1 - Conjuntos numéricos

Neste capítulo faremos uma revisão da teoria dos conjuntos e também apresentaremos os conjuntos numéricos que estaremos utilizando durante o curso. O capítulo seguinte tratará da revisão do conceito de funções e nos capítulos que seguem outros conceitos como o de potências, raízes, exponenciais e logarítmos serão revistos, conforme se façam necessários.

1.1 - Conjuntos

A teoria dos conjuntos é uma das bases fundamentais da matemática moderna. Ela é baseada em três conceitos que são aceitos sem definição: conjunto, elemento e pertinência. A seguir, revisaremos brevemente alguns dos conceitos fundamentais da teoria dos conjuntos.

a) Conjunto

Imaginemos algumas cabras dentro de um cercado, ou as letras do alfabeto, ou os nomes dos estados brasileiros. Todos eles são *conjuntos*. A noção de conjunto é aceita na matemática sem definição, ou seja, é uma *idéia primitiva*. Um conjunto é qualquer coleção de objetos que podem ou não ter algo em comum. Alguns exemplos de conjuntos são dados abaixo.

Exs.: conjunto dos livros em uma prateleira;
conjunto das vogais do alfabeto;
conjunto dos países da América do Sul;
conjunto dos números pares;
conjunto dos ingredientes de uma receita;
uma vaca, uma foice e o número dois formam um conjunto (lembre que os objetos não precisam estar relacionados para formarem um conjunto).

b) Elemento

Cada objeto que compõe um conjunto é chamado *elemento*. Assim, o estado de São Paulo é um elemento do conjunto dos estados brasileiros. Outros exemplos são dados a seguir.

Exs.: a letra a é um elemento do conjunto das vogais do alfabeto;
a Argentina é um elemento do conjunto dos países da América do Sul;
o Brasil também é elemento do conjunto dos países da América do Sul;
a França não é elemento do conjunto dos países da América do Sul.

c) Pertinência

Pertinência é uma relação entre um elemento e um conjunto. Se um objeto é elemento de um conjunto, dizemos que ele *pertence* ao conjunto. Se o elemento é dado por a e o conjunto é dado por A, dizemos que $a \in A$ (a pertence a A) quando o elemento a pertence ao conjunto A. Quando a não é um elemento do conjunto A, dizemos que $a \notin A$ (a não pertence a A).

Exs.: a letra a pertence ao conjunto das vogais do alfabeto;
a Argentina pertence ao conjunto dos países da América do Sul;
a França não pertence ao conjunto dos países da América do Sul;
o número 1 não pertence ao conjunto dos números pares.

d) Representação de um conjunto

Existem diversas maneiras de representar um conjunto. Duas das principais formas são descritas a seguir.

Citação de elementos.

Uma forma de descrever um conjunto é escrevendo todos os seus elementos entre chaves e separados por vírgulas:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}.$$

Ex.1: escreva o conjunto das vogais do alfabeto Português.

Solução: $\{a, e, i, o, u\}$.

Ex.2: escreva o conjunto das estações do ano.

Solução: {Primavera,Verão,Outono,Inverno}.

Ex.3: escreva o conjunto dos números pares de 1 a 10.

Solução: $\{2, 4, 6, 8\}$.

Quando um conjunto tem um número infinito de termos, usamos a notação "$\ldots$" para indicar os termos não listados.

Ex.4: escreva o conjunto dos números naturais.

Solução: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$.

Ex.5: escreva o conjunto dos números inteiros.

Solução: $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Esta notação também é usada em conjuntos muito grandes, mas finitos, para designar os elementos não listados.

Ex.6: escreva o conjunto dos números naturais de 1 a 200.

Solução: $\{1, 2, 3, \ldots, 198, 199, 200\}$.

Ex.7: escreva o conjunto dos meses do ano.

Solução: {Janeiro,Fevereiro, Março, ...,Novembro,Dezembro}.

Descrição por meio de uma propriedade.

Também podemos representar alguns tipos de conjuntos descrevendo uma ou mais propriedades comuns a todos os elementos destes (e que simultaneamente não sejam propriedades de nenhum outro elemento que não pertença ao conjunto em questão):

$$A = \{x \mid x \text{ tem as propriedades } P\}.$$

O símbolo "|" acima é lido como "*tal que*" (ou "*tais que*"), de modo que a expressão é lida como "o conjunto de todos os elementos x tais que x tem as propriedades P".

Ex.1: escreva o conjunto de todos os números naturais pares.

Solução: $\{x \mid x \text{ é número natural par}\}$.

Ex.2: escreva o conjunto de todos os números inteiros maiores que 0 e menores que 100.

Solução: $\{x \mid x \text{ é inteiro e } 0 < x < 100\}$.

Obs.: note que os elementos dos conjuntos dos exemplo 1 e 2 são ambos decritos por duas propriedades.

Ex.3: escreva o conjunto dos nomes dos dias da semana.

Solução: $\{x \mid x \text{ é dia da semana}\}$.

e) Conjunto unitário e conjunto vazio

Quando um conjunto tem apenas um elemento, ele é chamado *conjunto unitário*:

$$A = \{a\}.$$

Ex.1: os conjuntos $\{3\}$, $\{\text{bola}\}$, $\{\text{árvore}\}$ e $\{x \mid x - 2 = 4\}$ são todos unitários.

Obs.: $a \neq \{a\}$, isto é, o elemento a não é o mesmo que o conjunto cujo elemento é a.

O conjunto que não tem elemento algum tem um nome especial: é chamado *conjunto vazio* e é representado por um zero cortado, $\emptyset$:

$$\emptyset = \{\ \}.$$

Obs.: só existe um conjunto vazio. Além disso, $\emptyset \neq \{0\}$, que é o conjunto cujo elemento é zero.

Outras maneiras de representar o conjunto vazio são dadas a seguir.

Ex.2: escreva o conjunto de todos os números naturais x tais que $x \neq x$.

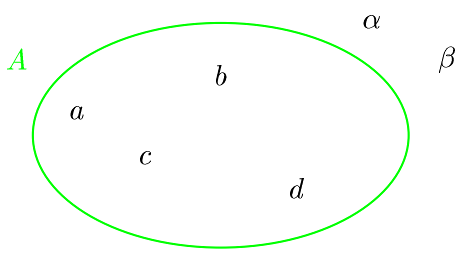
Solução: $\emptyset$.

Ex.3: escreva o conjunto de todos os meses de 38 dias.

Solução: $\emptyset$.

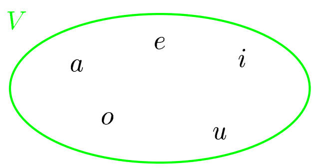
f) Diagramas de Euler-Venn

Um conjunto pode ser representado por meio de um *diagrama de Euler-Venn*, que é a figura de uma região do plano interior a uma linha fechada. A forma da linha não é importante, bastando que ela não seja entrelaçada. Dentro dessa região são escritos os elementos do conjunto. Elementos desenhados fora dessa região não são elementos do conjunto. Na figura ao lado, a, b, c e d pertencem ao conjunto A, mas α e β não pertencem a ele.



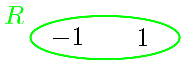
Ex.1: represente o conjunto $V = \{a, e, i, o, u\}$ por meio de um diagrama de Euler-Venn.

Solução:



Ex.2: represente o conjunto $R = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}$ por meio de um diagrama de Euler-Venn.

Solução: O conjunto R é dado pelas raízes da equação do 2^o grau $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} \Rightarrow x = \pm 1$, isto é, $R = \{-1, 1\}$. Deste modo, temos o diagrama



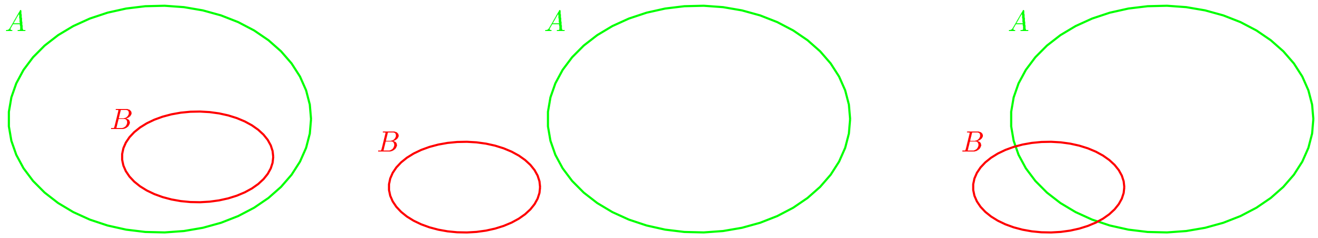
Leonhard Euler *(1707-1783): grande matemático suíço. Ocupou-se de quase todos os ramos da matemática, tendo mais de 500 publicações, entre livros e artigos. Foi responsável por muitas das notações que usamos hoje, como a de função ($f(x)$), razões trigonométricas (sen, cos) e a proposição de diagramas para conjuntos.*

John Venn *(1834-1923): matemático inglês. Em 1880, propôs uma nova forma de diagramas em sua obra Lógica Simbólica.*

g) Subconjuntos

Um conjunto B é *subconjunto* de um conjunto A se todo elemento de B pertence a A. Neste caso, escrevemos $B \subset A$ (B está contido em A). Quando um conjunto B não é subconjunto de A, escrevemos $B \not\subset A$. Em termos de diagramas de Euler-Venn,

$B \subset A$ $\qquad$ $B \not\subset A$ $\qquad$ $B \not\subset A$



Ex.1: o conjunto $C = \{a, b, d\}$ é subconjunto de $A = \{a, b, c, d, e\}$, isto é, $C \subset A$.

Ex.2: o conjunto $F = \{2, 3, 4\}$ não é subconjunto de $G = \{2, 4, 6, 8\}$, pois o elemento $3 \in F$ não pertence ao conjunto G. Portanto, $F \not\subset G$.

Ex.3: $\{a, b\} \subset \{a, b\}$.

Ex.4: $\{x \mid x \text{ é um número natural par}\} \subset \{x \mid x \text{ é um número natural}\}$.

h) Igualdade entre conjuntos

Dois conjuntos A e B são iguais (escrevemos $A = B$) se $A \subset B$ e $B \subset A$, isto é, quando cada elemento de A é igual a um elemento de B e cada elemento de B é igual a um elemento de A. Se A não é igual a B, escrevemos $A \neq B$.

Ex.1: os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{d, c, a, b\}$ são iguais.

Obs.: a ordem em que os elementos estão listados em um conjunto não é importante.

Ex.2: os conjuntos $A = \{x \mid x \text{ é um número natural e } x < 4\}$ é igual ao conjunto $B = \{0, 1, 2, 3\}$.

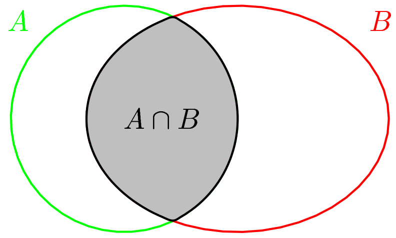
Ex.3: $\{a, b, c, d\} = \{a, d, b, b, c, d\}$.

Obs.: do exemplo acima, podemos ver que a repetição de um elemento dentro de um conjunto não o torna diferente.

Ex.4: $\{3, 4, 6, 8\} \neq \{2, 3, 4, 6, 8\}$.

i) Intersecção entre conjuntos

Dados dois conjuntos A e B, a *intersecção* entre eles é definida como sendo o conjunto cujos elementos pertencem a A e a B. Em termos simbólicos, $A \cap B = \{x \mid (x \in A) \text{ e } (x \in B)\}$.



Ex.1: dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e B=$\{2, 4, 6, 8, 10\}$, escreva $A \cap B$.

Solução: $A \cap B = \{2, 4\}$.

Ex.2: dados os conjuntos $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $D = \{2, 4, 6, 8\}$, escreva $C \cap D$.

Solução: $C \cap D = \emptyset$, pois C e D não têm elementos comuns.

Ex.3: dados os conjuntos $E = \{x \mid x \text{ é estado do Brasil}\}$ e $F = \{x \mid x \text{ é estado da região Sudeste}\}$, escreva $E \cap F$.

Solução: $E \cap F = \{$São Paulo,Rio de Janeiro,Espírito Santo,Minas Gerais$\}$.

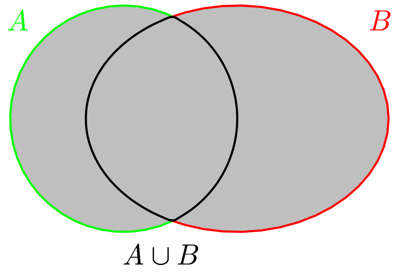
Ex.4: dados os conjuntos $G = \{x \mid x \text{ é mamífero}\}$ e $H = \{x \mid x \text{ põe ovos}\}$, escreva $G \cap H$.

Solução: $G \cap H = \{$ornitorrinco,équidna$\}$.

Obs.: o ornitorrinco e a équidna são mamíferos australianos. O ornitorrinco se assemelha a um castor, mas tem bico e patas semelhantes aos de um pato. A équidna tem pêlos que parecem os de um porco espinho e uma lingua fina e comprida. São os únicos mamíferos que põem ovos.

j) União de conjuntos

Dados dois conjuntos A e B, a *união* entre eles é definida como sendo o conjunto cujos elementos pertencem a A ou a B. Em termos simbólicos, $A \cup B = \{x \mid (x \in A) \text{ ou } (x \in B)\}$.



Ex.1: dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e B=$\{2, 4, 6, 8, 10\}$, escreva $A \cup B$.

Solução: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$.

Ex.2: dados os conjuntos $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $D = \{2, 4, 6, 8\}$, escreva $C \cup D$.

Solução: $C \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Ex.3: dados os conjuntos $E = \{a, e, i, o, u\}$ e $F = \{1, 2, 3, 4\}$, escreva $E \cup F$.

Solução: $E \cup F = \{a, e, i, o, u, 1, 2, 3, 4\}$.

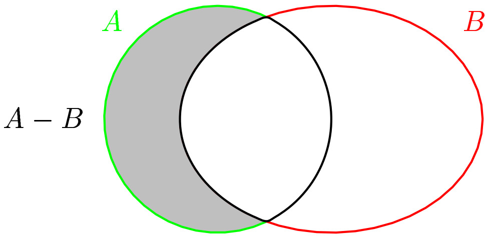
Ex.4: dados os conjuntos $G = \{3\}$ e o conjunto vazio $\emptyset = \{\ \}$, escreva $G \cup \emptyset$.

Solução: $G \cup \emptyset = \{3\}$.

Obs.: para qualquer conjunto A, temos $A \cup \emptyset = A$.

k) Diferença entre conjuntos

Dados dois conjuntos A e B, a *diferença* entre eles é definida como sendo o conjunto cujos elementos pertencem a A e que não pertencem a B. Em termos simbólicos, $A - B = \{x \mid (x \in A) \text{ e } (x \notin B)\}$.



Ex.1: dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e B=$\{2, 4, 6, 8, 10\}$, escreva $A - B$.

Solução: $A - B = \{1, 3, 5\}$.

Ex.2: dados os conjuntos $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $D = \{2, 4, 6, 8\}$, escreva $C - D$.

Solução: $C - D = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

Ex.3: dados os conjuntos $E = \{a, e, i, o, u\}$ e $F = \{a, e, i, o\}$, escreva $E - F$.

Solução: $E - F = \{u\}$.

Ex.4: dados os conjuntos $G = \{3\}$ e o conjunto vazio $\emptyset = \{\ \}$, escreva $G - \emptyset$.

Solução: $G - \emptyset = \{3\}$.

1.2 - Conjuntos Numéricos

Os números já fazem parte do quotidiano da humanidade há muito tempo. Existem indícios de que o ser humano já vem contando de uma forma ou de outra desde a pré-história. Com o tempo, a idéia de número foi se desenvolvendo até chegar ao estágio atual, em que atinge níveis de sofisticação que só são acessíveis a alguns especialistas.

No início, contava-se utilizando os dedos das mãos e dos pés, usando pedrinhas ou gravetos, ou fazendo riscos na madeira ou em tabuinhas de barro. Esses processos foram tão marcantesimportantes que deixaram marcas na nossa linguagem: a palavra *dígito* vem do latim *digitus*, que significa dedo e a palavra *cálculo* vem do latim *calculus*, que significa pequena pedra.

Os primeiros números foram aqueles relacionados a atividades como a contagem de animais ou dos membros de uma tribo ou do número de filhos. Esses foram os números 1, 2, 3, etc.. Entre algumas tribos de índios brasileiros, só existiam os números 1, 2, 3 e *muitos*. Em outras culturas havia números maiores. Com o advento do comércio, surgiu o número 0 e depois os números negativos, que serviam para indicar dívidas e facilitavam os cálculos. Quando começou a ser necessário fazer a divisão de números, como no caso da divisão de terras e outras posses, surgiram os números fracionários. Com o estudo da geometria pelos gregos e outros, surgiram os números irracionais. O advento da teoria da eletricidade trouxe aplicações para os números imaginários. Após isso, outros tipos de números têm aparecido, com aplicações em diversas áreas ou mesmo pelo puro interesse matemático.

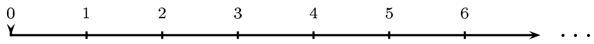
Nesta seção, faremos um breve estudo de alguns dos conjuntos que são formados por números, os chamados *conjuntos numéricos*. Serão apresentados os conjuntos mais comuns e alguns não muito conhecidos. O objetivo é localizar os números reais, nos quais o Cálculo Diferencial e Integral se baseia, dentro do panorama geral de conjuntos numéricos, mostrando suas propriedades e suas limitações.

a) Números naturais

O primeiro conjunto numérico que iremos estudar é o conjunto dos números naturais, dado por

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Este conjunto tem um número infinito de elementos, pois podemos contar indefinidamente. Podemos representar os números naturais sobre uma semi-reta indo de 0 até ∞, como indicado na figura ao lado.



Soma e multiplicação:

Os números deste conjunto (com exceção do zero) são os primeiros aprendidos por crianças e, como diz o nome, são os mais naturais para a pessoa que tem que contar, seja o número de ovelhas que possui ou o número de filhos que tem, ou mesmo quantas batatas serão necessárias para fazer o jantar. Nós não reparamos muito quando operamos com eles, mas a matemática sistematizou algumas coisas. Por exemplo, existem duas operações fundamentais com os números naturais: a soma (+) e a multiplicação (.). Exemplos dessas duas operações são dados a seguir.

Exs.1: $2 + 1 = 3$, 9+3=12 , $5 + 8 = 13$.

Exs.2: $2.1 = 2$, $9.3 = 27$, $5.8 = 40$.

Elementos neutros:

Cada uma das operações acima (soma e multiplicação) tem um elemento neutro, isto é, um número natural n com a seguinte propriedade: $a * n = a$, $a \in \mathbb{N}$, onde $*$ é uma operação. No caso da soma, este número é o zero (0), enquanto no caso da multiplicação o elemento neutro é o número um (1).

Exs.1: $2 + 0 = 2$, $9 + 0 = 9$, $n + 0 = n$ ($n \in \mathbb{N}$).

Exs.2: $2.1 = 2$, $9.1 = 9$, $n.1 = n$ ($n \in \mathbb{N}$).

Subtração e divisão:

Também podemos definir as operações subtração ($-$) e divisão (:), embora estas não sejam válidas para todos os números naturais.

Exs.1: $2 - 1 = 1$, $9 - 3 = 6$, enquanto $5 - 8$ não resulta em um número natural.

Exs.2: $2 : 1 = 2$, $9 : 3 = 3$, enquanto $5 : 8$ não resulta em um número natural.

A necessidade de números tais que as operações de subtração e divisão sejam sempre válidas dá origem a dois novos conjuntos numéricos, que serão estudados nas duas subseções seguintes.

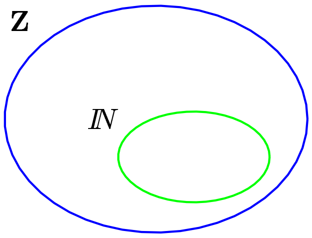
b) Números inteiros

Conforme a humanidade foi evoluindo, surgiram o comércio e a aritmética. Era necessário definir números que pudessem resultar de qualquer subtração de um número pelo outro, isto é, era preciso definir números negativos. Estes eram usados, por exemplo, para indicar dívidas em compras e vendas ou escalas negativas de tempo. Chineses do século III a.C. faziam contas com barras vermelhas para números positivos e barras pretas para números negativos. O conjunto de números que engloba os números naturais e também os números negativos é chamado *conjunto dos números inteiros*.

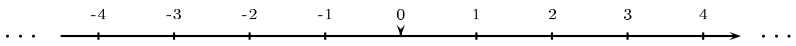
O conjunto dos números inteiros é dado por

$\mathbf{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

Portanto, o conjunto dos números inteiros inclui o conjunto dos números naturais, acrescentando os números negativos.



Podemos representar os números inteiros sobre uma reta, indo do $-\infty$ ao ∞.



Soma e multiplicação:

Quando somamos ou multiplicamos números inteiros, temos que seguir a seguinte convenção:

$$\boxed{+a \cdot +b = +ab}\ ,\quad \boxed{+a \cdot -b = -ab}\ ,\quad \boxed{-a \cdot +b = -ab}\ ,\quad \boxed{-a \cdot -b = +ab}\ ,\quad a \in \mathbf{Z} \text{ e } b \in \mathbf{Z}.$$

Exs.1: $2 + 6 = 8 \quad , \quad 3 + (-4) = 3 - 4 = -1 \quad , \quad -3 + (-5) = -3 - 5 = -8.$

Note que a subtração $(a - b)$ pode ser vista como a soma a um número negativo $(a + (-b))$. Portanto, a subtração não é uma operação fundamental dentro do conjunto dos números inteiros, mas sim uma operação definida a partir da soma.

Exs.2: $2.6 = 12 \quad , \quad 3.(-4) = -3.4 = -12 \quad , \quad -3.(-5) = +3.5 = 15.$

Os elementos neutros da soma e multiplicação continuam sendo 0 e 1, respectivamente. Isto será assim para qualquer conjunto numérico que formos definindo.

Elemento inverso da soma:

Dentro da operação soma existe, para cada número inteiro a, um elemento tal que, somado ao número a, resulta no elemento neutro 0. Este número é o número $-a$, pois

$$a + (-a) = a - a = 0\ .$$

A este número chamamos *elemento inverso* de a quanto à soma. Todo número inteiro tem um inverso (note que o elemento inverso de 0 é ele mesmo).

Ex.: o elemento inverso de 8 é -8, o elemento inverso de -3 é $-(-3) = 3$, o elemento inverso de (-1) é $-(-1) = 1$.

O elemento inverso da multiplicação não pode ser definido para números inteiros e será visto na subseção seguinte.

Divisão:

A divisão de um número inteiro por outro pode ser feita se considerarmos o seguinte:

$$a : (-b) = \frac{a}{-b} \ .$$

Podemos multiplicar o numerador e o denominador simultaneamente por qualquer número que a proporção se conserva. Particularmente, podemos multiplicá-los por -1:

$$a : (-b) = \frac{a}{-b} = \frac{a.(-1)}{-b.(-1)} = \frac{-a.1}{+b.1} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} \ .$$

Portanto, temos a regra

$$\boxed{\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}}.$$

Exs.1: $8 : 2 = \frac{8}{2} = 4 \quad , \quad 10 : (-2) = \frac{10}{-2} = -\frac{10}{2} = -5 \quad , \quad -9 : (-3) = \frac{-9}{-3} = \frac{-9.(-1)}{-3.(-1)} = \frac{9}{3} = 3.$

Note que nem todas as divisões de um número inteiro por outro número inteiro resultam um número inteiro.

Exs.2: $1 : 4 = \frac{1}{4}$ não é um número inteiro, $5 : (-2) = \frac{5}{-2} = -\frac{5}{2}$ não é um número inteiro.

Este fato indica a necessidade de um conjunto no qual a divisão seja sempre válida. Tal conjunto será visto a seguir.

c) Números racionais

A necessidade de efetuar divisões cujos resultados não eram números inteiros deu origem aos chamados *números fracionários*. Estes eram usados em operações como a divisão de um terreno ou a subdivisão de um valor em moeda. O conjunto que engloba tanto os números inteiros quanto os fracionários é chamado *conjunto dos números racionais*.

O conjunto dos números racionais é dado por

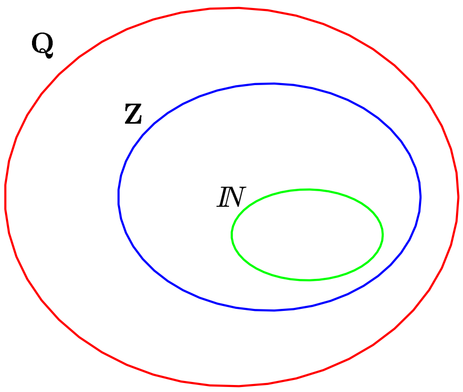
$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \ \middle| \ p \in \mathbf{Z} \text{ e } q \in \mathbf{Z} - \{0\} \right\} .$$

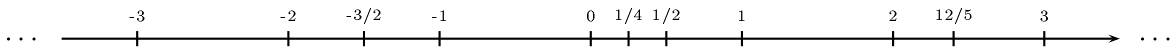
O que a definição acima estabelece é que os números racionais compreendem todos os números que podem ser escritos na forma de uma fração. Dado um número racional $\frac{p}{q}$, chamamos q de *numerador* e q de *denominador* da fração. A fração significa que tomamos o número q dividido pelo número q. Por isso, existe a condição $q \neq 0$, pois não existe sentido (ainda) na divisão por zero.

São exemplos de números racionais:

$$\frac{3}{2},\ \frac{1}{5},\ 5 = \frac{5}{1},\ -\frac{3}{5} = \frac{-3}{5}.$$

Portanto, o conjunto dos números racionais engloba o conjunto dos números inteiros. Podemos representar o conjunto dos números racionais sobre uma reta. Os espaços entre os números inteiros são preenchidos pelos números fracionários. Como existem infinitos números racionais entre cada intervalo, não podemos escrevê-los todos na reta.





Também podemos somar e multiplicar números racionais. Para isto, temos que seguir algumas regras, dadas a seguir.

Multiplicação de frações.

A multiplicação de frações é feita multiplicando-se os numeradores e os denominadores das frações que estão sendo multiplicadas, isto é,

$$\boxed{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a.c}{b.d}.}$$

Exs.: consideremos as operações seguintes:

$$\begin{aligned}
&\text{a) } \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3.1}{2.2}=\frac{3}{4},\\
&\text{b) } \frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{1.(-2)}{6.5}=-\frac{2}{30}=-\frac{1.2}{15.2}=-\frac{1}{15},\\
&\text{c) } 3\cdot\frac{4}{5}=\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{5}=\frac{3.4}{1.5}=\frac{12}{5}.
\end{aligned}$$

Divisão de frações.

A divisão de frações é definida pela seguinte fórmula:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c},$$

isto é, dividir por uma fração equivale a multiplicar pelo inverso dela. Portanto, a divisão não é uma operação fundamental dentro do conjunto dos números racionais.

Exs.: consideremos as operações seguintes:

$$\begin{aligned}
&\text{a) } \frac{3}{2}:\frac{2}{4}=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{2}=\frac{3.4}{2.2}=\frac{12}{4}=3,\\
&\text{b) } \frac{1}{6}:\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{1.(-5)}{6.2}=-\frac{5}{12},\\
&\text{c) } \frac{3}{4/5}=3:\frac{4}{5}=3\cdot\frac{5}{4}=\frac{3}{1}\cdot\frac{5}{4}=\frac{3.5}{1.4}=\frac{15}{4}.
\end{aligned}$$

Soma de frações.

A soma de frações obedece à seguinte regra:

$$\boxed{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a.d+c.b}{b.d}.}$$

Esta tem sua origem na regra segundo a qual, para somarmos duas frações, os denominadores de ambas têm que ser igualados, como feito abaixo:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{d}+\frac{c}{d}\cdot\frac{b}{b}=\frac{a.d}{b.d}+\frac{c.b}{b.d}=\frac{a.d+b.c}{b.d}.$$

Exs.: consideremos as seguintes operações:

$$\begin{aligned}
&\text{a) } \frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{2}=\frac{1.3}{2.3}+\frac{2.2}{3.2}=\frac{3}{6}+\frac{4}{6}=\frac{3+4}{6}=\frac{7}{6},\\
&\text{b) } \frac{2}{5}+\frac{7}{15}=\frac{2}{5}\cdot\frac{15}{15}+\frac{7}{15}\cdot\frac{5}{5}=\frac{2.15}{5.15}+\frac{7.5}{15.5}=\frac{30}{75}+\frac{35}{75}=\frac{30+35}{75}=\frac{65}{75}=\frac{13.5}{15.5}=\frac{13}{15},\\
&\text{c) } \frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{2}=\frac{1.5}{2.5}+\frac{1.2}{5.2}=\frac{5}{10}+\frac{2}{10}=\frac{5+2}{10}=\frac{7}{10},\\
&\text{d) } 2+\frac{1}{6}=\frac{2}{1}+\frac{1}{6}=\frac{2}{1}\cdot\frac{6}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1}=\frac{2.6}{1.6}+\frac{1.1}{6.1}=\frac{12}{6}+\frac{1}{6}=\frac{12+1}{6}=\frac{13}{6}.
\end{aligned}$$

Subtração de frações.

A subtração de frações pode ser vista como a soma a uma fração negativa:

$$\boxed{\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a}{d}+\left(-\frac{c}{d}\right).}$$

Ex.: considere a seguinte operação:

$$\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3}+\left(-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{2}\right)=\frac{3}{6}+\left(-\frac{4}{6}\right)=\frac{3+(-1)4}{6}=\frac{3+(-4)}{6}=\frac{3-4}{6}=-\frac{1}{6}.$$

Também podemos fazer essas operações de forma mais direta, como nos exemplos a seguir.

Exs.: consideremos as seguintes operações:

a) $\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{5}-\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{2}=\frac{1.5}{2.5}-\frac{1.2}{5.2}=\frac{5}{10}-\frac{2}{10}=\frac{5-2}{10}=\frac{3}{10},$

b) $\frac{2}{5}-\frac{7}{15}=\frac{2}{5}\cdot\frac{15}{15}-\frac{7}{15}\cdot\frac{5}{5}=\frac{2.15}{5.15}-\frac{7.5}{15.5}=\frac{30}{75}-\frac{35}{75}=\frac{30-35}{75}=-\frac{5}{75}=-\frac{5}{15.5}=-\frac{1}{15},$

c) $2-\frac{1}{6}=\frac{2}{1}-\frac{1}{6}=\frac{2}{1}\cdot\frac{6}{6}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1}=\frac{2.6}{1.6}-\frac{1.1}{6.1}=\frac{12}{6}-\frac{1}{6}=\frac{12-1}{6}=\frac{11}{6}.$

Elemento inverso da multiplicação:

Na operação de multiplicação existe, para cada número racional a, um elemento tal que, multiplicado ao número a, resulta no elemento neutro 1. Este número é o número $\frac{1}{a}$, pois

$$a.\frac{1}{a}=\frac{a}{a}=1\ .$$

A este número chamamos *elemento inverso* de a quanto à multiplicação. Todo número racional (com exceção do 0) tem um inverso (note que o elemento inverso de 1 é ele mesmo).

Ex.1: o elemento inverso de 8 quanto à multiplicação é $\frac{1}{8}$, o elemento inverso de -3 quanto à multiplicação é $\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}$, o elemento inverso de $\frac{2}{3}$ quanto à multiplicação é $\frac{1}{2/3}=1.\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$.

O elemento inverso quanto à soma é definido da mesma forma que para números inteiros, isto é, se a é um número racional, o inverso dele quanto à soma é dado por $-a$.

Ex.2: o elemento inverso de 8 quanto à soma é -8, o elemento inverso de -3 quanto à soma é 3, o elemento inverso de $\frac{2}{3}$ quanto à soma é $-\frac{2}{3}$.

Dízimas periódicas

Uma característica dos números racionais é que eles podem ser escritos em termos de *dízimas periódicas*. Para saber o que são elas, observe os exemplos abaixo, quando escrevemos frações em notação decimal (isto é, efetuamos as divisões).

Exs.: consideremos as seguintes frações:

$\frac{1}{2} = 0,5$; $\frac{1}{5} = 0,2$; $\frac{3}{5} = 0,6$;

$\frac{1}{3} = 0,3333\ldots$; $\frac{4}{3} = 1,3333\ldots$; $\frac{1}{9} = 0,1111\ldots$;

$\frac{1}{11} = 0,09090909090\ldots$; $\frac{1}{7} = 0,142857142857142857\ldots$; $\frac{1}{13} = 0,076923076923076923O\ldots$;

$\frac{2}{15} = 0,133333\ldots$; $\frac{13}{9} = 1,4444\ldots$.

Note que ou a fração é escrita em termos de um número finito de algarismos (primeiros três casos do exemplo acima) ou em termos de uma seqüência infinita, porém periódica de algarismos. O número $\frac{1}{3}$ pode ser expresso por uma seqüência infinita de 3 após o zero. O número $\frac{4}{3}$ apresenta a mesma seqüência, mas após o número 1. A seqüência para $\frac{1}{9}$ é de números 1. Para $\frac{1}{11}$, a seqüência é de 09. Para $\frac{1}{7}$, ela é composta pelos algarismos 142857. Para $\frac{1}{13}$, a seqüência é 076923. Para $\frac{2}{15}$, uma seqüência infinita de 3 seguindo 0,1. Para $\frac{13}{9}$, seqüência de 4 seguindo 1. O importante é notar que, a partir de um certo algarismo, o número torna-se uma seqüência periódica com um número finito de algarismos.

De modo geral, qualquer número racional, isto é, um número que pode ser expresso como uma razão entre dois números inteiros, pode ser escrito em termos de uma dízima periódica. Existem técnicas para transformar uma dízima periódica em fração, mas não iremos tratar desse assunto aqui, limitando-nos a dar alguns exemplos de como fazê-lo.

Ex.1: transforme a dízima periódica $0,66666666\ldots$ em fração.

Solução: isto se faz chamando $x = 0,66666\ldots$. Multiplicando isto por 10, obtemos $10x = 6,66666\ldots$. Fazemos, agora, a seguinte operação:

$$10x - x = 6,66666\cdots - 0,66666\cdots \Rightarrow 9x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{9} \Rightarrow x = \frac{2.3}{3.3} \Rightarrow x = \frac{2}{3}.$$

Portanto, a fração correspondente a $0,66666\ldots$ é $\frac{2}{3}$.

Ex.2: transforme a dízima periódica $0,142857142857\ldots$ em fração.

Solução: isto se faz chamando $x = 0,142857142857\ldots$. Multiplicando isto por 1.000.000, obtemos $1.000.000x = 142.857,142857142857\ldots$. Fazemos, agora, a seguinte operação:

$$1.000.000x - x = 142.857,142857142857\cdots - 0,142857142857\cdots \Rightarrow 999.999x = 142.857 \Rightarrow x = \frac{142.857}{999.999} \Rightarrow x = \frac{1}{7}.$$

Portanto, a fração correspondente a $0,142857142857\ldots$ é $\frac{1}{7}$.

Um fato curioso ocorre quando formos escrever a dízima periódica $0,999999\ldots$ em termos de uma fração. Isto é feito no exemplo seguir.

Ex.3: transforme a dízima periódica $0,999999\ldots$ em fração.

Solução: isto se faz chamando $x = 0,99999\ldots$. Multiplicando isto por 10, obtemos $10x = 9,99999\ldots$. Fazemos, agora, a seguinte operação:

$$10x - x = 9,99999\cdots - 0,99999\cdots \Rightarrow 9x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{9} \Rightarrow x = 1.$$

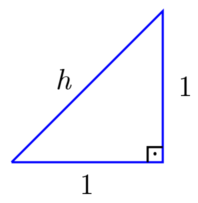
Portanto, a fração correspondente a $0,99999\ldots$ é o número 1!

Existem números que não podem se representados por frações ou dízimas periódicas. Estes serão vistos na seção seguinte.

d) Números reais

Antes de definirmos o conjunto dos números reais, temos que estudar um pouco os chamados *números irracionais*. Estes são números que não podem ser escritos na forma de frações de números inteiros e também não são dízimas periódicas. Vamos estudar alguns exemplos desses números.

O primeiro exemplo de número irracional que iremos estudar apareceu quando os gregos estudavam a geometria do triângulo retângulo, que é um triângulo que tem um de seus ângulos internos igual a 90^0. Se tomarmos um desses triângulos, de lados 1 e 1 (figura ao lado), o *Teorema de Pitágoras* (ver curso de Cálculo Vetorial) nos diz que o lado restante (a hipotenusa) é dado por



$$h^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow h^2 = 1 + 1 \Rightarrow h^2 = 2 \Rightarrow h = \pm\sqrt{2}.$$

Como a medida da hipotenusa só pode ser positiva, tomamos o resultado $h = \sqrt{2}$.

O problema com este número é que ele não é uma dízima periódica. Podemos calculá-lo com uma certa precisão, obtendo

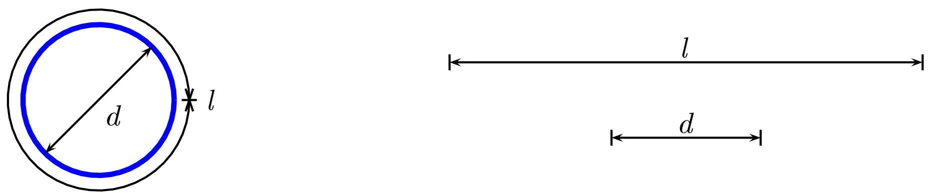
$$\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887242097\ldots\ .$$

Note que não existe uma seqüência coerente em parte alguma do número. Por causa disso, os gregos chamaram tais números de *irracionais*, pois não apresentam seqüências que obedeçam à razão. Outros desses números são a raiz de 3 e a raiz de 5:

$$\sqrt{3} = 1,7320508075688772935274463415058\ldots\ ,$$
$$\sqrt{5} = 2,2360679774997896964091736687312\ldots\ .$$

> **Pitágoras** *(cerca de 580-500 a.C.): um dos maiores matemáticos e filósofos da Grécia antiga. Nasceu na ilha de Samos, então colônia grega, e fundou uma sociedade secreta em Crotona (ao sul da Itália), onde os membros adoravam o mundo perfeito dos números e consideravam a nossa realidade uma pálida sombra deste. Sua influência foi decisiva na formação do pensamento ocidental.*

Outro exemplo de número irracional aparece quando consideramos uma circunferência. Sempre que dividimos o comprimento desta pelo seu diâmetro, obtemos o mesmo resultado: um número que os gregos chamaram π.



Em termos decimais, este número fica

$$\pi = 3,1415926535897932384626433832795\ldots\ .$$

Mais outro exemplo de número irracional apareceu da teoria econômica, mais precisamente do cálculo de juros compostos (juros sobre juros). A fórmula usada para o cálculo do saldo s de um valor v de dinheiro aplicado a uma taxa de juros anual r, onde os juros são concedidos um número k de vezes por ano (de mês em mês isto seria $k = 12$ vezes) é

$$s(t) = v\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt}\ .$$

Por exemplo, se alguém aplica 1.000 reais na poupança a uma taxa $r = 0,07$ ao ano, onde os juros são calculados mês a mês ($k = 12$), ao final de 3 anos terá um saldo dado por

$$s(3) = 1.000\left(1 + \frac{0,07}{12}\right)^{12.3} \approx 1.233\ .$$

Portanto, ao final de três anos, a pessoa terá 1.233 reais.

Quando considerou-se a aplicação de juros de maneira contínua, isto é, quando tomou-se um número infinito para k, obteve-se a fórmula

$$s(t) = ve^{rt}\ ,$$

onde aparecia um número estranho, que foi chamado e. Este número, em termos decimais, fica

$$e = 2,71828182845904523536028747135266\ldots\ .$$

Os números e e π também são chamados *números transcedentais*.

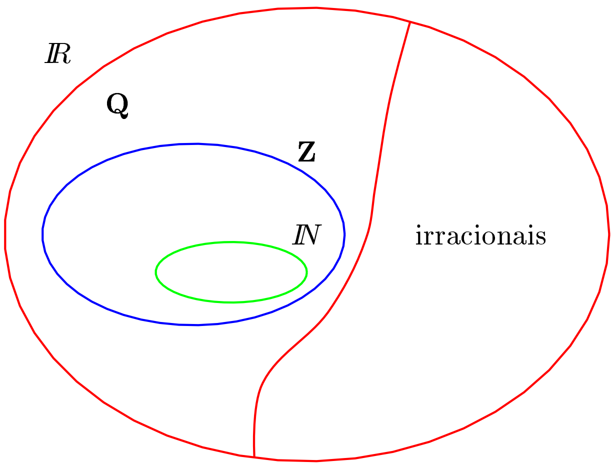
Existem infinitos exemplos de números irracionais. Na verdade, existem muito mais números irracionais que racionais (ver a Leitura Complementar). No princípio, esses números não eram aceitos (os gregos os repudiavam). Achava-se que, em algum ponto, eles começariam a apresentar seqüências periódicas, como no caso de números racionais, mas isso não aconteceu. Surgiu a necessidade de criar um conjunto que englobasse tanto os números racionais quanto os irracionais. A este conjunto deu-se o nome de *números reais*, indicado pelo símbolo $I\!R$. Portanto, o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais são subconjuntos de $I\!R$.

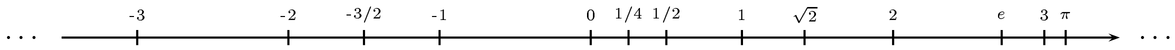
Podemos definir o conjunto dos números reais da seguinte forma:

$$I\!R = \{x \mid x \text{ é racional ou } x \text{ é irracional}\}.$$

Uma definição mais formal que esta é bastante mais complicada e em geral é tratada em livros de álgebra superior ou de teoria de números.

Os números reais podem ser representados na forma da chamada *reta dos reais*, que é uma reta sobre a qual estes se distribuem de maneira contínua. É uma característica dos números reais que, se tomarmos quaisquer dois números reais, existe um número infinito de números reais entre eles. Essa característica é fundamental para o Cálculo Diferencial e Integral, pois ele se baseia em diferenças infinitesimais entre números reais.





Intervalos.

Intervalos são subconjuntos de $I\!R$, que podem ser representados como segmentos da reta dos reais. Um intervalo pode ter extremidades *abertas* ou *fechadas*. Uma extremidade é aberta em um número a se ele inclui o último número real menor que a ou o primeiro número real após a. A extremidade será fechada em a se ele incluir o número a. Existem quatro tipos possíveis de intervalos, definidos a seguir.

D1 - um intervalo fechado $[a, b]$ é um conjunto $\{x \in I\!R \mid a \le x \le b\}$.

D2 - um intervalo aberto (a, b) é um conjunto $\{x \in I\!R \mid a < x < b\}$.

D3 - um intervalo fechado à esquerda e aberto à direita $[a, b)$ é um conjunto $\{x \in I\!\!R | a \leq x < b\}$.

D4 - um intervalo aberto à esquerda e fechado à direita $(a, b]$ é um conjunto $\{x \in I\!\!R | a < x \leq b\}$.

Uma extremidade aberta de um intervalo é indicada por uma bola aberta ($\circ$) e uma extremidade fechada é indicada por uma bola fechada ($\bullet$).

Ex.1: represente o intervalo $[2, 6]$ na reta dos reais.

Solução:

Ex.2: represente o intervalo $\left[\frac{1}{2}, 6\right]$ na reta dos reais.

Solução:

Ex.3: represente o intervalo $(1, 7)$ na reta dos reais.

Solução:

Ex.4: represente o intervalo $[2, 4)$ na reta dos reais.

Solução:

Ex.5: represente o intervalo $(-1, 4]$ na reta dos reais.

Solução:

Também podemos ter intervalos infinitos. Um intervalo que tem $-\infty$ ou ∞ como uma de suas extremidades é sempre abarto nessa extremidade, pois nunca teremos um número que chegue a ∞ ou $-\infty$.

Ex.6: represente o intervalo $[1, \infty)$ na reta dos reais.

Solução:

Ex.7: represente o intervalo $(-\infty, 6)$ na reta dos reais.

Solução:

Ex.8: represente o intervalo $(-\infty, \infty)$ na reta dos reais.

Solução:

Obs.: o intervalo $(-\infty, \infty)$ é a própria reta dos reais.

Agora que estudamos os números reais, que será o conjunto com o qual estaremos trabalhando em nosso estudo do Cálculo, vamos estudar a seguir um dos conjuntos que generalizam ou completam o conjunto dos números reais: o conjunto dos números complexos.

e) Números complexos

Os números reais são bastante completos quando operamos com a soma, subtração, multiplicação ou divisão. No entanto, surgem alguns problemas quando tentamos extrair raízes pares de números negativos. Consideremos os dois exemplos a seguir.

Ex.1: resolva a equação $x^2 = 1$.

Solução: a solução é dada por $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$, pois $(-1)^2 = 1$ e $1^2 = 1$.

Ex.2: resolva a equação $x^2 = -1$.

Solução: temos $x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$.

Não existe um número real $\sqrt{-1}$, pois nenhum número real elevado ao quadrado pode resultar em um número negativo. O mesmo pode ser dito da raiz par de qualquer número negativo, como em: $\sqrt{-2}$, $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[6]{-3}$. No entanto, podemos **definir** que exista um número, chamado *número imaginário*, ou i, tal que

$$\boxed{i = \sqrt{-1}.}$$

Fazendo isto, tornamos possível a extração de raízes pares de números negativos.

Ex.1: $\sqrt{-2} = \sqrt{(-1).2} = \sqrt{-1}\sqrt{2} = i\sqrt{2} = \sqrt{2}i$.

Ex.2: $\sqrt{-4} = \sqrt{(-1).4} = \sqrt{-1}\sqrt{4} = i2 = 2i$.

Ex.3: $\sqrt{-9} = i3 = 3i$.

As raízes de ordens 4, 6 ou maiores podem ser calculadas de forma semelhante (o estudo mais detalhado destas não será feito aqui).

Esses números imaginários começaram a ser utilizados no século XVI por matemáticos como *Cardano* e *Bombelli* na solução de algumas equações do terceiro grau, mas só foram completamente aceitos pela comunidade de matemáticos no século XIX.

Gerônimo Cardano *(1501-1576): matemático, físico e médico italiano. Foi o mais competente algebrista da Europa na época. Em 1545, publicou Ars Magna, onde relata a solução da equação $x^3 + px = q$ e faz observações sobre o novo número imaginário.*

Rafael Bombelli *(cerca de 1526-1573): matemático italiano (da Bolonha). Ao resolver a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ passou a usar o símbolo $\sqrt{-1}$.*

Podemos, agora, considerar os chamados *números complexos*. Estes são números que têm uma parte real e uma parte imaginária, $a + bi$, e o conjunto deles é definido por

$$\mathbf{C} = \{x = a + bi \mid a \in I\!R,\ b \in I\!R \text{ e } i = \sqrt{-1}\}.$$

Exs.: $2 + 3i$, $2i = 0 + 2i$, $-1 + 4i$, $0 = 0 + 0i$, $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}i$.

Os números complexos são uma generalização dos números reais e têm aplicações em diversas áreas da ciência ou da tecnologia. Existem ainda outros números mais gerais que os complexos, como os *quatérnions*, que são escritos $a + ib + jc + kd$, onde i, j e k são números imaginários, ou os *octônions*, que são ainda mais gerais. Estes também têm suas áreas de aplicação, e são apresentados na Leitura Complementar deste capítulo.

f) Infinito

A idéia de infinito já vem fascinando os seres humanos desde os primórdios da antigüidade. Vários filósofos e cientistas estudaram esse conceito, desde a Grécia antiga até a segunda metade do século XIX, quando o matemático russo George Cantor (1845-1918), que também foi o criador da teoria dos conjuntos, desenvolveu a teoria dos *números transfinitos*.

Embora nós não pretendamos entrar na teoria dos números transfinitos (para isto, veja a Leitura Complementar deste capítulo), será útil para o nosso curso que saibamos algumas das propriedades do infinito. Em primeiro lugar, devemos saber que o infinito, representado por ∞, não é um número real. Ele encontra-se fora desse conjunto e dentro de um conjunto mais geral, chamado de *conjunto dos números surreais*.

Este número tem certas peculiaridades. Por exemplo, se somarmos 1 ao infinito, continuamos com infinito: $1+\infty=\infty$. Da mesma forma, qualquer número natural somado a infinito continua resultando em infinito. Se multiplicarmos ∞ por qualquer número natural diferente de zero, continuamos com ∞: $2.\infty=\infty$. Multiplicando ∞ por ∞, obtemos ∞. De um modo geral, o infinito tem as seguintes propriedades:

$$\boxed{\begin{array}{l} a+\infty=\infty\ ,\ a\in I\!\!R; \\ a.\infty=\infty\ ,\ a\in I\!\!R \text{ e } a>0; \\ a.\infty=-\infty\ ,\ a\in I\!\!R \text{ e } a<0; \\ \infty^a=\infty\ ,\ a\in I\!\!R. \end{array}}$$

Exs.: $2+\infty=\infty$, $2.\infty=\infty$, $-3.\infty=-\infty$, $\infty^2=\infty$.

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor *(1707-1783): grande matemático russo. Nasceu em São Petersburgo, Rússia, e mudou-se com sua família para a Alemanha quando tinha 11 anos de idade. Lá estudou filosofia, física e matemática. Aos 27 anos interessou-se pela idéia de infinito. Trabalhou com conjuntos infinitos e criou a teoria dos conjuntos. Em seus estudos, criou uma hierarquia para os vários tipos de infinito e foi o primeiro a introduzir a idéia de números transfinitos.*

Com isto, terminamos este capítulo. A seguir, temos a Leitura Complementar, um material optativo de leitura por parte do aluno, que trata de alguns assuntos paralelos ou mais avançados que não fazem parte do curso. No capítulo seguinte serão revistos e estudados os conceitos de relações e funções.

Bibliografia

Gelson Iezzi e Carlos Murakami, *Fundamentos da Matemática Elementar*, vol. 1 (7^a edição), Atual Editora (1996).

Nilson Machado, *Matemática por Assunto*, vol. 1, Editora Scipione (1988).

José L. P. Sampaio, Nilton Lapa e Sidney L. Cavallante, *Estudos de Matemática*, Editora Moderna (1977).

Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, José C. Teixeira, Nilson J. Machado, Márcio C. Goulart, Luiz R. S. Castro e Antonio S. Machado, *Matemática* (9^a edição), Atual Editora (1981).

Cid A. Guelli, Abraham Bloch, José C. Teixeira, Rberto M. el Jamal e Glenn A. J. van Amson, *Matemática*, vol. 1, Marco Editorial (1979).

Paulo Bucchi, *Curso Prático de Matemática*, vol. 1 Editora Moderna (1998).

Nelson Gentil, Carlos A. M. dos Santos, Antonio C. Greco, Antônio Bellota Filho e Sérgio E. Greco, *Matemática para o* 2^o *grau*, Editora Ática (1998).

Leitura Complementar

A - Números transfinitos

Os números transfinitos foram inventados pelo matemático russo George Cantor (1845-1918). Estes são números iguais ou maiores que o infinito e apresentam propriedades bastantes peculiares. No entanto, antes que possamos estudá-los, é necessário introduzir alguns conceitos, como os de cardinalidade e correspondência biunívoca.

a) Cardinalidade de conjuntos

A *cardinalidade* de um conjunto é o número de elementos que este contém. Começaremos analisando somente conjuntos com um número finito de elementos, como os dos exemplos a seguir.

Ex.1: indique a cardinalidade do conjunto $A = \{2, 6, 7\}$.

Solução: a cardinalidade de A é 3.

Ex.2: indique a cardinalidade do conjunto $B = \{\text{moinho}, \text{carro}\}$.

Solução: a cardinalidade de B é 2.

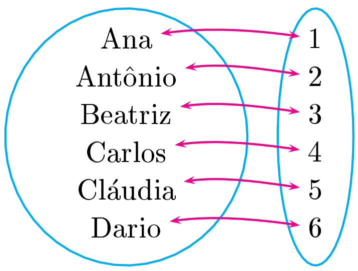
Ex.3: indique a cardinalidade do conjunto $\emptyset = \{\ \}$.

Solução: a cardinalidade de $\emptyset$ é 0, pois o conjunto vazio não tem elemeto algum.

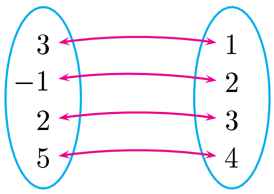
b) Correspondência biunívoca

Dizemos que dois conjuntos A e B estão em *correspondência biunívoca* quando cada elemento de A está associado a um único elemento de B. No nosso caso, estaremos mais interessados em estabelecer uma correspondência biunívoca entre um conjunto com um número finito de elementos e subconjuntos dos número naturais.

Ex.1: correspondência biunívoca entre o conjunto $A =$ {Ana,Antônio,Beatriz,Carlos,Cláudia,Dario} e o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.



Ex.2: correspondência biunívoca entre o conjunto $B = \{3, -1, 2, 5\}$ e o conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$.



A idéia da correspondência biunívoca serve para sistematizar a contagem dos elementos de um determinado conjunto, isto é, estabelece uma forma de calcular a sua cardinalidade. Para isso, associamos cada um dos elementos de um conjunto A a elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n\}$, onde n será a cardinalidade do conjunto A.

c) Cardinalidade do conjunto dos números naturais

Agora, façamos a seguinte pergunta: quantos elementos tem o conjunto dos números naturais? A resposta poderá ser obtida estabelecendo uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{N}$ e o conjunto $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, feita abaixo.

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots \end{array}$$

A resposta é que o conjunto dos números naturais tem um número infinito de elementos. Esse número Cantor chamou de $\aleph_0$ (*Aleph-0*), que é a primeira letra do alfabeto hebraico.

Propriedades:

Esse número infinito tem as seguintes propriedades, mostradas por meio de correspodência biunívoca.

P1) $x + \aleph_0 = \aleph_0$, $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração: podemos estabelecer uma correspondência biunívuca entre este conjunto e o conjunto $\mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{cccccccc} 0\text{+x} & 1\text{+x} & 2\text{+x} & 3\text{+x} & 4\text{+x} & 5\text{+x} & 6\text{+x} & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots \end{array}$$

Ex.1: o conjunto $\{2, 3, 4, 5, 6, \dots\} = \{x + 2 \mid x \in \mathbb{N}\}$ tem cardinalidade $\aleph_0$.

P2) $x.\aleph_0 = \aleph_0$, $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração: podemos estabelecer uma correspondência biunívuca entre este conjunto e o conjunto $\mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{cccccccc} 0x & 1x & 2x & 3x & 4x & 5x & 6x & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots \end{array}$$

Ex.2: o conjunto $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots\} = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$ tem cardinalidade $\aleph_0$.

P3) ${\aleph_0}^x = \aleph_0$, $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração: podemos estabelecer uma correspondência biunívuca entre este conjunto e o conjunto $\mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{cccccccc} 0^x & 1^x & 2^x & 3^x & 4^x & 5^x & 6^x & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots \end{array}$$

Ex.3: o conjunto $\{0, 4, 9, 16, 25, 36, \dots\} = \{x^2 \mid x \in \mathbb{N}\}$ tem cardinalidade $\aleph_0$.

Estas propriedades estão resumidas a seguir:

$$\boxed{\begin{array}{l} x + \aleph_0 = \aleph_0 \ , \ x \in \mathbb{R}; \\ x.\aleph_0 = \aleph_0 \ , \ x \in \mathbb{R}; \\ {\aleph_0}^x = \aleph_0 \ , \ x \in \mathbb{R}. \end{array}}$$

d) Cardinalidade do conjunto dos números inteiros

Com base nas propriedades acima, podemos responder a uma outra pergunta: quantos elementos tem o conjunto dos números inteiros? Como existem dois números inteiros $-a$ e $+a$ para cada número natural, com exceção do 0, temos que o número de números inteiros deverá ser dado por

$$2\aleph_0 - 1 = \aleph_0 - 1 = \aleph_0 \ .$$

Portanto, chegamos ao incrível resultado de que existem tantos números inteiros quanto números naturais!

Este resultado pode ser confirmado estabelecendo uma correspondência biunívuca entre $\mathbf{Z}$ e $\mathbb{N}^*$, como mostrado abaixo.

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & +1 & -1 & +2 & -2 & +3 & -3 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots \end{array}$$

e) Cardinalidade do conjunto dos números racionais

Um resultado ainda mais intrigante pode ser obtido quando fazemos a pergunta: quantos elementos tem o conjunto dos números racionais? Para responder a essa pergunta, Cantor desenvlveu um meio de ordenar os números racionais segundo a seguinte seqüência:

$$\begin{array}{cccccc} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\ \frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \cdots \\ \frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \cdots \\ \frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \frac{4}{5} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

Se omitirmos os termos repetidos (como, por exemplo, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, etc., que são todos iguais a 1), podemos estabelecer a seguinte correspondência biunívoca:

$$\begin{array}{cccccccc} \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \frac{3}{2} & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots \end{array}$$

Portanto, existem exatamente $\aleph_0$ números racionais! Este resultado é espantoso se considerarmos que existem infinitos nḿeros racionais entre quaisquer números inteiros. Isto mostra que a intuição não é uma boa guia quando lidamos com infinitos.

f) Números transfinitos

Já sabemos que $\aleph_0^x = \aleph_0$ para qualquer número real x. O que acontece se elevarmos $\aleph_0$, que não é um número real, a ele mesmo? A resposta é que obtemos um outro tipo de infinito, muito maior que $\aleph_0$. Este número transfinito (além do infinito) é chamado $\aleph_1$.

$$\boxed{{\aleph_0}^{\aleph_0} = \aleph_1}$$

Este número tem as seguintes propriedades, que não serão demonstradas aqui:

$$\boxed{\begin{array}{l} x + \aleph_1 = \aleph_1 \ , \ x \in I\!\!R; \\ x.\aleph_1 = \aleph_1 \ , \ x \in I\!\!R; \\ {\aleph_1}^x = \aleph_1 \ , \ x \in I\!\!R; \\ \aleph_0 + \aleph_1 = \aleph_1; \\ \aleph_0.\aleph_1 = \aleph_1; \\ {\aleph_1}^{\aleph_0} = \aleph_1. \end{array}}$$

E agora, o que acontece se elevarmos $\aleph_1$ a ele mesmo? Obtemos um outro número, maior ainda, chamado $\aleph_2$. Da mesma forma, temos que $\aleph_2^{\aleph_2} = \aleph_3$, etc., isto é,

$${\aleph_1}^{\aleph_1} = \aleph_2, \quad {\aleph_2}^{\aleph_2} = \aleph_3, \quad {\aleph_3}^{\aleph_3} = \aleph_4, \quad \ldots \ .$$

Assim, podemos obter números cada vez maiores, todos transfinitos. Esses números são chamados *números transfinitos*.

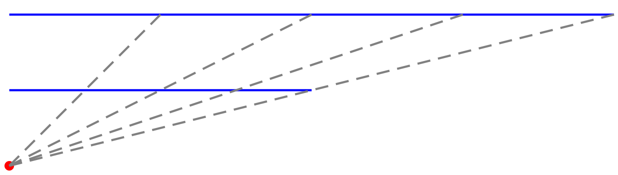
g) Cardinalidade do conjunto dos números reais

Vamos, agora, fazer a seguinte pergunta: quantos elementos tem o conjunto dos números reais?

A resposta para esta pergunta é que a cardinalidade do conjunto dos números reais é maior que $\aleph_0$, só que não se sabe se ela é $\aleph_1$ ou outro número transfinito. Por isto, convencionou-se chamar a cardinalidade do conjunto dos números reais de C, que vem de *contínuo*. Esse número C tem as segintes propriedades:

$$\boxed{\begin{array}{l} x + C = C \ , \ x \in I\!\!R; \\ x.C = C \ , \ x \in I\!\!R; \\ C^x = C \ , \ x \in I\!\!R; \\ \aleph_0 + C = C; \\ \aleph_0.C = C; \\ C^{\aleph_0} = C. \end{array}}$$

Além de ser o número de elementos do conjunto dos números reais, C também é o número de pontos em uma reta. Mais surpreendente é que C é o número de pontos em qualqer segmento finito de reta. Isto é mostrado (não demonstrado) na figura abaixo:



Na figura acima, podemos ver que, dado um ponto qualquer, podemos traçar retas a partir desse ponto que cortam tanto o segmento de reta quanto a reta infinita. Cada ponto da reta infinita fica, então, relacionado a um ponto no segmento de reta. Sendo assim, ambos têm o mesmo número de pontos.

Usando as propriedades de C, podemos também responder à pergunta de quantos pontos existem em um plano. Como existem infinitas retas em um plano (C infinitas), o número de pontos em um plano é $C.C = C$. Portanto, existem tantos pontos em um plano quanto em uma reta!

Quantos elementos tem o conjunto dos números complexos? A resposta é novamente C, pois o número de números complexos é dado por $C.C = C$.

Outro número transfinito (que não sabemos se é $\aleph_2$ ou maior) pode ser conseguido mediante a operação

$$\boxed{C^C = F} \ .$$

F é o número de elementos do conjunto de todas as funções possíveis de uma variável real. F também é o número de elementos do conjunto de todas as funções possíveis de diversas variáveis reais.

h) Hipótese do contínuo

Como dissemos antes, não sabemos se o número C é o mesmo que $\aleph_1$. Existe uma hipótese, chamada *hipótese do contínuo*, que diz que não existem números entre $\aleph_0$ e C. Como conseqüência desta hipótese, devemos ter $\aleph_1 = C$, pois este é o primeiro número após $\aleph_0$.

A hipótese do contínuo ainda é muito debatida pelos especialistas. Em 1940, Kurt Gödel provou que a hipótese do contínuo não é falsa, isto é, que ela é consistente com a teoria dos conjuntos. Em 1964, Paul J. Cohen provou que a hipótese do contínuo é independente das leis (axiomas) da teoria dos conjuntos. Portanto, não se pode provar que a hipótese do contínuo é verdadeira utilizando somente as regras da teoria dos conjuntos atual. Talvez seja necessário adicinar mais uma regra à teoria, mas isto ainda é um assunto de grande debate entre os especialistas na área.

Kurt Gödel *(1906-1978): brilhante matemático, nascido em Brno, cidade tcheca que então pertencia ao Império Austro-húngaro. Gödel gostava de estudar os problemas mais fundamentais da matemática e em 1931 publicou um estudo que mostrava que a matemática era incompleta em si mesma, mais precisamente que sempre haveria proposições que não poderiam ser provadas matematicamente. Em 1940 mostrou que a hipótese do contínuo não é falsa caso se aceite a teoria dos conjuntos. Morreu em Princeton (EUA) de inanição, pois recusava-se a comer devido a uma neurose segundo a qual tentavam envenená-lo.*

Paul Joseph Cohen *(nascido em 1934): matemático americano, recebeu a medalha Fields de matemática (maior prêmio existente na área de matemática) em 1966 , por ter provado que a hipótse do contínuo independe das regras da teoria dos conjuntos. Cohen é professor de matemática na Universidade de Princenton (EUA).*

B - Números surreais

Em 1969, John H. Conway, matemático inglês, introduziu a idéia de um conjunto que engloba os números reais, os transfinitos e os infinitesimais. Um número infinitesimal é um número cujo módulo é menor que o de qualquer número real. A esse conjunto foi dado o nome de *conjunto dos números surreais*.

O conjunto dos números surreais tem uma notação particular e também regras de como efetuar as operações entre eles que são consideradas bastante simples. Como exemplo da notação utilizada para os números surreais, consideremos o mais simples deles, o zero, definido da seguinte forma:

$$0 = (\{\ \}, \{\ \}) \ ,$$

onde $\{\ \}$ é o conjunto vazio $\emptyset$. Os números 1 e -1 podem ser definidos a partir do número 0 da seguinte forma:

$$1 = (\{0\}, \{\ \}) \quad , \quad -1 = (\{\ \}, \{0\}) \ .$$

Todos os outros números surreais podem ser obtidos a partir destes. Cada número é construído utilizando os números obtidos anteriormente. Podemos construir $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$ da seguinte forma:

$$\frac{1}{2} = (\{0\}, \{1\}) \quad , \quad -\frac{1}{2} = (\{-1\}, \{0\}) \ .$$

Outros números que não pertencem ao conjunto dos números reais podem ser conseguidos desse modo. Por exemplo, podemos ter

$$w = (\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}, \{\ \}) \quad , \quad -w = (\{\ \}, \{-1, -2, -3, -4, -5, \dots\}) \ ,$$

que são, respectivamente, ∞ e $-\infty$. Também podemos conseguir o número infinitesimal

$$\epsilon = \left(\{0\}, \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right\}\right) \ ,$$

que é um número menor que o menor número real (com exceção do 0). Existem regras para operar com todos esses números, de como somá-los e subtraí-los, multiplicá-los ou dividí-los. Por exemplo, um resultado interessante é que

$$\epsilon . w = 1 \ ,$$

de modo que podemos considerar $\epsilon = \frac{1}{w}$, isto é, o número infinitesimal ϵ é o inverso do infinito. Também podemos utilizar as regras de multiplicação para definir potências como w^2, w^w e w^{w^w}, que são outros níveis de infinito.

Apesar de apresentar muitas propriedades interessantes, o conjunto dos números surreais ainda não foi bem explorado e suas implicações podem ser revolucionárias para diversos ramos da ciência e da técnica.

John H. Conway *(nascido em 1937): matemático inglês nascido em Liverpool. Conway é um gênio que fez várias contribuições em diversas áreas da matemática. Entre suas criações mais famosas estão os números surreais e o jogo da vida. O último é um jogo com regras muito simples mas que desenvolve uma extrema complexidade a partir delas. Um fato interessante é que os números surreais foram criados por Conway quando ele estudava métodos de se jogar um jogo japonês chamado Go. Atualmente, é professor em Princeton (EUA).*

C - Quatérnions

Outra forma de generalizar os números reais é seguindo a mesma linha que levou aos números complexos. Podemos definir os *quatérnions* como sendo uma generalização dos complexos. Eles são definidos da seguinte forma:

$$\boxed{x = a + bi + cj + dk,}$$

onde os números i, j e k obedecem às relações

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ ij = -ji = k \\ jk = -kj = i \\ ki = -ik = j. \end{aligned}$$

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Em geral, quatérnions não comutam, isto é, dados dois quatérnions a e b, temos que, em geral, $a.b \neq b.a$. Eles podem ser representados por matrizes se definirmos

$$i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

$$k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Estas, quando multiplicadas, seguem as mesmas regras definidas na tabela anterior.

Quatérnions podem ser usados em cálculos de rotações no espaço, no estudo do spin de partículas e na Teoria da Relatividade Restrita.

D - Octônions

Podemos generalizar o conjuntos dos quatérnions ainda mais, obtendo o conjunto dos *octônions*, que são dados por

$$\boxed{x = a + bi_0 + ci_1 + di_2 + ei_3 + fi_4 + gi_5 + hi_6\ ,}$$

onde

	1	i_0	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6
1	1	i_0	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6
i_0	i_0	-1	i_3	i_6	$-i_1$	i_5	$-i_4$	$-i_2$
i_1	i_1	$-i_3$	-1	i_4	i_0	$-i_2$	i_6	$-i_5$
i_2	i_2	$-i_6$	$-i_4$	-1	i_5	i_1	$-i_3$	i_0
i_3	i_3	i_1	$-i_0$	$-i_5$	-1	i_6	i_2	$-i_4$
i_4	i_4	$-i_5$	i_2	$-i_1$	$-i_6$	-1	i_0	i_3
i_5	i_5	i_4	$-i_6$	i_3	$-i_2$	$-i_0$	-1	i_1
i_6	i_6	i_2	i_5	$-i_0$	i_4	$-i_3$	i_1	-1

Octônions em geral não são associativos, isto é, dados três octônions a, b e c, temos que, em geral, $a+(b+c) \neq (a+b)+c$. Por isso, não podem ser representados por matrizes porque essas são associativas.

Octônions podem ser usados nos cálculos de movimentos em 7 ou oito dimensões e em QCD (*Quantum Chromodynamics*, ou *Cromodinâmica Quântica*), que é a teoria da força nuclear forte.

Outras generalizações podem ser feitas, dando origem ao conjunto dos hexadecânions e, em geral, dos 2^n-ônions.

Bibliografia

José Francisco Marques, *Introdução à Teoria dos Números*, (1993) Editora UNIMEP (uma introdução simples e didática aos números transfinitos).

D. E. Knuth, *Surreal Numbers*, (1974) Addison-Wesley (uma introdução bastante acessível para quem quer saber mais sobre os números surreais).

John H. Conway, *The Book of Numbers*, (1996) Springer-Verlag (um livro bastante interessante que fala sobre números).

Muito material de qualidade (incluindo biografias de vários matemáticos) pode ser conseguido na internet no Wolfram Research, http://www.mathworld.com.