3 - Funções constantes, funções de potências naturais e limites

3.1 - Potências naturais.
3.2 - Funções constantes.
3.3 - Funções de potências naturais.
3.4 - Limites.
3.5 - Limites no infinito.
3.6 - Aplicação: movimento retilíneo simples.

Iniciaremos o nosso estudo do Cálculo Diferencial e Integral analisando funções simples. Nos capítulos que seguem iremos tratar de funções progressivamente mais complicadas. Neste capítulo, trataremos somente de funções do tipo $f(x) = c$, onde $c \in \mathbb{R}$, e $f(x) = x^n$, onde $n \in \mathbb{N}$. Também introduziremos as noções de limites.

3.1 - Potências naturais

Dado um número real a, consideremos o seguinte produto: $a.a.a.\ldots.a$, multiplicado um número n de vezes. Este produto é chamado *potência enésima de a* e é representado por a^n. Temos, então, a seguinte definição.

D1 - Dados $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, a potência enésima de a é dada por $a^n = \underbrace{a.a.a.\ldots.a}_{n \text{ vezes}}$.

Exs.1: $2^3 = 2.2.2 = 8$, $5^4 = 5.5.5.5 = 625$, $8^2 = 8.8 = 64$.

Com o fim de tornar a definição D1 extensiva a todas as potências naturais, as potências a^1 e a^0 são definidas como

$$\boxed{a^1 = a} \quad , \quad \boxed{a^0 = 1 \ , a \neq 0} \, .$$

O fato de 0^0 não ser definido está relacionado a certas dificuldades que serão explicadas agora. Primeiro, sabemos que vale para todo número real diferente de zero que $x^0 = 1$. Se esta regra valesse também para o zero, teríamos $0^0 = 1$. No entanto, também para $x \neq 0$, vale $0^x = 0$. Se isto também fosse verdade para o zero teríamos $0^0 = 0$. Portanto, teríamos uma ambivalência: $0^0 = 1$ e $0^0 = 0$.

Exs.2: $3^1 = 3$, $8^1 = 8$, $4^0 = 1$, $1^0 = 1$, $0^1 = 0$, 0^0 é indeterminado.

Os babilônios foram os primeiros a utilizar potências. Várias de suas tabletas trazem registros de tabelas de números elevados a potências, por meio das quais eles calculavam juros compostos. As potências também forma utilizadas por Arquimedes na Grécia antiga. Diz-se que ele tentou calcular o número de grãos de areia necessário para preencher o Universo, tendo chegado à quantia de 10^{63} grãos.

Arquimedes *(287-212 a.C.): foi provavelmente o maior matemático da antigüidade. Nasceu e viveu na cidade grega de Siracusa e escreveu obras sobre física e matemática. Era também um grande engenheiro, tendo desenvolvido vários dispositivos mecânicos, como máquinas de guerra e bombas de água utilizadas para irrigação. Foi quem descobriu o princípio do empuxo quando estava trabalhando em um problema dado pelo rei. Diz-se que isso ocorreu enquanto se banhava e que ele saiu nu pelas ruas da cidade gritando "Eureka !", que significa "Descobri !".*

As potências naturais têm as seguintes propriedades.

P1) $a^m.a^n = a^{n+m}$,

P2) $(a^m)^n = a^{n.m}$,

P3) $(a.b)^n = a^n.b^n$.

Exs.3: $2^3.2^5 = (2.2.2).(2.2.2.2.2) = 2.2.2.2.2.2.2.2 = 2^8 = 2^{3+5}$,
$3^4.3^6 = 3^{4+6} = 3^{10}$, $5^2.5^3 = 5^{2+3} = 5^5$.

Exs.4: $\left(2^3\right)^2 = (2.2.2).(2.2.2) = 2.2.2.2.2.2 = 2^6 = 2^{3.2}$,
$\left(3^4\right)^6 = 3^{4.6} = 3^{24}$, $\left(5^2\right)^3 = 5^{2.3} = 5^6$.

Exs.5: $(2.5)^4 = (2.5).(2.5).(2.5).(2.5) = 2.5.2.5.2.5.2.5 = 2.2.2.2.5.5.5.5 = 2^4.5^4$,
$(3.2)^3 = 3^3.2^3$, $(5.8)^7 = 5^7.8^7$.

3.2 - Funções constantes

Funções constantes são do tipo $f(x) = c$, onde c é uma constante real, isto é, são funções que associam o valor c a todo número real x. A definição formal desse tipo de função é dada abaixo.

D2 - Funções constantes são funções de $I\!R$ em $I\!R$ dadas por $f = \{(x, c) \mid x \in I\!R \text{ e } c \in I\!R\}$, ou seja, $f(x) = c$, $c \in I\!R$.

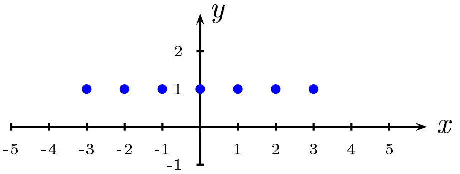
Exs.: $f(x) = 0$, $f(x) = 1$, $f(x) = -1$, $f(x) = 3$, $f(x) = \frac{1}{4}$, $f(x) = \sqrt{2}$.

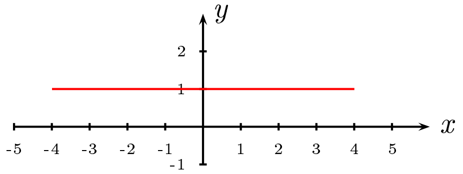
Como c pode ser qualquer número real, existe um número infinito de funções constantes (um infinito de ordem C, que é o número total de números reais). Nos exemplos a seguir, vamos estudar as representações gráficas, os domínios e as imagens de algumas delas.

Ex.1: $f(x) = 1$

A primeira coisa a fazer é montar uma tabela com alguns números $x \in I\!R$ e suas imagens. Fazendo isto, obtemos a seguinte tabela.

x	$f(x)$
-3	1
-2	1
-1	1
0	1
1	1
2	1
3	1





Em seguida, usando os pontos da tabela como guias, desenhamos uma curva contínua, que representa a função dentro de uma certa região. Como pode ser visto acima, o gráfico é uma reta paralela ao eixo x.

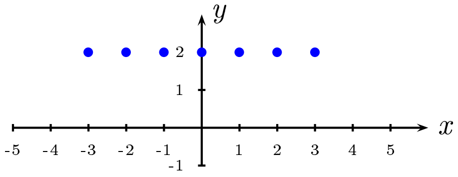
Esta função associa o mesmo valor, 1, a cada número $x \in I\!R$. Portanto, o domínio desta função é o conjunto dos números reais, $I\!R$, e sua imagem é o conjunto cujo único elemento é o número 1, isto é,

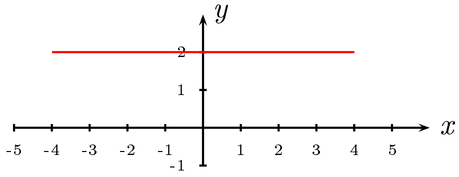
$$D(f) = I\!R \quad , \quad Im(f) = \{1\}.$$

Ex.2: $f(x) = 2$

Novamente, montamos uma tabela com alguns números $x \in I\!R$ e suas imagens.

x	$f(x)$
-3	2
-2	2
-1	2
0	2
1	2
2	2
3	2





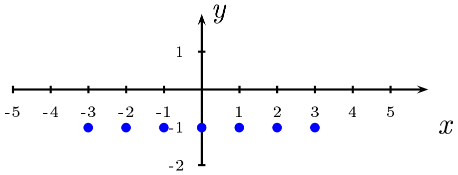
Feito isto, usamos novamente os pontos da tabela como guias, desenhando uma curva contínua que representa a função dentro de uma certa região. O gráfico também é uma reta paralela ao eixo x.

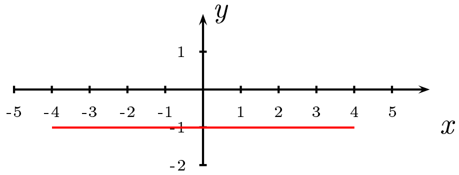
Esta função associa o mesmo valor, 2, a cada número $x \in I\!R$. Portanto, o domínio desta função é o conjunto dos números reais, $I\!R$, e sua imagem é o conjunto cujo único elemento é o número 2, isto é,

$$D(f) = I\!R \quad , \quad Im(f) = \{2\}.$$

Ex.3: $f(x) = -1$

x	$f(x)$
-3	-1
-2	-1
-1	-1
0	-1
1	-1
2	-1
3	-1





Esta função associa o mesmo valor, -1, a cada número $x \in I\!R$. Portanto, o domínio desta função é o conjunto dos números reais, $I\!R$, e sua imagem é o conjunto cujo único elemento é o número -1, isto é,

$$D(f) = I\!R \quad , \quad Im(f) = \{-1\}.$$

De um modo geral, todas as funções constantes terão gráficos semelhantes aos obtidos acima, isto é, são todas retas paralelas ao eixo x. O domínio de uma função constante $f(x) = c$ é $D(f) = I\!R$ e sua imagem é $Im(f) = \{c\}$, onde $c \in I\!R$.

3.3 - Funções de potências naturais

Nesta seção, estudaremos funções que são baseadas em potências naturais. Nossa atenção estará voltada para a representação gráfica dessas funções e para a identificação de seus domínios e imagens. Nas seções seguintes introduziremos o conceito de limites aplicados a essas funções. A definição de funções de potências naturais é dada a seguir.

D3 - Funções de potências naturais são funções de $I\!R$ em $I\!R$ dadas por $f = \{(x, x^n) \mid x \in I\!R \text{ e } n \in I\!N\}$, ou seja, $f(x) = x^n,\ n \in I\!N$.

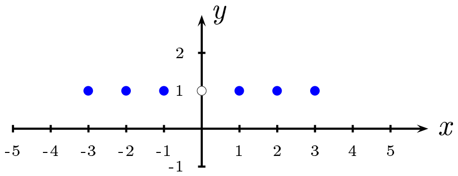
Exs.: $f(x) = x^0$, $f(x) = x^1$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$.

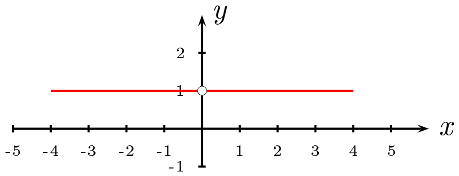
Como o conjunto dos números naturais $I\!N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ é infinito, existem infinitas dessas funções. Vamos estudar os gráficos de algumas delas.

Ex.1: $f(x) = x^0$

Quando consideramos a função $f(x) = x^0$, podemos montar a tabela abaixo. Note que a função não é definida para $x = 0$, pois obteríamos 0^0, que não é definido. No entanto, para todos os outros números reais, incluindo aqueles próximos a zero, temos sempre $f(x) = 1$. Portanto, o gráfico da função tem uma descontinuidade no ponto $x = 0$, como representado a seguir.

x	$f(x)$
-3	1
-2	1
-1	1
0	$\nexists$
1	1
2	1
3	1





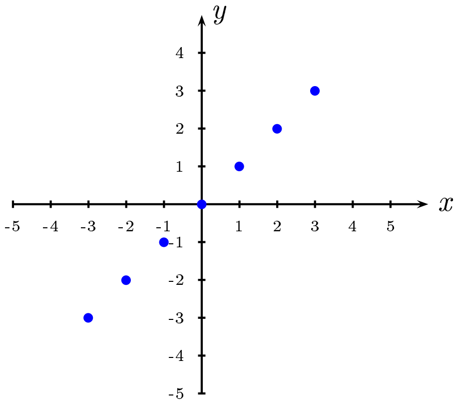
Esta função associa o mesmo valor, 1, a cada número $x \in I\!R$, $x \neq 0$. Portanto, o domínio desta função é o conjunto dos números reais, com exceção do zero, e sua imagem é o conjunto cujo único elemento é o número 1, isto é, $D(f) = I\!R_* = I\!R - \{0\}$, $Im(f) = \{1\}$.

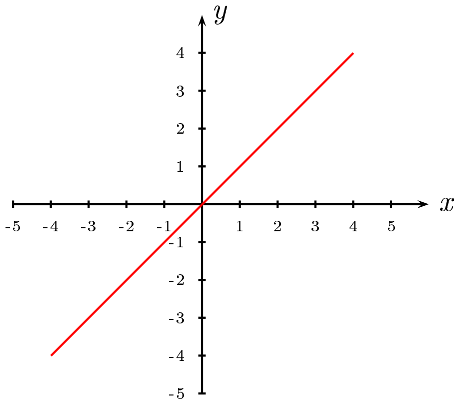
A função constante $f(x) = 1$ estudada na seção anterior evita esse problema da descontinuidade em $x = 0$. Vale notar que $f(x) = x^0$ e $f(x) = 1$ não são a mesma função, pois diferem em $x = 0$.

Ex.2: $f(x) = x$

Esta é a função $f(x) = x^1 = x$. Vamos usar a tabela abaixo para traçar alguns pontos do gráfico. Primeiro, plotamos os pontos obtidos em um plano cartesiano. Esses pontos possibilitam, então, vislumbrar a curva contínua descrita pela função.

x	$f(x)$
-3	-3
-2	-2
-1	-1
0	0
1	1
2	2
3	3



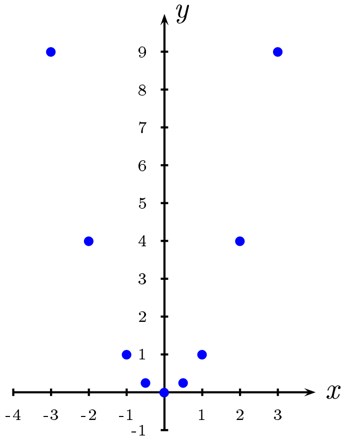


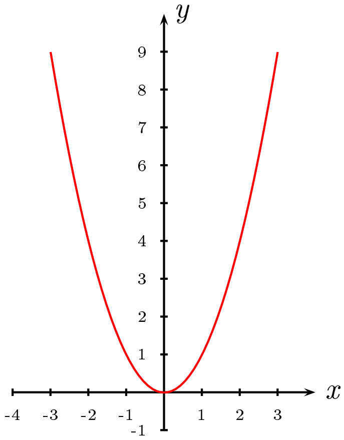
O gráfico desta função é uma reta inclinada. Esta função também é chamada função identidade, pois associa um número a ele mesmo. Portanto, para cada número $x \in I\!R$, a função associa o mesmo número x real. O domínio da função é $I\!R$, e sua imagem também é $I\!R$, isto é, $D(f) = I\!R$ e $Im(f) = I\!R$.

Ex.3: $f(x) = x^2$

Vamos usar a tabela abaixo para traçar alguns pontos do gráfico. Como o gráfico desta vez é mais complexo, usaremos mais pontos.

x	$f(x)$
-3	9
-2	4
-1	1
$-0,5$	$0,25$
0	0
$0,5$	$0,25$
1	1
2	4
3	9





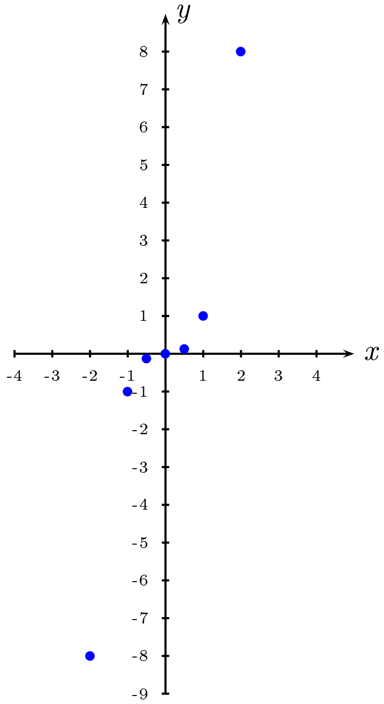
O gráfico desta função é uma curva chamada *parábola*. Devido à propriedade $(-x)^2 = x^2$, o gráfico é simétrico com relação ao eixo y e é sempre positivo com relação a este. Temos, então,

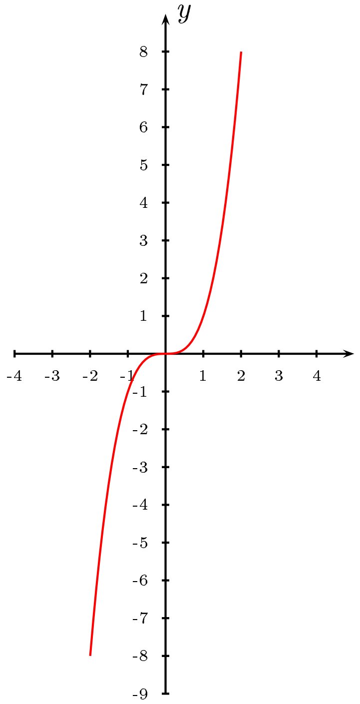
$$D(f) = I\!R \ , \ Im(f) = I\!R^+ = \{x \in I\!R | x \geq 0\}.$$

Obs.: é importante notar que o gráfico desta função não é formado por pontos interligados por retas. Trata-se de uma curva que varia continuamente.

Ex.4: $f(x) = x^3$

x	$f(x)$
-3	-27
-2	-8
-1	-1
$-0,5$	$-0,125$
0	0
$0,5$	$0,125$
1	1
2	8
3	27



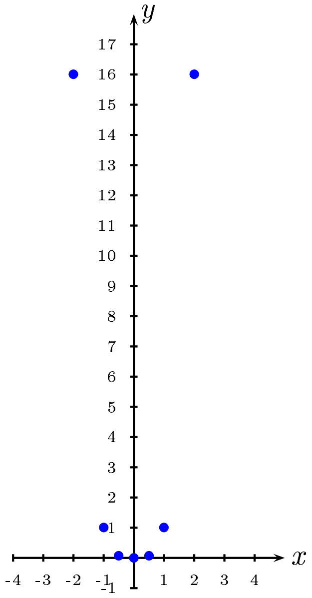


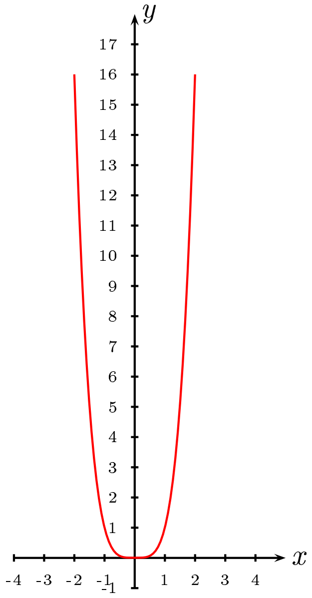
Esta é uma função cuja imagem cresce rapidamente. Note que, uma vez que $(-x)^3 = -x^3$, ela é antissimétrica com relação ao eixo y. Temos, também,

$$D(f) = I\!R \ , \ Im(f) = I\!R.$$

Ex.5: $f(x) = x^4$

x	$f(x)$
-3	81
-2	16
-1	1
$-0,5$	$0,0625$
0	0
$0,5$	$0,0625$
1	1
2	16
3	81



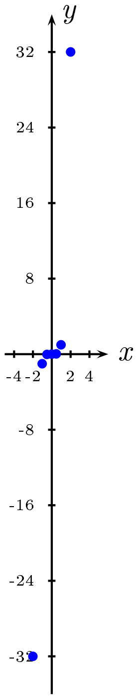


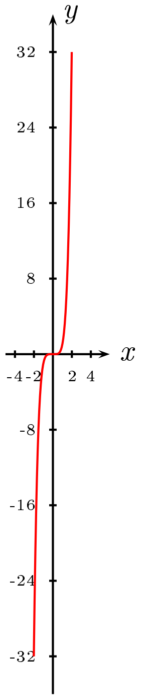
Esta função tem uma curva bastante acentuada. Assemelha-se a uma parábola, mas não é uma. Temos:

$$D(f) = \mathbb{R}\ ,\ Im(f) = \mathbb{R}^+.$$

Ex.6: $f(x) = x^5$

x	$f(x)$
-3	-243
-2	-32
-1	-1
$-0,5$	$-0,03125$
0	0
$0,5$	$0,03125$
1	1
2	32
3	243





Esta função assemelha-se à função $f(x) = x^3$, mas com curvas muito mais pronunciadas (note que tivemos que mudar a escala). Aqui, também,

$$D(f) = \mathbb{R}\ ,\ Im(f) = \mathbb{R}.$$

As demais funções serão semelhantes a $f(x) = x^2$, $f(x) = x^4$ se tiverem potências pares ou semelhantes a $f(x) = x^3$, $f(x) = x^5$ se tiverem potências ímpares.

3.4 - Limites

A idéia de *limite* está intimamente associada às propriedades dos números reais. O fato de podermos aproximar um número real por um outro número real, infinitesimalmente maior ou menor que este, é essencial para a definição do limite. Nesta seção, introduzimos essas idéias intuitivamente. Na Leitura Complementar deste capítulo, esses conceitos são formalizados.

Imaginemos que estejamos querendo saber o valor de uma função $f(x)$ quando a variável x está muito próxima de um certo valor a, o mais próximo possível sem que x seja igual a esse valor, isto é, $x \approx a$ (x aproximadamente igual a a), mas $x \neq a$. Dizemos, então, que queremos saber o valor de $f(x)$ quando x *tende ao valor* a. Podemos escrever x tendendo ao valor a como $x \to a$. O limite da função $f(x)$ quando $x \to a$ é escrito como $\lim\limits_{x \to a} f(x)$. Este símbolo é usado no cálculo de limites. Caso o limite exista e seja igual a um número L, escrevemos

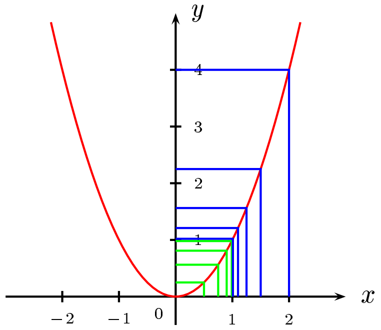
$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L.}$$

Ex.1: calcule $\lim\limits_{x \to 1} x^2$.

Solução: queremos calcular o limite da função $f(x) = x^2$ quando $x \to 1$. Para isso, consideremos números bem próximos de 1, dados nas tabelas a seguir. Conforme vamos nos aproximando de $x = 1$, seja pela esquerda (números menores que 1), seja pela direita (números maiores que 1), o valor de $f(x)$ vai se aproximando de $f(x) = 1$.

x	$f(x)$
0	0
$0,5$	$0,25$
$0,75$	$0,5625$
$0,9$	$0,81$
$0,99$	$0,9801$
$0,999$	$0,998001$

x	$f(x)$
2	4
$1,5$	$2,25$
$1,25$	$1,5625$
$1,1$	$1,21$
$1,01$	$1,0201$
$1,001$	$1,002001$



Se pudéssemos fazer uma aproximação infinita, teríamos o resultado $f(x) = 1$. Portanto, podemos escrever

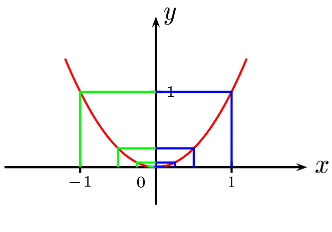
$$\lim_{x \to 1} x^2 = 1.$$

Ex.2: calcule $\lim\limits_{x \to 0} x^2$.

Solução: queremos calcular o limite da função $f(x) = x^2$ quando $x \to 0$. Para isso, consideremos números bem próximos de 0, dados nas tabelas a seguir. Conforme vamos nos aproximando de $x = 0$, seja pela esquerda (números menores que 0), seja pela direita (números maiores que 0), o valor de $f(x)$ vai se aproximando de $f(x) = 0$.

x	$f(x)$
-1	1
$-0,5$	$0,25$
$-0,25$	$0,0625$
$-0,1$	$0,01$
$-0,01$	$0,0001$
$-0,001$	$0,000001$

x	$f(x)$
1	1
$0,5$	$0,25$
$0,25$	$0,0625$
$0,1$	$0,01$
$0,01$	$0,0001$
$0,001$	$0,000001$



Se pudéssemos fazer infinitas aproximações, teríamos o resultado $f(x) = 0$. Portanto, podemos escrever

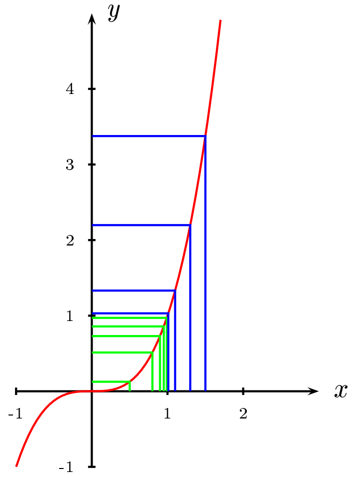
$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0.$$

Ex.3: calcule $\lim_{x\to 1} x^3$.

Solução: observemos as aproximações abaixo, onde $f(x) = x^3$.

x	$f(x)$
$0,5$	$0,125$
$0,8$	$0,512$
$0,9$	$0,729\ldots$
$0,95$	$0,857\ldots$
$0,99$	$0,970\ldots$
$0,999$	$0,997\ldots$
$0,9999$	$0,9997\ldots$

x	$f(x)$
$1,5$	$3,375$
$1,3$	$2,197$
$1,1$	$1,331\ldots$
$1,01$	$1,030\ldots$
$1,001$	$1,003\ldots$
$1,0001$	$1,00030\ldots$



Quanto mais nos aproximamos de $x = 1$, de ambos os lados da reta dos números reais, mais $f(x)$ se aproxima de 1. Portanto,

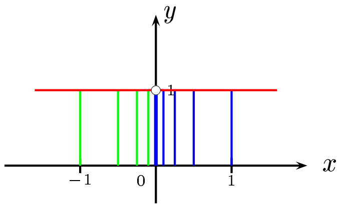
$$\lim_{x\to 1} x^3 = 1.$$

Ex.4: calcule $\lim_{x\to 0} x^0$.

Solução: queremos calcular o limite da função $f(x) = x^0$ quando $x \to 0$. Como foi visto na seção anterior, esta função não é definida para $x = 0$. Para encontrarmos o limite desta quando $x \to 0$, fazemos diversas aproximações de $x = 0$, seja pela esquerda (números menores que 0), seja pela direita (números maiores que 0). Isto está exemplificado nas tabelas abaixo.

x	$f(x)$
-1	1
$-0,5$	1
$-0,25$	1
$-0,1$	1
$-0,01$	1
$-0,001$	1

x	$f(x)$
1	1
$0,5$	1
$0,25$	1
$0,1$	1
$0,01$	1
$0,001$	1



Pode-se ver que na vizinhança do ponto $x = 0$, função $f(x) = x^0$ está muito próxima do valor 1, mesmo que nos aproximemos indefinidamente. Dizemos, então, que o limite da função $f(x) = x^0$ qando x tende a 0 é 1, isto é,

$$\lim_{x\to 0} x^0 = 1.$$

Obs.: note que mesmo que a função não esteja definida em um determinado ponto, o limite naquele ponto pode existir.

De um modo geral, quando quisermos calcular um limite $\lim_{x\to a} f(x)$, a primeira coisa a fazer é verificar se $f(a)$ existe. No caso de funções de potências naturais (com exceção de $f(x) = x^0$), teremos sempre

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Isto é expresso no teorema abaixo, que é provado na Leitura Complementar deste capítulo.

T1 - Dada uma função $f(x) = x^n$, $n \in I\!N$, temos $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, $a \neq 0$.

Para o caso particular em que $x \to 0$, temos o teorema abaixo.

T2 - Dada uma função $f(x) = x^n$, $n \in I\!N$, temos $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

Ex.5: calcule $\lim_{x \to 3} x^4$.

Solução: $\lim_{x \to 3} x^4 = 3^4 = 81$.

Ex.6: calcule $\lim_{x \to -2} x^3$.

Solução: $\lim_{x \to -2} x^3 = (-2)^3 = -8$.

Ex.7: calcule $\lim_{x \to 2} 1$.

Solução: $\lim_{x \to 2} 1 = 1$.

Ex.8: calcule $\lim_{x \to -3} 6$.

Solução: $\lim_{x \to -3} 6 = 6$.

O limite de uma constante é sempre igual à própria constante, conforme o teorema abaixo, também demonstrado na Leitura Complementar deste capítulo.

T3 - Dada uma função constante $f(x) = c$, $c \in I\!R$, temos $\lim_{x \to a} f(x) = c$.

Existem limites mais complicados, mas estes serão vistos na próxima seção e nos capítulos seguintes. Para provarmos o teorema T1, é interessante provarmos primeiro o seguinte teorema, que ensina como lidarmos com limites do produto de funções (isto também é feito na Leitura Complementar).

T4 - Dadas duas funções $f(x)$ e $g(x)$ tais que $lix \to af(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$, temos $\lim_{x \to a} [f(x).g(x)] = L_1.L_2$.

Então, podemos ver que o limite do produto de duas funções é igual ao produto dos limites das duas:

$$\boxed{\lim_{x \to a} [f(x).g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)}\ .$$

3.5 - Limites no infinito

Certas vezes, podemos perguntar qual é o valor de uma função $f(x)$ quando x tende a ∞, isto é, quando x é tão grande que se aproxima do infinito. Também podemos perguntar qual o valor da função quando $x \to -\infty$. Esses limites são escritos

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} f(x).$$

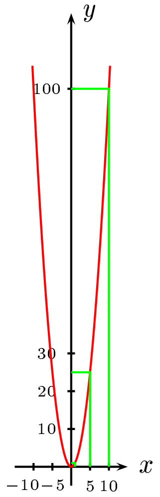
Para resolvê-los, vamos nos valer de aproximações, como fizemos na seção anterior.

Ex.1: calcule $\lim_{x \to \infty} x^2$.

Solução: consideremos a tabela abaixo para $f(x) = x^2$.

x	$f(x)$
1	1
5	25
10	100
100	10.000
1.000	1.000.000
10.000	100.000.000

Quanto mais x se aproxima de ∞, mais $f(x)$ se aproxima de ∞, de modo que $\lim_{x \to \infty} x^2 = \infty$.



Ex.2: calcule $\lim_{x\to-\infty} x^3$.

Solução: montamos a tabela abaixo para $f(x) = x^3$.

x	$f(x)$
-1	-1
-5	-125
-10	-1.000
-100	$-1.000.000$
-1.000	$-1.000.000.000$

Conforme x se aproxima de $-\infty$, $f(x)$ se aproxima de $-\infty$, de modo que $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.

Ex.3: calcule $\lim_{x\to-\infty} x^4$.

Solução: montamos a tabela abaixo para $f(x) = x^4$.

x	$f(x)$
-1	1
-5	625
-10	10.000
-100	$100.000.000$
-1.000	$1.000.000.000.000$

Conforme x se aproxima de $-\infty$, $f(x)$ se aproxima de ∞, de modo que $\lim_{x\to-\infty} x^4 = \infty$.

Obs.: nunca podemos escrever $f(\infty)$ ou $f(-\infty)$, pois estes não são números da reta dos números reais. Temos sempre que usar as notações $x \to \infty$ ou $x \to -\infty$, pois a variável nunca chega a esses valores. Apenas aproxima-se deles cada vez mais.

Relembrando, o número ∞ tem as propriedades

P1) $\infty^n = \infty$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$; **P2)** $(-\infty)^n = \infty$ se n é par; **P3)** $(-\infty)^n = -\infty$ se n é ímpar.

Estas são usadas nos exemplos a seguir.

Ex.4: calcule $\lim_{x\to\infty} x^5$.

Solução: $\lim_{x\to\infty} x^5 = \infty^5 = \infty$.

Ex.5: calcule $\lim_{x\to-\infty} x^2$.

Solução: $\lim_{x\to-\infty} x^2 = (-\infty)^2 = \infty$.

Ex.6: calcule $\lim_{x\to-\infty} x^3$.

Solução: $\lim_{x\to-\infty} x^3 = (-\infty)^3 = -\infty$.

Ex.7: calcule $\lim_{x\to\infty} x^0$.

Solução: note que não existe regra para ∞^0. Portanto, usaremos uma tabela com $f(x) = x^0 = 1$.

x	1	10	100	1.000	10.000	100.000
$f(x)$	1	1	1	1	1	1

Podemos, então, deduzir que $\lim_{x\to\infty} x^0 = \lim_{x\to\infty} 1 = 1$.

Obs.: o mesmo vale para $x \to -\infty$, isto é, $\lim_{x\to-\infty} x^0 = 1$.

Ex.8: calcule $\lim_{x\to\infty} 2$.

Solução: como a função $f(x) = 2$ é sempre constante, temos $\lim_{x\to\infty} 2 = 2$.

Ex.9: calcule $\lim_{x\to-\infty} (-4)$.

Solução: como $f(x) = -4$ é constante, temos $\lim_{x\to-\infty} (-4) = -4$.

Obs.: também no caso dos limites infinitos, o limite de uma função constante é sempre igual à própria constante.

Os limites no infinito de funções de potências naturais e funções constantes estão explicitados nos seguintes teoremas.

T5 - Dada uma função $f(x) = x^n$, $n \in I\!N$, temos $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

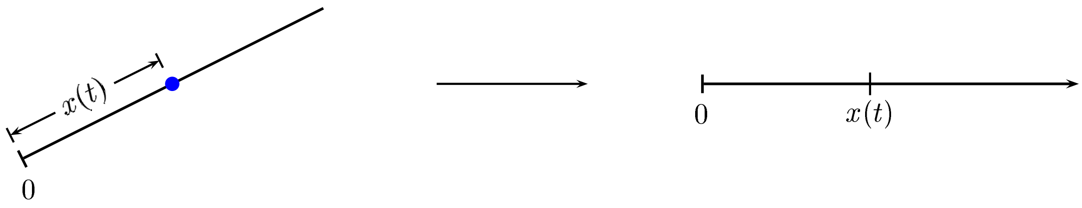
T6 - Dada uma função $f(x) = x^n$, $n \in I\!N$, temos $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ se n for par e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ se n for ímpar

T7 - Dada uma função constante $f(x) = c$, $c \in I\!R$, temos $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = c$.

Estes três teoremas são demonstrados na Leitura Complementar deste capítulo.

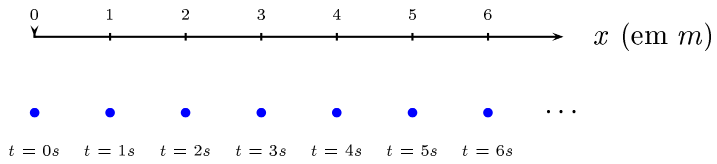
3.6 - Aplicação: movimento retilíneo simples

Em Física, alguns movimentos podem ser descritos por funções simples. Como exemplo, tomemos o movimento de um objeto em linha reta. Podemos parametrizá-lo como sendo realizado sobre a reta dos números reais. Este é dado pelo deslocamento x do objeto com relação a um ponto (que escolhemos como sendo $x = 0$) em função do tempo t.



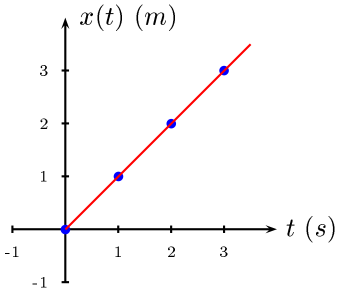
A seguir, estudaremos dois exemplos simples de movimento retilíneo.

Ex.1: um homem caminha em linha reta, a partir de um ponto de origem, de acordo com a figura abaixo, que mostra sua posição em diversos instantes de tempo. Com base nessa figura, escreva o deslocamento desse homem como função do tempo.



Solução: observando a figura acima, sabemos que no instante $t = 0s$, ele estava na posição $x = 0m$. Em $t = 1s$, ele estava em $x = 1m$, e da mesma forma podemos obter sua posição em instantes subseqüentes. Usando esses dados, podemos construir a tabela

t (em x)	$x(t)$ (em m)
0	0
1	1
2	2
3	3

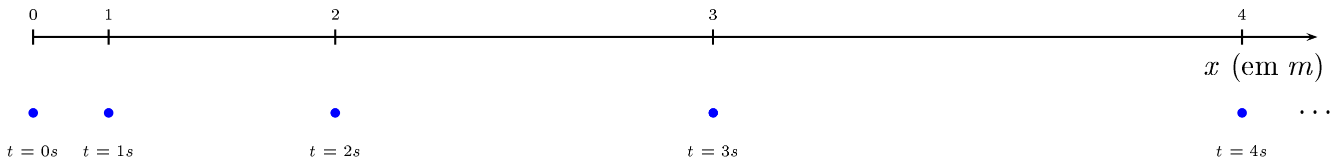


Esta tabela pode servir para plotarmos esses números em um plano cartesiano, construindo assim o gráfico acima. Observando esse gráfico, podemos ver que ele é a representação gráfica da função identidade, que em termos das variáveis deste problema é escrita como

$$x(t) = t.$$

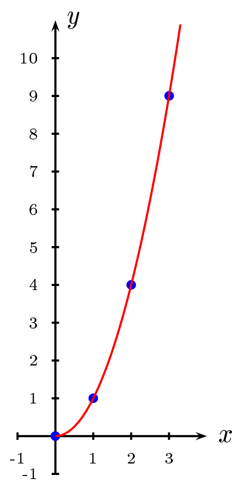
Esse tipo de movimento é chamado em Física *movimento retilíneo uniforme*. Note que o domínio da função $x(t)$ é $D(s) = \{t \in I\!R | t \geq 0\}$, pois o movimento é medido a partir do instante $t = 0s$.

Ex.2: um automóvel parte da origem em linha reta, onde estava parado, acelerando de forma a fazer o movimento descrito pela figura abaixo, que mostra sua posição em diversos instantes de tempo. Com base nessa figura, escreva o deslocamento do automóvel como função do tempo.



Solução: observando a figura acima, podemos construir uma tabela. Depois, usamos esta tabela para plotar esses números em um plano cartesiano, construindo o gráfico a seguir.

t (em s)	$x(t)$ (em m)
0	0
1	1
2	4
3	9



Observando esse gráfico, podemos ver que ele descreve uma parábola, que é a representação gráfica da função $f(x) = x^2$, que em termos das variáveis deste problema é escrita como

$$x(t) = t^2.$$

Esse tipo de movimento é chamado em Física *movimento retilíneo uniformemente variado*.

Os dois exemplos acima são bastante simplificados, específicos para movimentos que partem da origem com velocidade inicial nula. No capítulo 5, veremos alguns movimentos mais complexos que são utilizados na Física. A seguir, estudaremos uma das pedras fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral: a derivada.