Universidad del Quindío – Ingeniería de Sistemas – Teoría de la Computación
Ago/2000, Feb/2001, Ago /2001, Ene/2003, Ago.24/2003, Feb.12/2004
Profesor: Leonardo Hernández Rodríguez

Ejercicios sobre Lógica Matemática, Teoría de Conjuntos, alfabetos, palabras y lenguajes

1. Ejercicios sobre lógica matemática

1.1) Averigüe si las siguientes proposiciones son tautologías, elaborando la tabla de valores de verdad:

a) $P \vee \neg P$
b) $P \to Q \leftrightarrow \neg Q \to \neg P$
c) $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$
d) $\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P) \wedge (\neg Q)$
e) $P \to Q \leftrightarrow Q \to P$
f) $\neg[(P \wedge Q) \vee \neg P] \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \wedge P$

1.2) Averigüe que las siguientes proposiciones son tautologías, usando las tautologías básicas:

a) $\neg(P \to Q) \leftrightarrow P \wedge \neg Q$
b) $\neg(\neg P \wedge Q) \leftrightarrow P \vee \neg Q$
c) $\neg(\neg P \to \neg Q) \leftrightarrow \neg P \wedge Q$
d) $\neg(\neg P \to Q) \leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$
e) $\neg(\neg P \vee Q) \leftrightarrow P \wedge \neg Q$
f) $\neg[(P \wedge Q) \vee \neg P] \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \wedge P$
g) $\neg[(P \to Q) \wedge (\neg P \to Q)] \leftrightarrow$
$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

1.3) Simplifique usando las tautologías básicas:

a) $\neg((\neg P) \vee (\neg Q))$
b) $\neg((\neg Q) \wedge (\neg P))$

1.4) Demuestre que las siguientes proposiciones son contradicciones, elaborando la tabla de valores de verdad.

a) $P \wedge \neg P$
b) $(P \to Q) \wedge P \wedge \neg Q$
c) $((P \vee Q) \wedge \neg P) \wedge \neg Q$

1.5) De un contraejemplo:

a) Todos los estudiantes de la Universidad del Quindío tienen 20 años
b) $\forall x, 2x > x$
c) $\forall x, x$ es impar $\to x$ es divisible por 3
d) $\forall x, x^2 > 0$
e) Todos los números primos son impares
f) Todos los números de la forma $2^n - 1$, donde **n** es un número entero mayor o igual que 2, son primos
g) $\forall x, x > 5 \to x > 10$
h) $\forall p,\ p$ es primo $\to 2^p - 1$ es primo (primos de Mersenne)

1.6) Niegue las siguientes proposiciones cuantificadas:

a) $\forall\, x, x$ es par $\to x$ no es primo
b) $\exists x,\ \ x^2 + 1 < 1 \ \ \vee \ \ x^4 + 2 = 1$

2. Ejercicios sobre teoría de conjuntos

2.5 Responda V o F según la implicación sea correcta o NO.
a. $x \notin (A \cap B) - \overline{C} \to x \notin (A \cap B) \wedge x \in \overline{C}$
b. $x \in \overline{A - (B \cap C)} \to x \notin A - (B \cap C)$
c. $x \in \overline{C \cap A} \cup \overline{B} \to x \in \overline{C \cap A} \vee x \in \overline{B}$
d. $x \notin B \cap \overline{A} \to x \notin B \wedge x \notin \overline{A}$
e. $x \in \overline{C \cup A} - B \to x \notin (C \cup A) - B$
f. $x \in A \cap \overline{B - C} \to x \in A \wedge x \in \overline{B - C}$
g. $x \in A - \overline{B} \to x \in A \wedge x \notin B$
h. $x \notin \overline{A} \cap (B \cup C) \to x \notin \overline{A} \wedge x \notin B \cup C$
i. $x \in \overline{\overline{A \cap B \cap C}} \to x \notin \overline{A \cap B \cap C}$
j. $x \notin \overline{A \cap B} \cup C \to x \in (A \cap B) \cup C$

En los ejercicios siguientes, Sean A, B y C tres conjuntos cualesquiera. Demuestre:

2.10) $A \cup B = B \cup A$
2.20) $A \cup A = A$
2.30) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
2.40) $A \cap A = A$
2.50) $A \cap B = B \cap A$
2.60) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
2.70) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2.80) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2.90) $\overline{\overline{A}} = A$

2.100) $A - B = A \cap \overline{B}$

2.110) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

2.120) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

2.130) $\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

2.140) $(\overline{A} \cup B) = \overline{A \cap \overline{B}}$

2.150) $\overline{A \cap \overline{B}} = \overline{A} \cup B$

2.160) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

2.170) $(A - B) - \overline{C} = A - \overline{(\overline{B} \cap C)}$

2.180) $\overline{A} - B = \overline{A \cup B}$

2.190) $\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

2.200) $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C$

2.210) $A \subseteq B \rightarrow A \cap B = A$

2.230) $A \cap B = A \cup B \rightarrow A = B$

2.240) $A \cap B = B \rightarrow B \subseteq A$

2.250) $A \cup B = B \rightarrow A \subseteq B$

En los ejercicios siguientes Sean A, B y C conjuntos, refute dando un contraejemplo de lo siguiente, intente dar un contraejemplo los más pequeño posible:

2.270) $A \cup B = A \cup C \rightarrow B = C$

2.280) $A \cap B = A \cap C \rightarrow B = C$

2.290) $A - B = A - C \rightarrow B = C$

2.300) $A - B = C - B \rightarrow A = C$

3. Ejercicios sobre alfabetos

3.1) Verdadero o falso:

a) Un párrafo de un texto de un periódico puede ser considerado como una palabra, en teoría de lenguajes formales.

b) Sea $\Sigma = \{ab, bc\}$ un alfabeto, entonces bcababc es una palabra sobre Σ

c) Sea $\Sigma = \{ab, ba\}$ un alfabeto, entonces babaabbaabbaabab es una palabra sobre Σ

d) Sea $\Sigma = \{ab, c\}$ un alfabeto, entonces abccabaabc es una palabra sobre Σ

e) Sea Σ un alfabeto y sea a un símbolo, si $a \in \Sigma$ entonces $a \in \Sigma^*$

f) Para todo alfabeto Σ se tiene que $\{\varepsilon\} \in \Sigma^*$

g) Sea A un lenguaje sobre Σ, entonces, $A \subseteq \Sigma^*$

h) Sea $\Sigma = \{a, b\}$ un alfabeto y sea $A = \{wax \mid w \in \Sigma^* \wedge x \in \Sigma^*\}$ un lenguaje, Se puede decir que A es el lenguaje de todas las palabras que contienen por lo menos una a

i) Sea $\Sigma = \{a, b\}$ un alfabeto y sea $A = \{wa \mid w \in \Sigma^*\}$ un lenguaje, entonces A es el lenguaje de todas las palabras sobre Σ terminadas en *a*.

3.2) Sea $\Sigma = \{a, b\}$, especifique por comprensión:

a) El lenguaje sobre Σ de las palabras que comienzan por *b* y terminan en *b*
b) El lenguaje sobre Σ de las palabras que tienen a *aa* como subcadena una o más veces.
c) El lenguaje sobre Σ de las palabras que comienzan por *b* y tienen a *aa* como subcadena una o más veces.

4. Ejercicios sobre potencia de palabras

Especifique por compresión los siguientes lenguajes sobre el alfabeto {a,b}

Notas:

- Interprete la palabra “aes” como “cero o más aes” y la palabra “bes” como “cero o más bes”

4.1) El lenguaje de las palabras conformadas por un grupo de aes seguido po un grupo de bes.

4.2) El lenguaje de las palabras que comienzan por **a**, después de la cual sigue un grupo de bes.

4.3) El lenguaje de las palabras conformadas por dos aes, entre las cuales se encuentra un grupo de bes.

4.4) El lenguaje de las palabras que tienen una **a** y cualquier número de bes..

4.5) El lenguaje de las palabras que tienen dos aes y cualquier número de bes.

4.6) El lenguaje de las palabras que comienzan por **a,** después de la cual sigue un grupo de bes, después del cual sigue un grupo de aes.

4.7) El lenguaje de las palabras de aes, tales que el número de ellas en un cuadrado perfecto.

4.8) El lenguaje de las palabras que comienzan por un grupo de aes , después del cual sigue un grupo de bes de manera tal que el número de aes es igual al número de bes.

4.9) El lenguaje de la palabras conformadas por un número impar de aes.

4.10) El lenguaje de todas las palabras sobre Σ, que cumplen simultáneamente las siguientes condiciones:

- casa palabra comienza con cero o más **bes**, continúa con cero o más **aes**, luego siguen cero o más **bes** y con esto termina la palabra.
- hay más **bes** en total que **aes**.

4.11) El lenguaje de todas las palabras sobre Σ, que cumplen simultáneamente las siguientes condiciones:

- La palabra comienza con cero a más bes, continúa con cero o más aes y con esto termina la palabra.
- El número de **bes** es par
- El número de **aes** no es superior al doble del número de **bes**.

Especifique por comprensión los siguientes lenguaje sobre el alfabeto {a, b, c }:

4.12) (nuevo) El lenguaje de todas las palabras sobre Σ que cumplen simultáneamente las siguientes condiciones:

- La palabra comienza con cero o más **aes**, continúa con cero o más **bes**, luego siguen cero o más **ces** y con esto termina la palabra.
- El número de **bes** es el doble que el de **ces**.
- El número de **aes** es el doble que el de **bes**.

4.13) El lenguaje de todas las palabras sobre Σ que cumplen simultáneamente las siguientes condiciones:

- La palabra comienza con cero o más **bes**, continúa con cero o más **ces**, luego siguen cero o más **aes** y con esto termina la palabra.
- El número de **bes** es par.
- Juntas las **aes** y las **bes** superan en número a las **ces**.

4.14) Verdadero o falso

a) Sea $\Sigma = \{a, b\}$ un alfabeto, luego $a^5 b^6 = b^6 a^5$

b) Sea $\Sigma = \{a, b\}$ un alfabeto, luego $ab^2 ab^3 = a^2 b^5$

c) Sea $\Sigma = \{a, b\}$ un alfabeto, luego $a(ab)^3 b = a^4 b^4$

d) Sea $\Sigma = \{a, b\}$ un alfabeto, luego $(ab)^3 b = a(ba)^2 b^2$

e) Sea $\Sigma = \{a, b\}$ un alfabeto y sea $A = \{b^i ab^j ab^k \,|\, i \geq 0 \wedge j \geq 0 \wedge k \geq o\}$ un lenguaje, Se puede decir que A es el lenguaje de todas las palabras sobre Σ conformadas por dos aes y cualquier número de bes.

f) Sea $w = 1$ una palabra, luego $w^n = 1$ para todo $n \geq 0$

g) Sean w, x y y palabras, luego $\left| w^i x^j y^k \right|^2 = \left| w^{2i} x^{2j} y^{2k} \right|$

h) Sea w una palabra $\left| w^{m+n} \right| = \left| w^m \right| \cdot \left| w^n \right|$. (Si es verdadera, demuéstrela, si es falsa, de un contraejemplo).

5. Ejercicios sobre operaciones con palabras

5.1) Verdadero o falso

a) ε es prefijo propio de toda palabra

b) Todo sufijo de una cadena es una subcadena de dicha cadena

c) Una palabra no puede ser a la vez, sufijo y prefijo de otra

d) Sea $\Sigma = \{a, b\}$ un alfabeto, la palabra abb tiene tres prefijos.

5.2) Verdadero o falso

a) Para toda palabra w se tiene que $w^I \neq w$

b) Para toda palabra w se tiene que $\left| w^I \right| = |w|$

c) Sean w, x y y palabras, luego $\left| (w^i x^i y^i)^I \right| = i(|w| + |x| + |y|)$

d) Sean w, x y y palabras, entonces, $(wxy)^I = w^I x^I y^I$

6. Ejercicios sobre operaciones con lenguajes

6.1) Sean A,B y C lenguajes sobre un alfabeto Σ, dar un contraejemplo de:

a) $A \cdot (B \cap C) = A \cdot B \cap A \cdot C$

b) $A\cdot(B-C)=A\cdot B-A\cdot C$

6.2) Verdadero o falso: Para todo lenguaje A se tiene que $\varepsilon \in A^*$

6.3) Sea A = { a } especifique por comprensión A^* y A^+

6.4) Sea A = { ab } especifique por comprensión A^* y A^+

6.5) Sea $A=\{a\}$ y $B=\{b\}$ especifique por comprensión:

a) A^*ABB^*

b) A^*BA^*B

c) B^*AAB^*

6.6) Halle Φ^*, $\{\varepsilon\}^*$

6.7) Halle Φ^+, $\{\varepsilon\}^+$

6.8) ¿Bajo que condición $A^* = A^+$?

6.9) ¿Cuándo $\varepsilon \in A^+$?

6.10) Dar un contraejemplo para la siguiente afirmación: Sea A un lenguaje cualquiera, entonces:

$A^+ = A^* - \{\varepsilon\}$

6.11) Sean A,B y C lenguajes sobre un alfabeto Σ, demostrar:

a) $(A^I)^I = A$

b) $(\overline{A})^I = \overline{(A^I)}$

6.12. Sean A, B y Lenguajes cualesquiera, responda Verdadero o Falso a cada una de las siguientes implicaciones.

a) $x \notin A\cap B \rightarrow x\notin A \wedge x \notin B$

b) $x \in A\cap B \rightarrow x\in A\cap B \vee x \in A\cap C$

c) $x \notin \overline{A\cap BC} \rightarrow x\in A\cap BC$

d) $x \notin A\cup B \rightarrow x\notin A \vee x \notin B$

e) $x \in A\cap B \wedge C\subseteq A\cap B \rightarrow x\in C$

6.13. V o F.

a) *(abcd)*$^{50} \in$ *{* ε *, ab, cd}**

b) *(abc)* $^3 \in$*{a, bc}*^{10}

c) *(abcd)*$^{50} \in$ *{ ab, cd}*^{50}

d) *(abc)* ^{3} $\in$ *{* ε *, a, bc}*^{10}

e) *(ab)*$^{100} \in$ *{* ε *, a, b }*^{300}

f) $\varepsilon \in$*{ a, ab}*$^+$

6.14 Resuelva:

a) *[(ab)*^{3} *{* ε *, ab }]*^{50}

b) *({* ε *, ab }{ab}*^{20} *)*^{20}

c) *({* ε *, ab }{* ε *, ab })*^{100}

6.15. Demuestre que la siguiente propiedad es falsa:

a) Sea *A* un lenguaje, entonces $A\cap A^I=\phi$

b) Sean *A* y *B* lenguajes, entonces |*AB*| = |*A*| + |*B*|

c) Sean *w*, *x*, *y* y *z* palabras, entonces $(\mathrm{wxyz})^I = \mathrm{w}^I \mathrm{x}^I \mathrm{y}^I \mathrm{z}^I$

6.16 Exprese por comprensión los siguientes lenguajes:

a) $\{a\}\{a\}^*\{b\}^*\{b\}$

b) $\{ab\}^*\{a\}\{ba\}^*$

c) $\{ab\}^+\{ba\}^*\{a\}$

Respuestas:

(1.5) h) p=11, $2^{11}-1=2047=23\times 89$

(1.6) a) $\exists$ x, x es par $\wedge$ x es primo

b) $\forall x,\quad x^2+1\geq 1 \quad\wedge\quad x^4+2\neq 1$

(2.5) a. F b.V c.V d.F e.F f.V g.F h.F i.V j.F

(2.70) i) $x\in A\cap(B\cup C)\rightarrow$

$x\in A\wedge x\in B\cup C\rightarrow$

$x\in A\wedge(x\in B\vee x\in C)\rightarrow$

$(x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in C)\rightarrow$

$x\in A\cap B\vee x\in A\cap C\rightarrow$

$x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$

luego $A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$

ii) $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)\rightarrow$

$x\in A\cap B\vee x\in A\cap C\rightarrow$

$(x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in C)\rightarrow$

$x\in A\wedge(x\in B\vee x\in C)\rightarrow$

$x\in A\wedge x\in B\cup C\rightarrow$

$x \in A \cap (B \cup C)$
luego $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$
de i) y ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(2.230) i)
$x \in A \rightarrow x \in A \vee x \in B \rightarrow x \in A \cup B$
$x \in A \cup B \wedge A \cap B = A \cup B \rightarrow x \in A \cap B \rightarrow$
$x \in B$
luego $A \subseteq B$
ii) $x \in B \rightarrow x \in A \vee x \in B \rightarrow x \in A \cup B$
$x \in A \cup B \wedge A \cap B = A \cup B \rightarrow x \in A \cap B \rightarrow$
$x \in A \wedge x \in B \rightarrow x \in A$
luego $B \subseteq A$
de i) y ii) $A = B$

(3.1) (a) V (b) F (c) V (d) F (e) V (f) F , note que $\varepsilon \in \Sigma^*$, sin las llaves, si es verdadera (g) V (h) V (i) V

(4.14) (a) F (b) F (c) F (d) V (e) V (f) F (g) F (h) F

(5.1) (a) F (b) V (c) F (d) F

(5.2) (a) F (b) V (c) V (d) F

(6.2) V

(6.12) (a) F (b) V (c) V (d) F (e) F

(6.13) (a).V (b).F (c).F (d).V (e).V (f). F

6.14. (a) $\{(ab)^{150}, (ab)^{151}, ..., (ab)^{200}\}$
(b) $\{(ab)^{400}, (ab)^{401}, ..., (ab)^{420}\}$
(c) $\{\varepsilon, (ab), (ab)^2, ..., (ab)^{200}\}$

6.15. (a) Contraejemplo A={a}
$\{a\} \cap \{a\}^I = \phi$
$\{a\} \cap \{a\} = \phi$
$\{a\} = \phi$
F

(b) Contraejemplo A={a}, B={a}
$|\{a\}\{a\}| = |\{a\}| + |\{a\}|$
$|\{aa\}| = 1 + 1$
$1=2$
F

(c) Contraejemplo w=a, x=b, y=c, z=d
$(abcd)^I = a^I b^I c^I d^I$
dcba=abad
F

(6.16) a) $\{aa^i b^j b \mid i \geq 0, j \geq 0\}$
b) $\{(ab)^i a(ba)^j \mid i \geq 0, j \geq 0\}$
c) $\{(ab)^i (ba)^j a \mid i \geq 1, j \geq 0\}$