uma função $f(x)$ e um número $k \in I\!R$, o produto dessa função pelo número real k é dado por $p(x) = k.f(x)$, onde $x \in D(f)$.

A seguir, apresentaremos algumas funções que são obtidas mediante o produto de uma outra função por um número real.

Ex.1: calcule o produto da função $f(x) = x$ por $k = 3$.

Solução: $p(x) = 3.f(x) = 3x$.

Ex.2: calcule o produto da função $f(x) = x^2$ por $k = -2$.

Solução: $p(x) = -2.f(x) = -2x^2$.

O produto de uma função por um número real apresenta as seguintes propriedades:

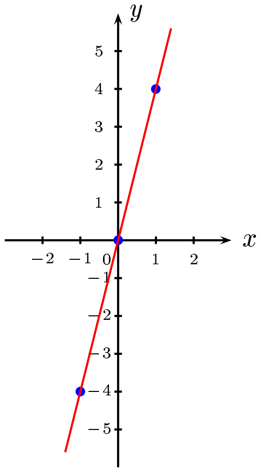
P1) $k.f(x) = f(x).k$, $x \in D(f)$, $k \in I\!R$ (comutativa).
P2) $k.[m.f(x)] = (k.m).f(x)$, $x \in D(f)$, $k \in I\!R$, $m \in I\!R$ (associativa).
P3) Existe um número $k = 1$ tal que $k.f(x) = f(x)$ (existência do elemento neutro).
P4) Para toda $k \in I\!R$, $k \neq 0$, existe um número $\frac{1}{k} \in I\!R$ tal que $\frac{1}{k}[k.f(x)] = f(x)$ (elemento inverso).

Algumas funções que podem ser obtidas mediante o produto das funções já vistas por números reais são representadas graficamente a seguir.

Ex.3: faça o gráfico da função $f(x) = 4x$.

Solução:

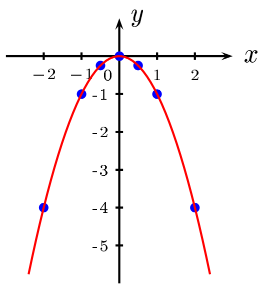
x	$f(x)$
-2	-8
-1	-4
0	1
1	4
2	8



Ex.4: faça o gráfico da função $f(x) = -x^2$.

Solução:

x	$f(x)$
-2	-4
-1	-1
0	0
1	-1
2	-4



c) Combinações lineares de funções

Podemos utilizar as duas operações lineares conjuntamente para gerar outras funções. A isto chama-se fazer uma *combinação linear* entre duas funções.

> **D3 -** Uma *combinação linear* de duas funções $f(x)$ e $g(x)$ é qualquer função dada por $h(x) = af(x) + bf(x)$, onde a e b são constantes reais.

Também pode ser feita a combinação linear de funções resultantes de outras combinações lineares de modo a combinar linearmente diversas funções.

> **D4 -** Uma *combinação linear* de n funções $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ é qualquer função do tipo $h(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x)$, onde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são números reais.

Combinações lineares de funções constantes ou funções de potências naturais (com exceção de $f(x) = x^0$) resultam nas chamadas *funções polinomiais*, definidas abaixo.

> **D5 -** Uma *função polinomial* é uma função do tipo $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$, onde $c_0, c_1, \ldots, c_n$ são números reais e n é um número natural diferente de zero.

Ex.1: calcule $h(x) = 2f(x) - g(x)$, onde $f(x) = x$ e $g(x) = x^3$.

Solução: $h(x) = 2.f(x) - 1.g(x) = 2x - x^3$.

Ex.2: calcule $p(x) = 3f(x) + \sqrt{2}g(x)$, onde $f(x) = x^2$ e $g(x) = 4$.

Solução: $h(x) = 3.f(x) + \sqrt{2}.g(x) = 3x^2 + 4\sqrt{2}$.

As duas operações lineares sobre funções apresentam a seguinte propriedade mista:

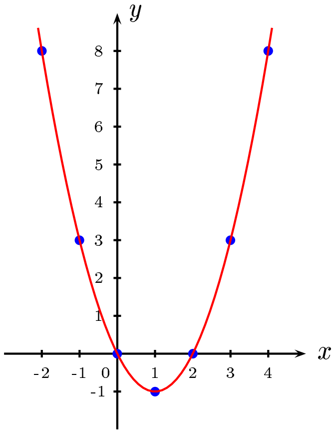
P1) $k.[f(x) + g(x)] = k.f(x) + k.g(x)$, $x \in D(f) \cap D(g)$, $k \in \mathbb{R}$ (distributiva).

A seguir, damos alguns exemplos de gráficos de funções polinomiais.

Ex.3: faça o gráfico da função $f(x) = x^2 - 2x$.

Solução:

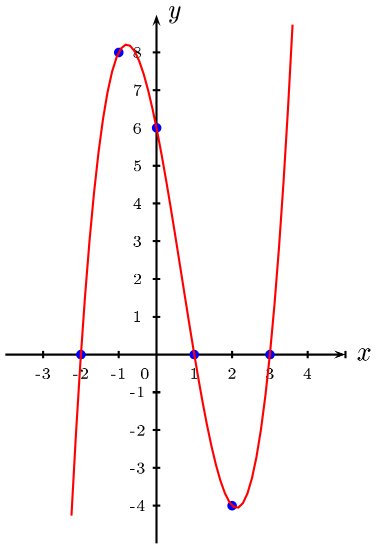
x	$f(x)$
-2	8
-1	3
0	0
1	-1
2	0
3	3
4	8



Ex.4: faça o gráfico da função $f(x) = 6 - 5x - 2x^2 + x^3$.

Solução:

x	$f(x)$
-2	0
-1	8
0	6
1	0
2	-4
3	0
4	18



5.2 - Limites

Agora veremos como ficam os limites de funções resultantes de combinações lineares de outras funções.

a) Limite da soma de duas funções

Se considerarmos a soma de duas funções, $h(x) = f(x) + g(x)$, o limite dessa soma quando $x \to a$ será a soma dos limites das duas funções, isto é, o limite da soma é igual à soma dos limites. Essa regra é expressa no teorema abaixo, que é demonstrado na Leitura Complementar deste capítulo.

T1 - Dadas duas funções $f(x)$ e $g(x)$, temos $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$ quando ambos os limites existirem.

Alguns exemplos são apresentados a seguir.

Ex.1: calcule $\lim\limits_{x\to 2} (x + x^2)$.

Solução: $\lim\limits_{x\to 2} (x + x^2) = \lim\limits_{x\to 2} x + \lim\limits_{x\to 2} x^2 = 2 + 2^2 = 2 + 4 = 6$.

Ex.2: calcule $\lim_{x\to 0} (3+x^3)$.

Solução: $\lim_{x\to 0} (3+x^3) = \lim_{x\to 0} 3 + \lim_{x\to 0} x^3 = 3+0^3 = 3+0 = 3.$

Ex.3: calcule $\lim_{x\to \infty} (x^2+2)$.

Solução: $\lim_{x\to \infty} (x^2+2) = \lim_{x\to \infty} x^2 + \lim_{x\to \infty} 2 = \infty^2+2 = \infty+2 = \infty.$

b) Limite do produto de uma função por um número real

O limite do produto de uma função por um número real é dado pelo produto do limite da função pelo número real. Essa regra é expressa no teorema abaixo, que também é demonstrado na Leitura Complementar deste capítulo.

> **T2 -** Dada uma função $f(x)$ e um número $k \in I\!R$, temos $\lim_{x\to a} [k.f(x)] = k \lim_{x\to a} f(x)$ quando o limite existir.

A seguir, alguns exemplos.

Ex.1: calcule $\lim_{x\to 3} (4x^2)$.

Solução: $\lim_{x\to 3} (4x^2) = 4 \lim_{x\to 3} x^2 = 4.3^2 = 4.9 = 36.$

Ex.2: calcule $\lim_{x\to -1} (-x^4)$.

Solução: $\lim_{x\to -1} (-x^4) = -1. \lim_{x\to -1} x^4 = -1.(-1)^4 = -1.1 = -1.$

Ex.3: calcule $\lim_{x\to -\infty} (3x^3)$.

Solução: $\lim_{x\to -\infty} (3x^3) = 3 \lim_{x\to -\infty} x^3 = 3.(-\infty)^3 = 3.(-\infty) = -\infty.$

c) Limite de uma combinação linear de funções

Podemos dizer que o limite da combinação linear de funções é a combinação linear dos limites, conforme explicitado no teorema a seguir.

> **T3 -** O limite de uma combinação linear $h(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x)$ quando $x \to a$ é dado por $\lim_{x\to a} h(x) = c_1 \lim_{x\to a} f_1(x) + c_2 \lim_{x\to a} f_2(x) + \cdots + c_n \lim_{x\to a} f_n(x)$ quando os limites existirem.

Demonstração: tomemos uma certa combinação linear $h(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x)$ de funções cujos limites são definidos em $x \to a$. Temos que

$$\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x)] \ .$$

Usando o teorema T1, temos que

$$\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} [c_1 f_1(x)] + \lim_{x\to a} [c_2 f_2(x)] + \cdots + \lim_{x\to a} [c_n f_n(x)] \ .$$

Aplicando agora o teorema T2, ficamos com

$$\lim_{x\to a} h(x) = c_1 \lim_{x\to a} f_1(x) + c_2 \lim_{x\to a} f_2(x) + \cdots + c_n \lim_{x\to a} f_n(x) \ ,$$

o que prova o teorema.

A seguir, mostramos alguns exemplos com funções polinomiais.

Ex.1: calcule $\lim_{x\to 2} (2x+3x^2)$.

Solução: $\lim_{x\to 2} (2x+3x^2) = 2 \lim_{x\to 2} x + 3 \lim_{x\to 2} x^2 = 2.2 + 3.2^2 = 4 + 3.4 = 4 + 12 = 16.$

Ex.2: calcule $\lim_{x\to -3} (2-x+4x^3)$.

Solução: $\lim_{x\to -3} (2-x+4x^3) = \lim_{x\to -3} 2 - 1. \lim_{x\to -3} x + 4 \lim_{x\to -3} x^3 = 2-1(-3)+4(-3)^3 = 2+3+4(-27) = 5-108 = -103.$

Como foi visto nos teoremas T1 e T2 do capítulo 3, $\lim_{x\to a} x^n = a^n$ para qualquer $x \to a$ e $n \in I\!N$, $n \neq 0$, e $\lim_{x\to a} c = c$, onde c é qualquer constante real. Aplicando esta regra ao teorema T3 deste capí tulo, temos que para qualquer função polinomial $h(x)$ vale o seguinte teorema.

T4 - O limite de uma função polinomial $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$, $n \in I\!N_*$, quando $x \to a$ é dado por $\lim_{x\to a} f(x) = c_0 + c_1a + c_2a^2 + \cdots + c_na^n$, ou seja, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Demonstração: tomemos uma função polinomial $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$. Pelo teorema T3, o limite desta função quando $x \to a$ é dado por

$$\lim_{x\to a} f(x) = c_0 \lim_{x\to a} 1 + c_1 \lim_{x\to a} x + c_2 \lim_{x\to a} x^2 + \cdots + c_n \lim_{x\to a} x^n \ .$$

Usando o teorema T1 do capítulo 3, segundo o qual $\lim_{x\to a} x^n = a^n$, $n \in I\!N_*$, e o teorema T2 do capítulo 3, segundo o qual $\lim_{x\to a} c = c$, $c \in I\!R$, temos que

$$\lim_{x\to a} f(x) = c_0 + c_1a + c_2a^2 + \cdots + c_na^n = f(a) \ .$$

Este teorema nos possibilita calcular os limites de funções polinomiais de forma direta, como nos exemplos a seguir.

Ex.3: calcule $\lim_{x\to 4} (1-3x+2x^3-x^3)$.

Solução: $\lim_{x\to 4} (1-3x+2x^3-x^3) = 1 - 3.4 + 2.4^2 - 4^3 = 1 - 12 + 2.16 - 64 = -11 + 32 - 64 = -43.$

Ex.4: calcule $\lim_{x\to -1} (x^3 - 3x^5)$.

Solução: $\lim_{x\to -1} (x^3-3x^5) = (-1)^3 - 3(-1)^5 = -1 - 3(-1) = -1 + 3 = 2.$

Para calcularmos os limites $x \to \infty$ ou $x \to -\infty$, vale a seguinte regra: o limite da função será igual ao limite da maior potência desta. Esta regra é definida no teorema a seguir.

T5 - O limite de uma função polinomial $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$, $n \in I\!N_*$, quando $x \to \infty$ é dado por $\lim_{x\to\infty} c_nx^n$. O limite desta mesma função quando $x \to -\infty$ é dado por $\lim_{x\to -\infty} c_nx^n$.

Demonstração: tomemos uma função polinomial $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{n-1}x^{n-1} + c_nx^n$. Temos, então,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \left(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{n-1}x^{n-1} + c_nx^n\right) .$$

Pondo em evidência a potência maior, temos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^n \left(\frac{c_0}{x^n} + \frac{c_1}{x^{n-1}} + \frac{c_2}{x^{n-2}} + \cdots + \frac{c_{n-1}}{x} + c_n\right) .$$

Usando oteorema T4 do capítulo 3, podemos separar esse limite no produto de dois outros:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^n \cdot \lim_{x\to\infty} \left(\frac{c_0}{x^n} + \frac{c_1}{x^{n-1}} + \frac{c_2}{x^{n-2}} + \cdots + \frac{c_{n-1}}{x} + c_n\right) .$$

Calculando o segundo limite, ficamos com

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} x^n \cdot \left(\frac{c_0}{\infty^n} + \frac{c_1}{\infty^{n-1}} + \frac{c_2}{\infty^{n-2}} + \cdots + \frac{c_{n-1}}{\infty} + c_n\right) = \\ &= \lim_{x\to\infty} x^n \cdot \left(\frac{c_0}{\infty} + \frac{c_1}{\infty} + \frac{c_2}{\infty} + \cdots + \frac{c_{n-1}}{\infty} + c_n\right) .\end{aligned}$$

Como para qualquer $c \in I\!R_*$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{c}{x} = 0$ (ver observação abaixo), temos que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^n \cdot (0 + 0 + 0 + \cdots + 0 + c_n) = \lim_{x\to\infty} c_nx^n .$$

Para o limite $x \to -\infty$, temos o seguinte:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \left(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{n-1}x^{n-1} + c_nx^n\right) .$$

Pondo em evidência a potência maior, temos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} x^n \left(\frac{c_0}{x^n} + \frac{c_1}{x^{n-1}} + \frac{c_2}{x^{n-2}} + \cdots + \frac{c_{n-1}}{x} + c_n\right) = \\ &= \lim_{x\to-\infty} x^n \cdot \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{c_0}{x^n} + \frac{c_1}{x^{n-1}} + \frac{c_2}{x^{n-2}} + \cdots + \frac{c_{n-1}}{x} + c_n\right) .\end{aligned}$$

Calculand o segundo limite, ficamos com

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^n \cdot \left[\frac{c_0}{(-\infty)^n} + \frac{c_1}{(-\infty)^{n-1}} + \frac{c_2}{(-\infty)^{n-2}} + \cdots + \frac{c_{n-1}}{(-\infty)} + c_n\right] .$$

No caso de n ser par, temos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} x^n \cdot \left(\frac{c_0}{\infty} + \frac{c_1}{-\infty} + \frac{c_2}{\infty} + \cdots + \frac{c_{n-1}}{-\infty} + c_n\right) = \lim_{x\to-\infty} x^n \cdot (0 + 0 + 0 + \cdots + 0 + c_n) = \\ &= \lim_{x\to-\infty} c_nx^n .\end{aligned}$$

No caso de n ser ímpar, ficamos com

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} x^n \cdot \left(\frac{c_0}{-\infty} + \frac{c_1}{\infty} + \frac{c_2}{-\infty} + \cdots + \frac{c_{n-1}}{\infty} + c_n\right) = \lim_{x\to-\infty} x^n \cdot (0 + 0 + 0 + \cdots + 0 + c_n) = \\ &= \lim_{x\to-\infty} c_nx^n .\end{aligned}$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} c_nx^n$, resultado que independente de n ser par ou ímpar.

Obs.: para demonstrarmos o teorema acima, assumimos como verdadeiro que, para qualquer $c \in I\!R$, temos $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{c}{x} = 0$. Isto será deduzido intuitivamente no capítulo 11 e demonstrado na Leitura Complementar daquele capítulo.

O teorema T5 é usado nos exemplos seguintes.

Ex.5: calcule $\lim_{x\to\infty}(2x^2+4x-8)$.

Solução: $\lim_{x\to\infty}(2x^2+4x-8)=\lim_{x\to\infty}2x^2=2\lim_{x\to\infty}x^2=2.\infty=\infty$.

Ex.6: calcule $\lim_{x\to\infty}(1+x+3x^2-2x^3)$.

Solução: $\lim_{x\to\infty}(1+x+3x^2-2x^3)=\lim_{x\to\infty}(-2x^3)=-2\lim_{x\to\infty}x^3=-2.\infty=-\infty$.

Ex.7: calcule $\lim_{x\to-\infty}(3x^2-4x)$.

Solução: $\lim_{x\to-\infty}(3x^2-4x)=\lim_{x\to-\infty}3x^2=3\lim_{x\to-\infty}x^2=2.(-\infty)^2=3.\infty=\infty$.

5.3 - Derivadas

Agora estudaremos as regras para a derivação de funções resultantes de combinações lineares de outras funções.

a) Derivada da soma de duas funções

Se considerarmos a soma de duas funções, $h(x)=f(x)+g(x)$, a derivada dessa soma será a soma das derivadas das duas funções, isto é, a derivada da soma é igual à soma das derivadas. Essa regra é expressa no teorema abaixo.

T6 - Dadas duas funções $f(x)$ e $g(x)$, temos $\dfrac{d}{dx}[f(x)+g(x)]=\dfrac{df(x)}{dx}+\dfrac{dg(x)}{dx}$.

Em termos da notação de Newton,

$$\boxed{(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)\ .}$$

Demonstração: usando a definição de derivada, temos

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)]=\lim_{\Delta x\to0}\frac{[f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)]-[f(x)+g(x)]}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)-f(x)-g(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{[f(x+\Delta x)-f(x)]+[g(x+\Delta x)-g(x)]}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right]\ .$$

De acordo com o teorema T1 para o limite da soma de duas funções, isto significa

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)]=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=\frac{df(x)}{dx}+\frac{dg(x)}{dx}\ .$$

Alguns exemplos são apresentados a seguir.

Ex.1: calcule a derivada da função $f(x)=x+x^2$.

Solução: $\frac{df(x)}{dx}=\frac{d}{dx}(x+x^2)=\frac{dx}{dx}+\frac{dx^2}{dx}=1+2x$.

Ex.2: calcule a derivada da função $g(x) = 3 + x^3$.

Solução: $\frac{dg(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(3 + x^3) = \frac{d3}{dx} + \frac{dx^3}{dx} = 0 + 3x^2 = 3x^2$.

Essas derivadas podem ser feitas de forma mais direta, como no exemplo seguinte (onde usamos a notação de Newton).

Ex.3: calcule a derivada da função $h(x) = 2 + x^2 + x^4$.

Solução: $h'(x) = 0 + 2x + 4x^3 = 2x + 4x^3$.

b) Derivada do produto de uma função por um número real

A derivada do produto de uma função por um número real é dada pelo produto da derivada da função pelo número real. Essa regra é expressa no teorema abaixo.

T7 - Dada uma função $f(x)$ e um número $k \in I\!R$, temos $\frac{d}{dx}[k.f(x)] = k\frac{df(x)}{dx}$.

Em notação de Newton,

$$\boxed{[k.f(x)]' = kf'(x)\ .}$$

Demonstração: usando a definição de derivada, temos

$$\frac{d}{dx}[k.f(x)] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k.f(x + \Delta x) - k.f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k[f(x + \Delta x) - f(x)]}{\Delta x}\ .$$

De acordo com o teorema T2 para o limite do produto de uma função por um número real, isto significa

$$\frac{d}{dx}[k.f(x)] = k \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = k\frac{df(x)}{dx}\ .$$

A seguir, temos alguns exemplos.

Ex.1: calcule a derivada da função $f(x) = 4x^2$.

Solução: $\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(4x^2) = 4\frac{dx^2}{dx}4.2x = 8x$.

Ex.2: calcule a derivada da função $g(x) = -3x^3$.

Solução: $\frac{dg(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(-3x^3) = -3\frac{dx^3}{dx} = -3.3x^2 = -9x^2$.

O próximo exemplo utiliza a notação de Newton.

Ex.3: calcule a derivada da função $h(x) = 2x^4$.

Solução: $h'(x) = 2.4x^3 = 8x^3$.

c) Derivada de uma combinação linear de funções

A derivada da combinação linear de funções é a combinação linear das derivadas destas, conforme explicitado no teorema a seguir.

T8 - A derivada de uma combinação linear $h(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x)$ é dada por $\frac{dh(x)}{dx} = c_1 \frac{df_1(x)}{dx} + c_2 \frac{df_2(x)}{dx} + \cdots + c_n \frac{df_n(x)}{dx}$ para qualquer $x \in I$, onde I é um intervalo onde todas as funções componentes têm derivadas.

Demonstração: tomemos uma certa combinação linear $h(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x)$ de funções cujas derivadas sejam definidas em um certo intervalo I. Temos que

$$\frac{dh(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x)\right] \ .$$

Usando o teorema T6, temos que

$$\frac{dh(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[c_1 f_1(x)\right] + \frac{d}{dx}\left[c_2 f_2(x)\right] + \cdots + \frac{d}{dx}\left[c_n f_n(x)\right] \ .$$

Aplicando agora o teorema T7, ficamos com

$$\frac{dh(x)}{dx} = c_1 \frac{df_1(x)}{dx} + c_2 \frac{df_2(x)}{dx} + \cdots + c_n \frac{df_n(x)}{dx} \ ,$$

o que prova o teorema.

A seguir, mostramos alguns exemplos com derivadas de funções polinomiais.

Ex.1: calcule a derivada da função $f(x) = 2x + 3x^2$.

Solução: $\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(2x + 3x^2) = 2\frac{dx}{dx} + 3\frac{dx^2}{dx} = 2.1 + 3.2x = 2 + 6x$.

Ex.2: calcule a derivada da função $g(x) = 3 - x^2 + 2x^4$.

Solução: $\frac{dg(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(3 - x^2 + 2x^4) = \frac{d3}{dx} - \frac{dx^2}{dx} + 2\frac{dx^4}{dx} = 0 - 2x + 2.4x^3 = -2x + 8x^3$.

Podemos fazer essas derivadas de forma mais direta, como nos exemplos a seguir.

Ex.3: calcule a derivada da função $h(x) = 2 + 3x - 5x^2$.

Solução: $h'(x) = 0 + 3.1 - 5.2x = 3 - 10x$.

Ex.4: calcule a derivada da função $m(x) = x^3 - 3x$.

Solução: $m'(x) = 3x^2 - 3.1 = 3x^2 - 3$.

Ex.5: calcule a derivada da função $n(x) = 2x^5 + 4x^3 - 2x + 1$.

Solução: $n'(x) = 2.5x^4 + 4.3x^2 - 2.1 + 0 = 10x^4 + 12x^2 - 2$.

5.4 - Derivadas de ordens superiores

Como já foi dito antes, a derivada de uma função também é ma função e portanto pode ser derivada. Chamamos a derivada de uma derivada de *derivada de ordem 2* ou *derivada segunda*. Ela é definida como

$$\boxed{\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{df(x)}{dx} \ ,}$$

onde $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ é o símbolo usado para indicá-la na notação de Leibniz. Em termos da notação de Newton, escrevemos

$$\boxed{f''(x) = \left[f'(x)\right]' \ .}$$

Note que a relação entre as duas notações é $\frac{d^2f(x)}{dx^2} = f''(x)$.

É interessante notar que, para calcular a derivada segunda de uma função, é necessário calcular antes a sua derivada primeira. Isto é ilustrado nos próximos exemplos.

Ex.1: calcule a derivada segunda da função $f(x) = x^2$.

Solução: primeiro, calculamos a derivada da função: $f'(x) = 2x$.

Agora, calculamos a derivada segunda: $f''(x) = 2.1 \Rightarrow f''(x) = 2$.

Ex.2: calcule a derivada segunda da função $f(x) = x^5$.

Solução: $f'(x) = 5x^4$,

$f''(x) = 5.4x^3 \Rightarrow f''(x) = 20x^3$.

Ex.3: calcule a derivada segunda da função $f(x) = 3 + 2x - x^3$.

Solução: $f'(x) = 0 + 2.1 - 3x^2 = 2 - 3x^2$,

$f''(x) = 0 - 3.2x \Rightarrow f''(x) = -6x$.

Ex.4: calcule a derivada segunda da função $f(x) = x^2 - 4x^5$.

Solução: $f'(x) = 2x - 4.5x^4 = 2x - 20x^4$,

$f''(x) = 2.1 - 20.4x^3 \Rightarrow f''(x) = 2 - 80x^3$.

Do mesmo modo, a derivada segunda de uma função também é uma função e pode ser derivada. Fazendo isto, obtemos a *derivada de ordem 3* ou *derivada terceira*, definida por

$$\boxed{\frac{d^3f(x)}{dx^3} = \frac{d}{dx}\frac{d^2f(x)}{dx^2}}$$

na notação de Leibniz ou

$$\boxed{f'''(x) = \left[f''(x)\right]'}$$

na notação de Newton.

Ex.5: calcule a derivada segunda da função $f(x) = 3 + x^2 - 3x^4$.

Solução: $f'(x) = 0 + 2x - 3.4x^3 = 2x - 12x^3$,

$f''(x) = 2.1 - 12.3x^2 \Rightarrow f''(x) = 2 - 26x^2$,

$f'''(x) = 0 - 16.2x \Longrightarrow f'''(x) = -32x$.

De modo semelhante, podemos definir derivadas de ordens cada vez maiores. A *derivada de ordem n* ou *derivada enésima* de ma função é definida como

$$\boxed{\frac{d^nf(x)}{dx^n} = \frac{d}{dx}\frac{d^{n-1}f(x)}{dx^{n-1}}}$$

na notação de Leibniz ou

$$\boxed{f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'}$$

na notação de Newton. Note que a notação de Newton muda para derivadas de ordens maiores que três. O motivo é a inconveniência de escrever a notação anterior quando o número de linhas se torna muito grande. A seguir, veremos alguns exemplos de derivadas de diversas ordens.

Ex.6: calcule a derivada de quarta ordem da função $f(x) = x^4$.

Solução: $f'(x) = 4x^3$,

$f''(x) = 4.3x^2 \Rightarrow f''(x) = 12x^2$,

$f'''(x) = 12.2x \Longrightarrow f'''(x) = 24x$,

$f^{(4)}(x) = 24.1 \Rightarrow f^{(4)}(x) = 24$.

Ex.7: calcule a derivada de sétima ordem da função $f(x) = 3 - 2x + x^2 + 4x^3 - 2x^5$.

Solução: $f'(x) = 4x^3$,

$f''(x) = 0 - 2.1 + 2x + 4.3x^2 - 2.5x^4 \Rightarrow f''(x) = -2 + 2x + 12x^2 - 10x^4$,

$f'''(x) = 0 + 2.1 + 12.2x - 10.4x^3 \Longrightarrow f'''(x) = 2 + 24x - 40x^3$,

$f^{(4)}(x) = 0 + 24.1 - 40.3x^2 \Rightarrow f^{(4)}(x) = 24 - 120x^2$,

$f^{(5)}(x) = 0 - 120.2x \Rightarrow f^{(5)}(x) = -240x$,

$f^{(6)}(x) = -240.1 \Rightarrow f^{(6)}(x) = -240$,

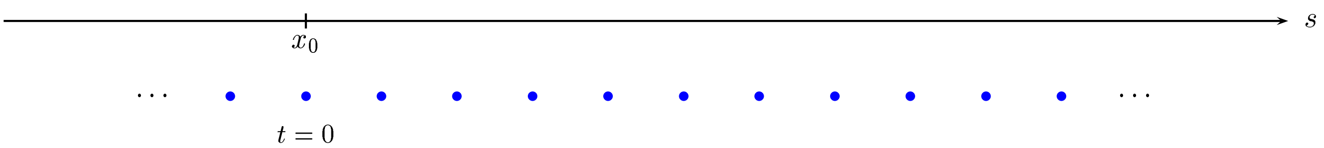
$f^{(7)}(x) = 0$.

É importante frisar que nem sempre uma função que tem derivada primeira terá uma derivada segunda ou outra derivada de ordem superior. Exemplos de casos em que isto acontece serão dados em capítulos vindouros.

5.5 - Aplicação: cinemática em uma dimensão

Para ilustrar o uso dederivadas primeira e segunda de polinômios vamos estudar brevemente o caso de movimento retilíneo. Como foi visto no capítulo 3 (seção 3.6), trata-se do movimento de um corpo em linha reta. Como a reta só tem uma dimensão também chamamos a esse moviment de unidimensional. Existem diversos tipo de movimento que um corpo pode fazer sobre uma reta, mas aqui nós iremos nos preocupar com apenas dois deles: os chamados *movimento retilíneo uniforme* (MRU) e *movimento retilíneo uniformemente variado* (MRUV). Ambos foram visto em formas bastante simplificadas no capítulo 3. Nossa evolução no estudo das derivadas nos permite agora estudá-los de forma completa.

Consideremos primeiro uma partícula (um corpo muito pequeno) que se move em linha reta de modo a percorrer sempre o mesmo comprimento de espaço no mesmo intervalo de tempo, como indicado na figura abaixo.

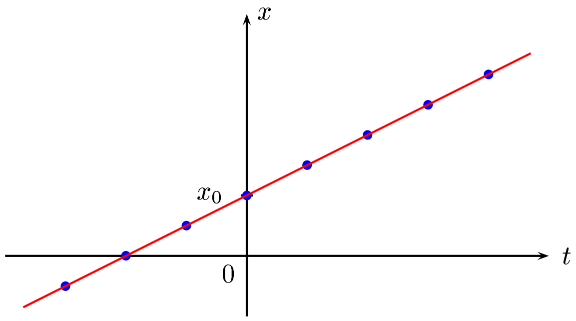


A figura mostra o que poderiam ser fotografias da posição da partícula tiradas a intervalos regulares de tempo. Superposta a esta foto temos uma reta com uma escala onde marcamos o ponto x_0 como sendo a posição do corpo no instante $t = 0$ (em qualquer unidade de tempo que decidamos usar). Se fizermos um gráfico dessas posições e assumirmos um comportamento contínuo e uniforme do movimento, obtemos o seguinte.

O gráfico deste movimento é um reta dada pela equação

$$x = x_0 + mt \ ,$$

onde m mede a inclinação (coeficiente angular) desta. Esta é chamada de *equação de movimento* da partícula, ou *função posição*. Tendo conhecimento dos valores desta fórmula podemos determinar a posição da partícula a qualquer instante de tempo, contanto que esta continue a executar o mesmo tipo de movimento.



A velocidade desta partícula é definida como sendo a derivada da função posição com relação ao tempo:

$$v = \frac{dx}{dt} \ .$$

Aplicando esta derivada à funçã obtida acima (e lembrando que x_0 e m são constantes), obtemos

$$v = \frac{d}{dt}(x_0 + mt) \Rightarrow v = 0 + m.1 \Rightarrow v = m \ .$$

Portanto, o coeficiente angular m é a própria velocidade da partícula, que é constante. Sabendo disto, podemos escrever a equação de movimento como

$$x = x_0 + vt \ ,$$

que é a forma conhecida em Física para o movimento retilíneo uniforme.

Podemos definir uma nova grandeza, chamada *aceleração*, como sendo a variação da velocidade em intervalos infinitesimais de tempo, ou seja, como sendo a derivada da velocidade com relaç ao ao tempo:

$$a = \frac{dv}{dt} \ .$$

Como a velocidade é a derivada da posição cm relação ao tempo, a aceleração pode também ser definida como sendo a derivada segunda da posição com relação ao tempo:

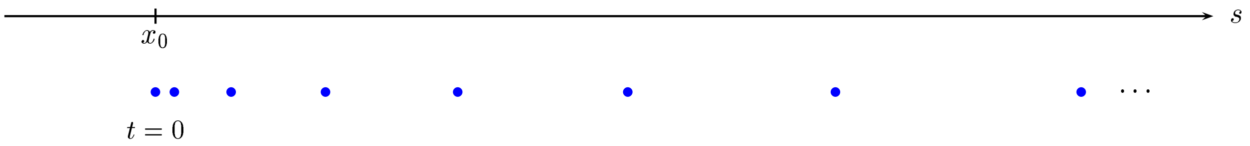
$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \ .$$

Aplicando esta definição à equação de movimento do movimento retilíneo uniforme, obtemos

$$\frac{dx}{dt} = v \quad , \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = 0 \ ,$$

pois v é constante. Portanto, temos que $a = 0$, o que é condizente com o movimento estudado.

Vamos agora considerar uma partícula movendo-se em linha reta da forma descrita pela figura abaixo, onde os pontos podem ser interpretados como fotografias tiradas a intervalos regulares de tempo. O ponto x_0 da escala superposta à figura indica a posição da parti ́ cula no instante $t = 0$.

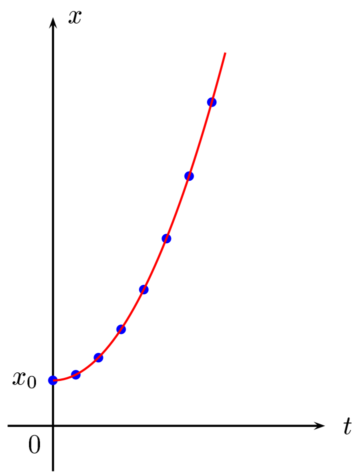


Se fizermos um gáfico deste movimento podemos obter uma curva do tipo representado a seguir.

O gráfico deste movimento é um segmento de parábola, dado pela equação

$$x = x_0 + mt + nt^2 \ ,$$

onde m e n são constantes e $t \geq 0$. Esta é a de *equação de movimento* da partícula, ou *função posição*, que está em movimento retilíneo uniformetmente variado. Também neste caso, tendo conhecimento dos valores desta fórmula podemos determinar a posição da partícula a qualquer instante de tempo, contanto que esta continue a executar o mesmo tipo de movimento.



Vamos agora calcular a velocidade da partícula. Usando a definição de velocidade, temos

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v = \frac{d}{dt}(x_0 + mt + nt^2) \Rightarrow v = 0 + m.1 + 2nt \Rightarrow v = m + 2nt \ .$$

Podemos ver da equação da velocidade que esta agora é variável. Digamos que no instante $t = 0$ a partícula esava a uma velocidade v_0. Isto sgnifica que

$$v_0 = v(0) \Rightarrow v_0 = m + 2n.0 \Rightarrow v_0 = m \ .$$

Portanto, podemos ver que o significado físico da constante m na equação de movimento é da velocidade da partí cula no instante $t = 0$. Podemos escrevê-la agora como

$$x = x_0 + v_0 t + nt^2 \ ,$$

enquanto a função velocidade fica

$$v = v_0 + 2nt \ .$$

Derivando a função velocidade obtemos a aceleração. Fazendo isto, obtemos

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a = 0 + 2n.1 \Rightarrow a = 2n \ ,$$

o que indica que a aceleração é constante. O significado físico da constante n na equação de movimento é de metade da aceleração. Substituindo essa constante nas equações de movimento e da velocidade, obtemos

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad , \quad v = v_0 + at \ .$$

que são as equações do movimento retilíneo uniformemente variado.

O que aprendemos aqui é aplicado no exemplo a seguir.

Ex.1: uma partícula em movimento retilíneo uniformemente variado tem a equação de movimento dada por $x = 2 + 4t + t^2$, onde x é deslocamento medido em metros e t é o tempo medido em segundos. Escreva a equação que descreve a sua velocidade e determine a sua aceleração.

Solução: temos que

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v = \frac{d}{dt}(2 + 4t + t^2) \Rightarrow v = 0 + 4.1 + 2t \Rightarrow v = 4 + 2t \ ,$$

o que determina a função velocidade. A aceleração é determinada por

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a = \frac{d}{dt}(4 + 2t) \Rightarrow a = 0 + 2.1 \Rightarrow a = 2 \ .$$

Nas unidades que estão sendo usadas, temos que $a = 2\ m/s^2$.

Vale lembrar que as definições de veocidade e aceleração como sendo as derivadas primeira e segunda da equaç ao de movimento não estão restritas aos dois tipos de movimento descritos aqui, podendo ser aplicadas a corpos que não têm aceleração constante, como o descrito pelo exemplo a seguir.

Ex.2: escreva as equações que descrevem a velocidade e a aceleração de uma partícula cuja equação de movimento é dada por $x = 3 - 2t + 4t^3$, onde x é a posição da partícula medida em cm e t é o tempo medido em s.
Solução: temos

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v = \frac{d}{dt}(3 - 2t + 4t^3) \Rightarrow v = 0 - 2.1 + 4.3t^2 \Rightarrow v = -2 + 12t^2$$

e

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a = \frac{d}{dt}(-2 + 12t^2) \Rightarrow a = 0 + 12.2t \Rightarrow a = 24t \ .$$

Com isto encerramos este capítulo.