4 - Derivadas

A derivada é uma das peças fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral e é utilizada em um enorme número de aplicações em diversas áreas. A idéia de derivada surgiu pela primeira vez nos estudos do inglês *Isaac Newton* (1.642-1.727) sobre corpos em movimento e do alemão *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1.646-1.717), sobre retas tangentes a curvas. Iniciaremos nossos estudos sobre a derivada enfocando esses dois assuntos.

4.1 - Derivada e velocidade

A *velocidade* é uma medida da variação da posição de um corpo em relação ao tempo. Por exemplo, um objeto parado tem velocidade nula, pois sua posição não varia com o tempo. A *velocidade média* de um corpo pode ser definida como sendo a variação do deslocamento em um certo intervalo de tempo. Mais precisamente, podemos escrevê-la como

$$\boxed{v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t},}$$

onde Δx é a variação na posição que ocorre em um intervalo Δt de tempo.

Ex.1: um carro está a 15 m de sua origem no instante $t = 10\ s$ e a 60 m da origem no instante $t = 30\ s$. Qual a velocidade média do carro entre esses dois instantes?

Solução: temos que, no instante $t_1 = 10\ s$, o carro estava em $x_1 = 15\ m$. No instante $t_2 = 30\ s$, ele estava em $x_2 = 60\ m$. Portanto,

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 60\ m - 15\ m = 45\ m, \qquad \Delta t = t_2 - t_1 = 30\ s - 10\ s = 20\ s.$$

A velocidade média entre esses dois instantes de tempo é, então, dada por

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{45\ m}{20\ s} = 22,5\ m/s.$$

Ex.2: um trem parte da estação central de uma cidade às $15:30\ h$ e chega à estação de outra cidade que está situada a 240 km dali às $17:30\ h$. Qual a velocidade média do trem entre essas duas estações?

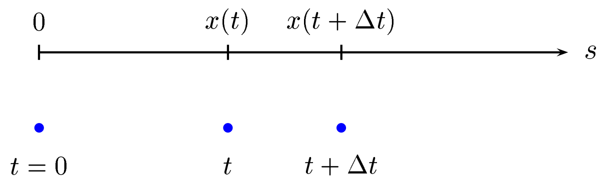
Solução: temos que, no instante $t_1 = 15:30\ h$, o trem estava em $x_1 = 0\ km$. No instante $t_2 = 17:30\ h$, ele estava em $x_2 = 240\ km$. Portanto,

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 240\ km - 0\ km = 240\ km, \qquad \Delta t = t_2 - t_1 = 17:30\ h - 15:30\ h = 2:00\ h.$$

A velocidade média entre esses dois instantes de tempo é, então, dada por

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{240\ km}{2:00\ h} = 100\ km/h.$$

Outra forma de escrevermos a velocidade média pode ser obtida se considerarmos que em um certo instante t o corpo está na posição $x(t)$. Então, após um intervalo Δt, o corpo estará no instante $t + \Delta t$ e na posição $x(t + \Delta t)$:



Portanto, o deslocamento Δx é dado pela diferença entre a posição no instante $t + \Delta t$ e a posição no instante t:

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t).$$

A expressão para a velocidade média fica, então,

$$\boxed{v_m = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}.}$$

Vamos, agora, aplicar esta expressão aos dois exemplos dados na seção 3.6 do capítulo anterior.

Ex.3: calcule as velocidades médias do homem do exemplo 1 da seção 3.6 do capítulo 3 entre os instantes $t = 0s$ e $t = 1s$ e entre os instantes $t = 1s$ e $t = 2s$.

Solução: para resolvermos este problema, calculamos as posições do homem nos dois intervalos de tempo utilizando a função $x(t) = t$ obtida no capítulo anterior.

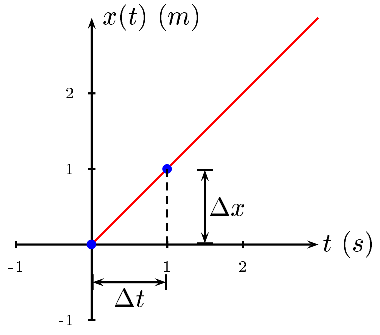
Entre os instantes $t = 0s$ e $t = 1s$, temos:

$$\Delta t = 1s - 0s = 1s.$$

A velocidade média fica

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{x(1) - x(0)}{1s} = \\ &= \frac{1m - 0m}{1s} = \frac{1m}{1s} = 1m/s. \end{aligned}$$

Portanto, a velocidade média entre $t = 0s$ e $t = 1s$ é de $1m/s$.



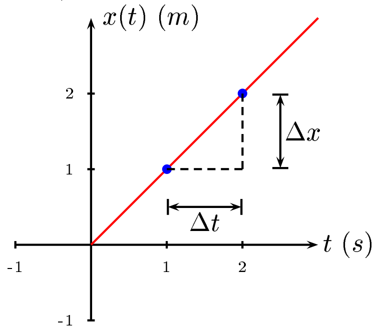
Entre os instantes $t = 1s$ e $t = 2s$, temos:

$$\Delta t = 2s - 1s = 1s.$$

A velocidade média fica

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{x(2) - x(1)}{1s} = \\ &= \frac{2m - 1m}{1s} = \frac{1m}{1s} = 1m/s. \end{aligned}$$

Portanto, a velocidade média entre $t = 1s$ e $t = 2s$ também é de $1m/s$.



Se fizermos o mesmo cálculo entre quaisquer dois instantes de tempo, veremos que a velocidade média continua sendo $v_m = 1m/s$. Dizemos, neste caso, que a velocidade do movimento é constante, o que significa que ela é a mesma em qualquer instante de tempo.

Ex.4: calcule as velocidades médias do automóvel do exemplo 2 da seção 3.6 do capítulo 3 entre os instantes $t = 0s$ e $t = 1s$ e entre os instantes $t = 1s$ e $t = 2s$.

Solução: para resolvermos este problema, calculamos as posições do automóvel nos dois intervalos de tempo utilizando a função $x(t) = t^2$ obtida no capítulo anterior.

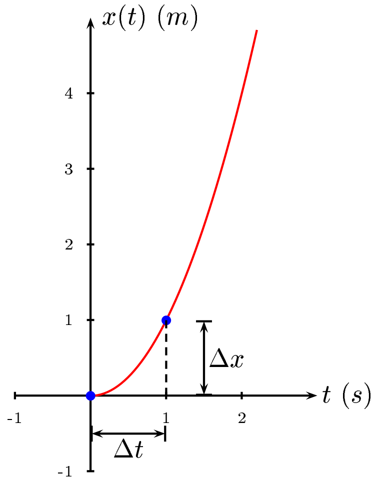
Entre os instantes $t = 0s$ e $t = 1s$, temos:

$$\Delta t = 1s - 0s = 1s.$$

A velocidade média fica

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{x(1) - x(0)}{1s} = \\ &= \frac{1^2 m - 0^2 m}{1s} = \frac{1m - 0m}{1s} = 1m/s. \end{aligned}$$

Portanto, a velocidade média entre $t = 0s$ e $t = 1s$ é de $1m/s$.



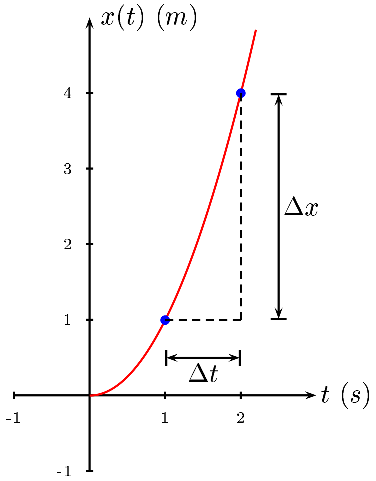
Entre os instantes $t = 1s$ e $t = 2s$, temos:

$$\Delta t = 2s - 1s = 1s.$$

A velocidade média fica

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{x(2) - x(1)}{1s} = \\ &= \frac{2^2 m - 1^2 m}{1s} = \frac{4m - 1m}{1s} = \frac{3m}{1s} = 3m/s. \end{aligned}$$

Portanto, a velocidade média entre $t = 1s$ e $t = 2s$ é de $3m/s$.



Como pudemos ver, a velocidade média entre os instante $t = 1s$ e $t = 2s$ é maior que a velocidade média entre os instantes $t = 0s$ e $t = 1s$. Isso é porque a velocidade, neste movimento, aumenta gradativamente.

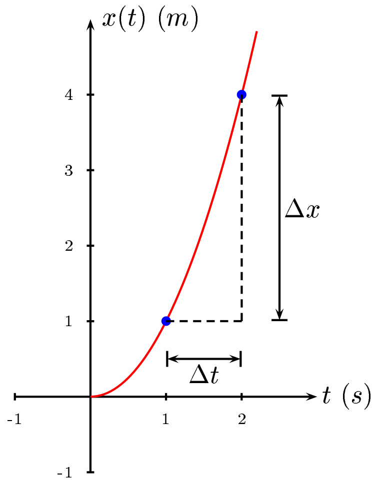
Nos dois exemplos anteriores, estudamos as velocidades médias relativas a diversos intervalos de tempo. No exemplo 1, faz sentido dizermos que a *velocidade* do objeto (o homem) é de $1m/s$ em qualquer instante de tempo. Por exemplo, podemos dizer que a velocidade no instante $t = 3s$ é $v = 1m/s$. A velocidade em $t = 5s$ também é $v = 1m/s$. Isto é o que chamamos *velocidade instantânea*, ou simplesmente velocidade. Já no exemplo 2, não podemos indicar uma só velocidade para todo o movimento, pois ela varia com o tempo. No exemplo seguinte, veremos como fazer para calcular uma velocidade instantânea no caso de movimentos em que a velocidade média varia de acordo com os intervalos de tempo tomados.

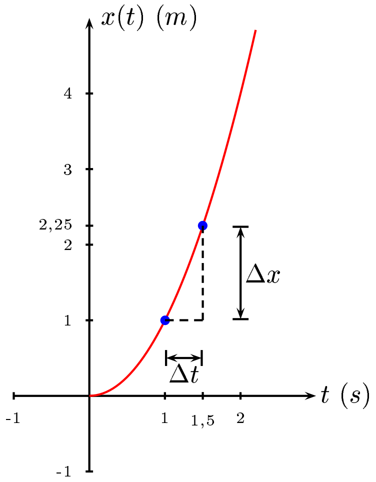
Ex.5: calcule a velocidade do automóvel do exemplo 2 no instante $t = 1s$.

Solução: agora, queremos calcular a velocidade instantânea do automóvel em $t = 1s$, isto é, a velocidade com que ele estará naquele exato instante.

Para fazermos isso, podemos tentar resolver o problema por meio de aproximações sucessivas, calculando primeiro a velocidade média do automóvel entre os instantes $t = 1s$ e $t = 2s$ e ir diminuindo gradativamente o intervalo Δt de tempo. Como vimos no exemplo anterior, a velocidade média entre $t = 1s$ e $t = 2s$ (com $\Delta t = 1s$) é de $v_m = 3m/s$:

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{x(2) - x(1)}{1s} = \\ &= \frac{2^2 m - 1^2 m}{1s} = \frac{4m - 1m}{1s} = \frac{3m}{1s} = 3m/s. \end{aligned}$$





Considerando um intervalo de tempo menor, de $t = 1s$ a $t = 1,5s$, temos: $\Delta t = 1,5s - 1s = 0,5s$.

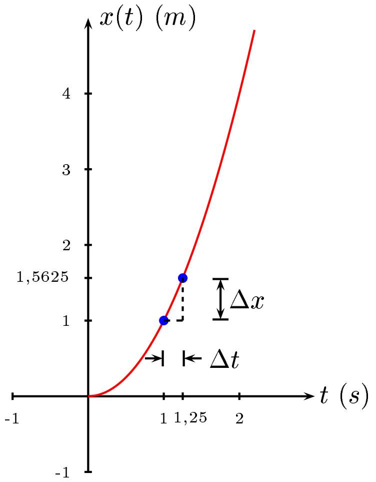
A velocidade média fica

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{x(1,5) - x(1)}{0,5s} = \frac{1,5^2 m - 1^2 m}{0,5s} = \\ &= \frac{2,25m - 1m}{1s} = \frac{1,25m}{0,5s} = 2,5m/s. \end{aligned}$$

Tomando um intervalo de tempo ainda menor, de $t = 1s$ a $t = 1,25s$, temos: $\Delta t = 1,25s - 1s = 0,25s$.

A velocidade média fica

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{x(1,25) - x(1)}{0,25s} = \frac{1,25^2 m - 1^2 m}{0,25s} = \\ &= \frac{1,5625m - 1m}{0,25s} = \frac{0,5625m}{0,25s} = 2,25m/s. \end{aligned}$$



Diminuindo Δt ainda mais, entre $t = 1s$ e $t = 1,1s$, temos: $\Delta t = 1,1s - 1s = 0,1s$,

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{x(1,1) - x(1)}{0,1s} = \frac{1,1^2 m - 1^2 m}{0,1s} = \frac{1,21m - 1m}{0,1s} = \\ &= \frac{0,21m}{0,1s} = 2,1m/s. \end{aligned}$$

Tomando $\Delta t = 0,01s$, entre $t = 1s$ e $t = 1,01s$, temos:

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{x(1,01) - x(1)}{0,01s} = \frac{1,01^2 m - 1^2 m}{0,01s} = \\ &= \frac{1,0201m - 1m}{0,01s} = \frac{0,0201m}{0,01s} = 2,01m/s. \end{aligned}$$

Para $\Delta t = 0,001s$, entre $t = 1s$ e $t = 1,001s$, temos:

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{x(1,001) - x(1)}{0,001s} = \frac{1,001^2 m - 1^2 m}{0,001s} = \\ &= \frac{1,002001m - 1m}{0,001s} = \frac{0,002001m}{0,001s} = 2,001m/s. \end{aligned}$$

Como podemos ver, conforme vamos fazendo Δt mais próximo a $0s$ a velocidade vai se aproximando de $v = 2m/s$. Podemos induzir que, quando $\Delta t \to 0$, a velocidade v tende a $2m/s$.

Do exemplo anterior, podemos considerar que a velocidade instantânea de um corpo em um dado instante t será a velocidade média quando tomamos o intervalo $\Delta t \to 0$, isto é,

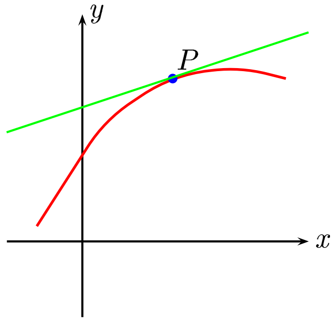
$$\boxed{v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}.}$$

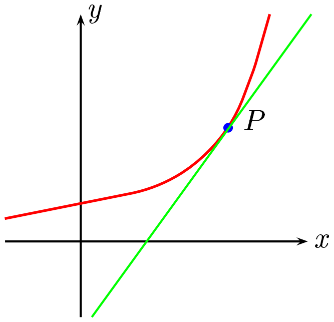
Esta é a fórmula para a velocidade instantânea. Note que a velocidade é uma função do tempo, da mesma forma que o deslocamento.

Isaac Newton *(1643-1727): Newton foi um dos maiores gênios da humanidade. Nasceu na pequena cidade de Woolsthorpe, na Inglaterra, e estudou na Universidade de Cambridge, tornando-se depois professor nessa mesma universidade. Ele era físico, matemático, astrônomo e alquimista, tendo contribuido significativamente para todos esses campos. Ele foi o criador da mecânica racional e da lei da gravitação universal. Foi um dos criadores do Cálculo Diferencial e Integral, juntamente com Leibniz. Desenvolveu vários trabalhos em óptica, tendo revolucionado essa área da física. Também foi dele a invenção do telescópio refrator, que é usado em observatórios do mundo inteiro. Newton também exerceu importantes cargos públicos e foi sagrado sir (cavalheiro) pela rainha da Inglaterra na época. Morreu como uma celebridade em seu país, embora já estivesse mostrando vários sinais de selenidade e loucura.*

4.2 - Derivada e tangente

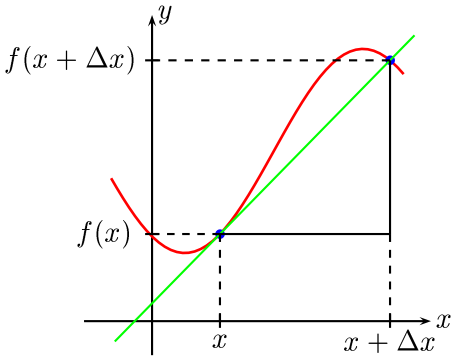
Um outro caso em que a derivada aparece é quando se estuda uma reta que é tangente a uma curva em um dado ponto desta. Uma reta tangente a uma curva em um determinado ponto é uma reta que passa por aquele ponto de tal forma que, caso a curva fosse aproximada localmente por uma circunferência, esta reta seria perpendicular a uma reta que passasse pelo centro da circunferência e pelo ponto em questão. Exemplos de retas tangentes são dados nas figuras a seguir.

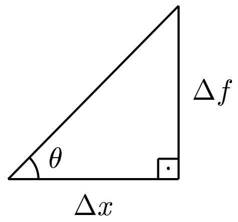




Uma forma de obter a reta tangente é por meio de aproximações sucessivas. Se quizermos determinar a reta tangente a uma curva dada por uma função $f(x)$ em um ponto onde as coordenadas são $(x, f(x))$, podemos fazê-lo tomando a reta que liga este ponto ao ponto de coordenadas $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$, como mostrado na figura abaixo. Com esta reta, podemos montar um triângulo retângulo onde os catetos são Δf e Δx, onde

$$\Delta x = (x + \Delta x) - x \quad \text{e} \quad \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x).$$

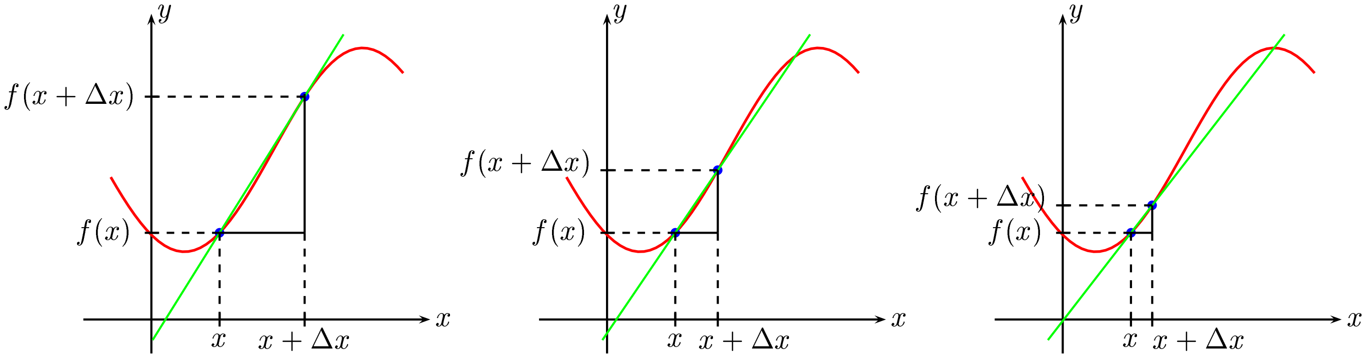




O ângulo θ dá a inclinação desta reta com relação ao eixo x. A tangente desse ângulo é dada por

$$\text{tg } \theta = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Se formos diminuindo o valor do intervalo Δx, obteremos aproximações cada vez melhores para a tangente:



No limite quando $\Delta x \to 0$, a aproximação fica perfeita. A tangente do ângulo θ, que dá a inclinação da reta tangente à curva, fica, então,

$$\text{tg } \theta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Para o limite quando $\Delta x \to 0$, Leibniz usou a seguinte notação:

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx},}$$

indicando que o deslocamento dx e a diferença df são infinitesimais. Podemos, então, escrever

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Chamamos $\frac{df}{dx}$ de *derivada de $f(x)$ com relação a x* e a expressão acima é a sua definição. A notação $\frac{df}{dx}$ é a notação que foi usada por Leibniz. A notação usada por Newton era $\dot{f}(x)$ para indicar a derivada de $f(x)$ com relação a x. Embora ainda seja usada em Mecânica, a notação atual mais comumente usada é $f'(x)$, de modo que

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \quad \text{e} \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

As duas notações são utilizadas hoje e o aluno de Cálculo tem que se familiarizar com ambas. Neste texto, usaremos uma ou outra notação, conforme for conveniente.

Agora, vamos estudar dois exemplos so cálculo do ângulo de inclinação de uma reta tangente a uma curva.

Ex.1: calcule o ângulo de inclinação da reta tangente à curva $y = x^2$ no ponto $x = 1$.

Solução: o cálculo pode ser feito mediante aproximações sucessivas. Para isto, vamos considerar a função $f(x) = x^2$ e escolher alguns intervalos Δx cada vez mais próximos a zero. Tomando, primeiro, $\Delta x = 1$, temos

$$\text{tg } \theta = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(1+1) - f(1)}{1} = f(2) - f(1) = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3.$$

Temos, então, que a tangente do ângulo é igual a 3. Portanto, o ângulo é *o arco cuja tangente é* 3, ou seja,

$$\text{tg } \theta = 3 \Rightarrow \theta = \text{arctg } 3.$$

Esta é a resposta exata. Se quisermos calcular um valor aproximado para o ângulo, podemos fazê-lo, obtendo

$$\theta \approx 71,56^o.$$

Em uma segunda aproximação, podemos tomar $\Delta x = 0,5$, de modo que obtemos

$$\text{tg } \theta = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(1+0,5) - f(1)}{0,5} = \frac{f(1,5) - f(1)}{0,5} = \frac{1,5^2 - 1^2}{0,5} = \frac{2,25 - 1}{0,5} = \frac{1,25}{0,5} = 2,5.$$

Temos, então, $\text{tg } \theta = 2,5 \Rightarrow \theta = \text{arctg } 2,5 \Rightarrow \theta \approx 68,20^o$.

Aproximando ainda mais, tomamos $\Delta x = 0,1$, de modo que

$$\text{tg } \theta = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(1+0,1) - f(1)}{0,1} = \frac{f(1,1) - f(1)}{0,1} = \frac{1,1^2 - 1^2}{0,1} = \frac{1.21 - 1}{0,1} = \frac{0,21}{0,1} = 2,1.$$

Temos, então, $\text{tg } \theta = 2,1 \Rightarrow \theta = \text{arctg } 2,1 \Rightarrow \theta \approx 64,54^o$.

Em outra aproximação, tomamos $\Delta x = 0,01$, obtendo

$$\text{tg } \theta = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(1+0,01) - f(1)}{0,01} = \frac{f(1,01) - f(1)}{0,01} = \frac{1,01^2 - 1^2}{0,01} = \frac{1.0201 - 1}{0,01} = \frac{0,0201}{0,01} = 2,01.$$

Temos, então, $\text{tg } \theta = 2,01 \Rightarrow \theta = \text{arctg } 2,01 \Rightarrow \theta \approx 63,55^o$.

Tomando, agora, $\Delta x = 0,001$, temos

$$\begin{aligned} \text{tg } \theta &= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(1+0,001) - f(1)}{0,001} = \frac{f(1,001) - f(1)}{0,001} = \frac{1,001^2 - 1^2}{0,001} = \frac{1.002001 - 1}{0,001} = \\ &= \frac{0,002001}{0,001} = 2,001. \end{aligned}$$

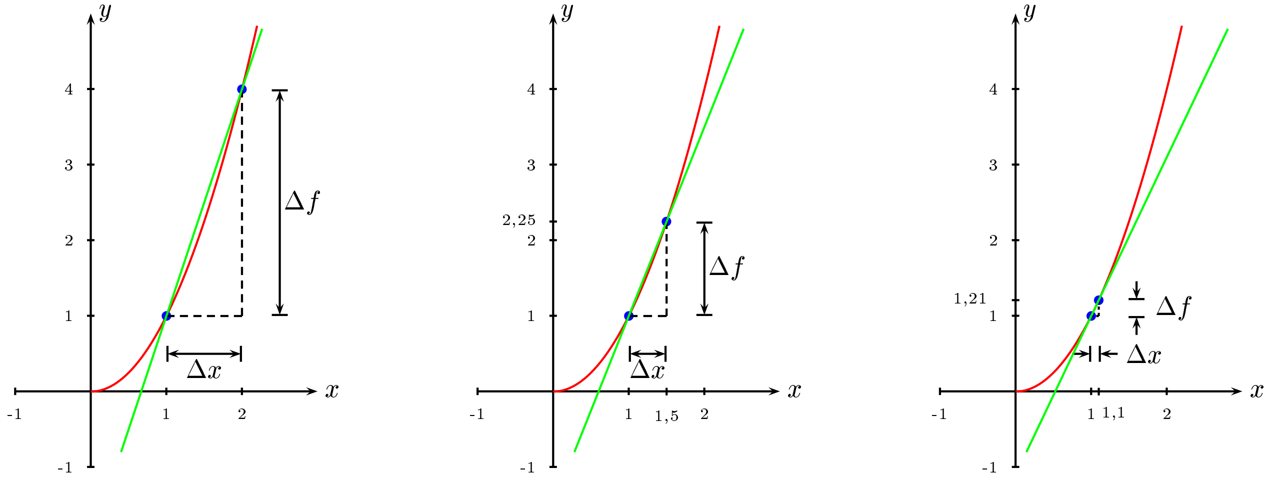
Temos, então, tg $\theta = 2,001 \Rightarrow \theta = \text{arctg } 2,001 \Rightarrow \theta \approx 63,45^o$.

Como última aproximação, tomamos $\Delta x = 0,0001$, obtendo

$$\begin{aligned}\text{tg } \theta &= \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{f(1+0,0001)-f(1)}{0,0001} = \frac{f(1,0001)-f(1)}{0,0001} = \frac{1,0001^2-1^2}{0,0001} = \frac{1.00020001-1}{0,0001} = \\ &= \frac{0,00020001}{0,0001} = 2,0001.\end{aligned}$$

Temos, então, tg $\theta = 2,0001 \Rightarrow \theta = \text{arctg } 2,0001 \Rightarrow \theta \approx 63,44^o$.

Aproximações subseqüentes podem resultar em valores cada vez mais exatos. Podemos perceber de nossas aproximações que a tangente do ângulo θ aproxima-se cada vez mais do valor tg $\theta = 2$, de modo que temos $\theta = \text{arctg } 2 \Rightarrow \theta \approx 63,435^o$. Os gráficos abaixo ilustram as três primeiras aproximações.



Ex.2: calcule o ângulo de inclinação da reta tangente à curva $y = x^2$ no ponto $x = 2$.

Solução: novamente, o cálculo pode ser feito mediante aproximações sucessivas. Escolhendo primeiro $\Delta x = 1$, temos

$$\text{tg } \theta = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{f(2+1)-f(2)}{1} = f(3)-f(2) = 3^2-2^2 = 9-4 = 5;$$
$$\text{tg } \theta = 5 \Rightarrow \theta = \text{arctg } 5 \Rightarrow \theta \approx 78,69^o.$$

Para $\Delta x = 0,5$, temos

$$\text{tg } \theta = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{f(2+0,5)-f(2)}{0,5} = \frac{f(2,5)-f(2)}{0,5} = \frac{2,5^2-2^2}{0,5} = \frac{6,25-4}{0,5} = \frac{2,25}{0,5} = 4,5;$$
$$\text{tg } \theta = 4,5 \Rightarrow \theta = \text{arctg } 4,5 \Rightarrow \theta \approx 77,47^o.$$

Para $\Delta x = 0,1$,

$$\text{tg } \theta = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{f(2+0,1)-f(2)}{0,1} = \frac{f(2,1)-f(2)}{0,1} = \frac{2,1^2-2^2}{0,1} = \frac{4.41-4}{0,1} = \frac{0,41}{0,1} = 4,1;$$
$$\text{tg } \theta = 4,1 \Rightarrow \theta = \text{arctg } 4,1 \Rightarrow \theta \approx 76,29^o.$$

Para $\Delta x = 0,01$,

$$\begin{aligned}\text{tg } \theta &= \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{f(2+0,01)-f(2)}{0,01} = \frac{f(2,01)-f(2)}{0,01} = \frac{2,01^2-2^2}{0,01} = \\ &= \frac{4.0401-4}{0,01} = \frac{0,0401}{0,01} = 4,01;\end{aligned}$$
$$\text{tg } \theta = 4,01 \Rightarrow \theta = \text{arctg } 4,01 \Rightarrow \theta \approx 76,00^o.$$

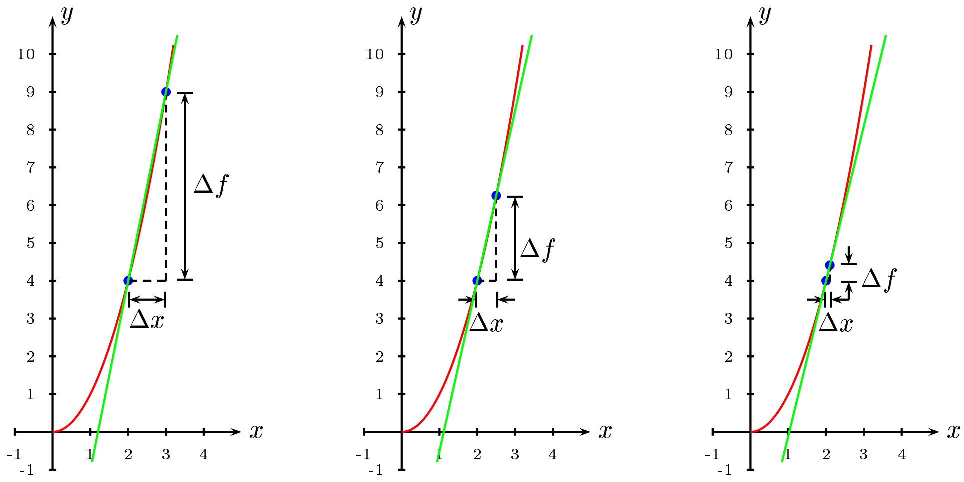
Para $\Delta x = 0,001$,

$$\text{tg } \theta = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(2+0,001) - f(2)}{0,001} = \frac{f(2,001) - f(2)}{0,001} = \frac{2,001^2 - 2^2}{0,001} =$$

$$= \frac{4.004001 - 4}{0,001} = \frac{0,004001}{0,001} = 4,001;$$

$$\text{tg } \theta = 4,001 \Rightarrow \theta = \text{arctg } 4,001 \Rightarrow \theta \approx 75,97^o.$$

Podemos ver que o valor da tangente tende a tg $\theta = 4$, de modo que o ângulo tende a $\theta = \text{arctg } 4 \Rightarrow \theta \approx 75,96^o$. As três primeiras aproximações são ilustradas abaixo.



Gottfried Wilhelm Leibniz *(1643-1727): matemático, filósofo, físico e estudioso das leis alemão. Nasceu em Leipzig e estudou na famosa universidade de mesmo nome. Junto com Newton, foi o criador do Cálculo Diferencial e Integral. Também foi responsável por boa parte da notação matemática usada até hoje. Além disso, foi um grande filósofo, tendo tecido uma visão de um universo baseado em princípios fundamentais e racionais, sem rejeitar as concepções cristãs. Sua convicção que tudo podia ser demonstrado racionalmente quando utilizada uma notação coveniente levou-o a organizar várias expressões matemáticas em termos de símbolos. Leibniz sofreu revezes com a rivalidade entre ele e Newton devida à controvérsia sobre quem teria sido o criador do Cálculo Diferencial e Integral.*

4.3 - Definição

Vamos, agora, estudar a definição da derivada de uma função. Utilizaremos essa definição no cálculo das derivadas das funções estudadas no capítulo 3. Abaixo, escrevemos a definição formal de derivada.

D1 - Dada uma função $f(x)$ com domínio $D(f) \in I\!R$, chamamos de *derivada* de $f(x)$ com relação à variável x o limite $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, quando este existir e for finito.

Em termos da notações de Leibniz e de Newton, temos, respectivamente,

$$\boxed{\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}} \text{ ou } \boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}} \; .$$

Note que, quando o limite acima não existir ou for infinito, a derivada não existirá naquele ponto.

a) Derivadas de funções constantes

Nos exemplos seguintes, usaremos a definição de derivada para calcular as derivadas de algumas funções constantes.

Ex.1: calcule a derivada da função $f(x) = 1$.

Solução: $f(x) = 1$, não importando o valor de x. Portanto, $f(x + \Delta x) = 1$.

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0.$$

Portanto, $\frac{df}{dx} = 0$.

Ex.2: calcule a derivada da função $f(x) = 2$.

Solução: $f(x) = 2$, não importando o valor de x. Portanto, $f(x + \Delta x) = 2$.

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 - 2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0.$$

Portanto, $\frac{df}{dx} = 0$.

De um modo geral, temos a regra dada pelo teorema seguinte.

T1 - Dada uma função constante $f(x) = c$, temos $\dfrac{df}{dx} = 0$.

Portanto, a derivada de qualquer função constante é sempre zero. Isto é demonstrado a seguir.

Demonstração: $f(x) = c$, não importando o valor de x. Portanto, $f(x + \Delta x) = c$.

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0.$$

Portanto, $\frac{df}{dx} = 0$.

b) Derivadas de funções de potências naturais

Vamos, agora, usar a definição de derivada para calcular as derivadas de algumas funções de potências naturais.

Ex.1: calcule a derivada da função $f(x) = x$.

Solução: $f(x) = x$. Portanto, $f(x + \Delta x) = x + \Delta x$.

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1.$$

Portanto, $\frac{df}{dx} = 1$.

Ex.2: calcule a derivada da função $f(x) = x^2$.

Solução: $f(x) = x^2$. Portanto, $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$.

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{2x\Delta x}{\Delta x} + \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x + 0 = 2x. \end{aligned}$$

Portanto, $\frac{df}{dx} = 2x$.

Ex.3: calcule a derivada da função $f(x) = x^3$.

Solução: $f(x) = x^3$. Portanto, $f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$.

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{3x^2\Delta x}{\Delta x}+\frac{3x(\Delta x)^2}{\Delta x}+\frac{(\Delta x)^3}{\Delta x}\right] = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\left[3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2\right] = 3x^2+3x.0+0^2 = 3x^2+0+0 = 3x^2.
\end{aligned}$$

Portanto, $\frac{df}{dx} = 3x^2$.

Ex.4: calcule a derivada da função $f(x) = x^4$.

Solução: $f(x) = x^4$. Portanto, $f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^4 = x^4 + 4x^3\Delta x + 6x^2(\Delta x)^2 + 4x(\Delta x)^3 + (\Delta x)^4$.

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^4+4x^3\Delta x+6x^2(\Delta x)^2+4x(\Delta x)^3+(\Delta x)^4-x^4}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{4x^3\Delta x+6x^2(\Delta x)^2+4x(\Delta x)^3+(\Delta x)^4}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{4x^3\Delta x}{\Delta x}+\frac{6x^2(\Delta x)^2}{\Delta x}+\frac{4x(\Delta x)^3}{\Delta x}+\frac{(\Delta x)^4}{\Delta x}\right] = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\left[4x^3+6x^2\Delta x+4x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3\right] = 4x^3+6.0+4x.0^2+0^3 = 4x^3+0+0+0 = 4x^3.
\end{aligned}$$

Portanto, $\frac{df}{dx} = 4x^3$.

De modo semelhante, podemos mostrar que $f(x) = x^5 \Rightarrow \frac{df}{dx} = 5x^4$, $f(x) = x^6 \Rightarrow \frac{df}{dx} = 6x^5$, $f(x) = x^7 \Rightarrow \frac{df}{dx} = 7x^6$, etc., de modo que podemos inferir a regra geral, dada pelo teorema seguinte.

T2 - Dada uma função constante $f(x) = x^n$, $n \in I\!N$, temos $\dfrac{df}{dx} = nx^{n-1}$.

Vamos, a seguir, demonstrar que essa fórmula é verdadeira.

Demonstração: pode-se demonstrar, usando o princípio da indução finita, que a seguinte fórmula é verdadeira:

$$\begin{aligned}
(x+a)^n &= x^n + nax^{n-1} + \frac{n!}{(n-2)!2!}a^2x^{n-2} + \frac{n!}{(n-3)!3!}a^3x^{n-3} + \cdots + \\
&\quad + \frac{n!}{3!(n-3)!}a^{n-3}x^3 + \frac{n!}{2!(n-2)!}a^{n-2}x^2 + na^{n-1}x + a^n.
\end{aligned}$$

Temos, então, que, para $f(x) = x^n$, $n \in I\!N$,

$$\begin{aligned}
f(x+\Delta) = (x+\Delta x)^n &= x^n + n\Delta x.x^{n-1} + \frac{n!}{(n-2)!2!}(\Delta x)^2x^{n-2} + \frac{n!}{(n-3)!3!}(\Delta x)^3x^{n-3} + \cdots + \\
&\quad + \frac{n!}{3!(n-3)!}(\Delta x)^{n-3}x^3 + \frac{n!}{2!(n-2)!}(\Delta x)^{n-2}x^2 + n(\Delta x)^{n-1}x + (\Delta x)^n.
\end{aligned}$$

Portanto, a derivada fica

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[f(x+\Delta x)-f(x)\right] = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[x^n + n\Delta x.x^{n-1} + \frac{n!}{(n-2)!2!}(\Delta x)^2x^{n-2} + \cdots + \frac{n!}{2!(n-2)!}(\Delta x)^{n-2}x^2 + n(\Delta x)^{n-1}x + (\Delta x)^n - x^n\right] = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[n\Delta x.x^{n-1} + \frac{n!}{(n-2)!2!}(\Delta x)^2x^{n-2} + \cdots + \frac{n!}{2!(n-2)!}(\Delta x)^{n-2}x^2 + n(\Delta x)^{n-1}x + (\Delta x)^n\right] =
\end{aligned}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n!}{(n-2)!2!} \Delta x . x^{n-2} + \cdots + \frac{n!}{2!(n-2)!} (\Delta x)^{n-3} x^2 + n (\Delta x)^{n-2} x + (\Delta x)^{n-1} \right] =$$

$$= nx^{n-1} + \frac{n!}{(n-2)!2!} 0 . x^{n-2} + \cdots + \frac{n!}{2!(n-2)!} 0^{n-3} x^2 + n . 0^{n-2} x + 0^{n-1} = nx^{n-1} .$$

Portanto, mostramos que $\frac{df}{dx} = nx^{n-1}$.

A fórmula deduzida acima nos permite calcular as derivadas de diversas funções, como nos exemplos a seguir. É importante lembrar que a derivada é uma função, algo que fica mais evidente se usarmos a notação de Newton:

$$\boxed{f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}, \ n \in \mathbb{N}.}$$

Ex.5: calcule a derivada da função $f(x) = x^2$.

Solução: $f'(x) = 2x^{2-1} = 2x^1 = 2x$.

Ex.6: calcule a derivada da função $f(x) = x^3$.

Solução: $f'(x) = 3x^{3-1} = 3x^2$.

Ex.7: calcule a derivada da função $f(x) = x^5$.

Solução: $f'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$.

Ex.8: calcule a derivada da função $f(x) = x^{10}$.

Solução: $f'(x) = 10x^{10-1} = 10x^9$.

Os casos da função $f(x) = x^0$ é diferente e será estudado no exemplo a seguir.

Ex.9: calcule a derivada da função $f(x) = x^0$.

Solução: A função $f(x) = x^0$ não é definida para $x = 0$. Usando a regra de derivação, temos $f'(x) = 0x^{0-1} = 0.x^{-1} = 0$, $x \neq 0$. Não existe a derivada para $x = 0$. Portanto, o resultado fica $f'(x) = 0$, $x \neq 0$.

4.4 - Aplicações: velocidade e reta tangente a uma curva

Vamos, agora, utilizar as derivadas para calcular algumas velocidades instantânes e ângulos de inclinação de retas tangentes a curvas. Isto será feito nos exemplos a seguir.

a) Velocidade

A velocidade instanânea de um corpo em um determinado instante de tempo t, ou simplesmente velocidade, é definida como

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} ,$$

onde $x(t)$ é a função que dá a posição do corpo em cada instante de tempo ao longo de uma linha reta .

Ex.1: Um corpo se move em linha reta e sua posição é dada por $x(t) = t^2$, onde a posição é medida em m e o tempo é medido em s. Calcule sua velocidade em $t = 4\ s$.

Solução: primeiro calculamos a função velocidade do corpo:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 2t .$$

Depois, calculamos $v(t)$ quando $t = 4\ s$, obtendo

$$v(4) = 2.4 = 8 .$$

Portanto, $v(4) = 8\ m/s$.

Ex.2: Um corpo se move em linha reta e sua posição é dada por $x(t) = t^5$, onde a posição é medida em m e o tempo é medido em s. Calcule sua velocidade em $t = 2$ s.

Solução: primeiro calculamos a função velocidade do corpo:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 5t^4 \ .$$

Depois, calculamos $v(t)$ quando $t = 2$ s, obtendo

$$v(2) = 5.2^4 = 5.16 = 80 \ .$$

Portanto, $v(2) = 80$ m/s.

b) Ângulo de inclinação de uma reta tangente a uma curva

Vamos, agora, utilizar a derivada para calcular o ângulo de inclinação de uma reta tangente a uma curva em determinado ponto. Se a curva é dada pela função $f(x)$, onde x é um parâmetro e x_0 é o ponto onde pelo qual a reta tangente passa, o ângulo de inclinação da reta tangente pode ser obtido através da equação

$$\text{tg } \theta = f'(x_0),$$

onde $f'(x_0)$ é a derivada $f'(x)$ calculada no ponto $x = x_0$. O ângulo pode então ser calculado através do arco tangente.

Ex.1: Calcule o ângulo da reta tangente à função $f(x) = x^4$ no ponto onde $x = 3$.

Solução: primeiro, calculamos a derivada da função:

$$f'(x) = 4x^3.$$

A tangente será dada pelo valor da derivada no ponto em que $x = 4$, isto é,

$$\text{tg } \theta = f'(4) = 4.4^3 = 4.64 = 256 \ .$$

Temos, então,

$$\text{tg } \theta = 256 \Rightarrow \theta = \text{arctg}\, 256 \approx 89,78^o.$$

Ex.2: Calcule o ângulo da reta tangente à função $g(x) = x^3$ no ponto onde $x = 10$.

Solução: primeiro, calculamos a derivada da função:

$$g'(x) = 3x^2.$$

A tangente será dada pelo valor da derivada no ponto em que $x = 10$, isto é,

$$\text{tg } \theta = g'(10) = 3.10^2 = 3.100 = 300 \ .$$

Temos, então,

$$\text{tg } \theta = 300 \Rightarrow \theta = \text{arctg}\, 300 \approx 89,81^o.$$

Existem ainda muitos exemplos de aplicações de derivadas. Alguns deles serão mostrados nos capítulos que seguem. Com isto, encerramos este capítulo. A seguir, estudaremos o cálculo com combinações lineares de funções.